

2

METODE DE ANALIZĂ ELASTO-PLASTICĂ DE ORDINUL AL II-LEA A STRUCTURILOR ÎN CADRE

2.1. INTRODUCERE

Prin acceptarea metodei stărilor limită ca metodă de proiectare în majoritatea codurilor de proiectare a structurilor în cadre, și ca urmare a dezvoltărilor "hard" și "soft" ale calculatoarelor PC din ultimii ani, analiza statică elasto-plastică de ordinul al II-lea tinde să devină principalul instrument de analiză statică globală. Prin analiza statică elasto-plastică de ordinul al II-lea se înțelege orice tip de analiză care urmărește să surprindă atât efectul neliniarității fizice cât și a celei geometrice, respectiv influența modificării geometriei structurii, asupra mărimii deplasărilor și eforturilor structurii. În acest caz controlul soluției constă în aplicarea unui calcul incremental sau incremental-iterativ și îndeplinirea concomitentă a ambelor condiții ce trebuie satisfăcute în situația de echilibru, compatibilitatea deformației și echilibrul static al nodurilor, la fiecare increment al încărcării exterioare. În principal, procedeele de acest fel pot fi grupate în următoarele categorii: (1) metoda pașilor controlați de încărcări, (2) metoda pașilor controlați de deplasări și (3) metoda pașilor controlați de lungimea de arc ("arc length control method"). De menționat faptul că aplicarea unei metode incremental-iterative din categoria (2) sau (3) permite și studiul comportării structurii în domeniul postcritic, spre deosebire de cazul metodelor din categoria pașilor controlați de încărcări, când analiza este oprită la momentul atingerii încărcării limită.

Răspunsul neliniar al unei structuri se datorează în principal modificării caracteristicilor sale de rigiditate corespunzătoare diferitelor niveluri de intensitate ale acțiunilor exterioare. Variația rigidității provine din două cauze importante, și anume: neliniaritatea geometrică și neliniaritatea fizică.

Neliniaritatea geometrică se manifestă prin două efecte importante: un efect local, de flexibilizare a barelor comprimate, modelat în analiză prin considerarea funcțiilor de stabilitate în formularea metodei deplasărilor, respectiv prin considerarea matricelor de rigiditate geometrică în formularea în elemente finite și un efect global, datorat modificării configurației geometrice a nodurilor structurii, modelat în analiză prin formularea Lagrangiana adoptată (actualizată sau totală).

Neliniaritatea fizică sau materială se manifestă prin modificarea parametrilor curbei caracteristice a materialului, ca urmare a creșterii nivelului de solicitare. Pentru structurile în cadre neliniaritatea fizică se manifestă prin plastificarea locală a secțiunilor și a dezvoltării acestor zone plastice în lungul barelor, urmărind starea de eforturi existentă.

Dacă în ceea ce privește neliniaritatea geometrică există, în principal, un singur mod unitar de cuprindere a fenomenului, nu același lucru se poate afirma în cazul neliniarității fizice, în literatura de specialitate fiind propuse un număr mare de modele de analiză care să surprindă acest efect asupra răspunsului global al structurii. În termeni generali, aceste modele pot fi clasificate în funcție de complexitatea (acuratețea) analizei, în două categorii: modelul articulațiilor plastice (plastificare punctuală) respectiv modelul zonelor plastice (plastificare distribuită).

Analiza elasto-plastică, care modelează neliniaritatea fizică utilizând conceptul de articulație plastică se bazează în principal pe următoarele simplificări: (1) elementele structurii au o comportare perfect elastică, până la atingerea eforturilor ce produc plastificarea integrală a unei secțiuni (aparitia articulației plastice) de la capetele elementului; (2) secțiunile transversale ale elementelor au o comportare perfect plastică (nu se consideră reconsolidarea materialului) după apariția articulației plastice; (3) plasticizarea materialului intervine punctual doar în secțiunile de bară din jurul combinațiilor de eforturi maxime; (4) porțiunea de bară dintre articulațiile plastice rămâne cu comportare integral elastică. Formarea articulațiilor plastice de la capetele elementelor este guvernată de ecuațiile de interacțiune dintre forța axială și momentele încovoietoare corespunzătoare celor două axe principale de inerție ale secțiunii, iar efectele de ordinul al doilea sunt luate în considerare prin intermediul funcțiilor de stabilitate, pentru efectul local, și prin formularea Lagrangiana "updated Lagrangian" pentru efectul global. În cazul structurilor metalice, efectul tensiunilor reziduale asupra capacității portante a elementelor structurii este luat în considerare simplificat prin intermediul modului de elasticitate tangent. Acest model a stat la baza realizării majorității programelor de analiză statică elasto-plastică de ordinul al II-lea a structurilor metalice plane și spațiale, dintre care merită amintite cele realizate în cadrul universității Cornell din Statele Unite (McGuire, 1988; Ziemian, 1990). În general acest tip de analiză este unul aproximativ, răspunsul structurilor în domeniul elasto-plastic având o acuratețe limitată, depinzând în principal de configurația structurii și caracteristicile de încărcare. Așa cum se va putea observa și în exemplele numerice din capitolul 6 al cărții, acest tip de analiză supraestimează, rezistența și stabilitatea elementelor supuse unor solicitări de încovoiere cu efort axial, în domeniul elasto-plastic. Dezvoltarea zonelor plastice pe întreaga lungime a elementelor, care poate apărea în cazul structurilor înalte de tip cadru, cu înălțimea de nivel mică, sau în cazul elementelor supuse la încărcări axiale mari, nu poate fi surprinsă în acest model de analiză, supraestimând rezistența și stabilitatea elementelor. Cu toate acestea pentru structuri svelte la care modul de cedare apare în principal prin pierderea stabilității elastice, sau pentru structuri la care cedarea apare prin formarea unui mecanism plastic, acest model de analiză furnizează

rezultate satisfăcătoare în comparație cu cele furnizate printr-o analiză complexă care ia în considerare în mod explicit efectele dezvoltării zonelor plastice în secțiune și în lungul elementelor, asupra răspunsului structural (Foley & Vinakota, 1999).

Metodele de analiză care au la bază conceptul de articulație plastică au fost îmbunătățite prin includerea într-o formă implicită în analiză a efectelor tensiunilor reziduale, și a dezvoltării graduale a zonelor plastice în secțiune și a lungul barelor. Astfel modelul clasic al articulațiilor plastice punctuale, bazate pe o singură suprafață de interacțiune $N-M-M$, cea corespunzătoare plastificării totale a secțiunii, a fost extins la un model ce ia în considerare o dezvoltare graduală a plasticizării secțiunilor capetelor elementelor prin intermediul a două suprafețe de interacțiune $N-M-M$, cele corespunzătoare inițierii curgerii respectiv plastificării totale și aplicarea unor relații liniare sau neliniare pentru considerarea degradării rigidității elementelor (Powell & Chen, 1986; Deierlein ș.a., 1991; Abdel-Ghaffar ș.a., 1991; Al-Mashary & Chen, 1991; King ș. al., 1991; Liew & Chen, 1991; Liew ș.a., 1992; White ș.a., 1992; King & Chen, 1994; S.E.Kim, ș.a., 2000). Dezvoltarea zonelor plastice în lungul elementelor este simulată prin considerarea celor două suprafețe de interacțiune $N-M-M$ corespunzătoare inițierii curegrii respectiv plastificării totale, și prin utilizarea conceptului modulului tangent de elasticitate E_t . Principalul avantaj al acestor metode, în comparație cu cel clasic al articulațiilor plastice punctuale, rezidă în faptul, că la un același grad de discretizare a structurilor (un element pe bară, în cazul barelor încărcate doar la capete) surprind cu suficientă acuratețe rezistența și stabilitatea globală a structurilor și locală ale elementelor acestora, în domeniul elasto-plastic. Cercetările făcute în acest sens (Liew ș.a., 1992) demonstrează faptul că aceste metode pot fi aplicate la analiza structurilor în cadre de mari dimensiuni, fără riscul de a supraestima rigiditatea și stabilitatea elementelor componente ale structurii.

Metode mai rafinate de modelare a neliniarității materiale, decât cele bazate pe conceptul de articulație plastică punctuală, sunt cele în care efectul plastificării parțiale în lungul elementelor componente ale structurii este considerat prin intermediul relațiilor analitice neliniare moment încovoietor-efort axial-curbură ($M-N-\Phi$) ce caracterizează comportarea elasto-plastică a secțiunilor transversale ale elementelor solificate la încovoiere cu sau fără efort axial. În principal, există două moduri de formulare al acestor metode, ambele presupunând un calcul incremental iterativ. Dacă primul model presupune o discretizare a barelor structurii într-un număr de "segmente" și exprimarea condițiilor de compatibilitate a deformatelor și de echilibru static pe baza relațiilor analitice neliniare $M-N-\Phi$ de la capetele acestora (Wright & Gaylord, 1968; Lui & Chen, 1987), cel de-al doilea, presupune aplicarea metodei deplasărilor în formulare matriceală și generarea unor puncte de integrare în lungul barelor pentru evaluarea caracteristicilor de rigiditate în fiecare din aceste puncte, pe baza relațiilor neliniare, analitice sau cvasianalitice, $M-N-\Phi$, și aplicarea unor tehnici de integrare numerică, pentru determinarea matricelor de rigiditate ale barelor (Chu & Pabarcus, 1964; Moses, 1964; Sohal & Chen, 1988; Attalla ș.a., 1995; Bârsan & Chiorean, 1999a; Chiorean & Bârsan, 2005), (Fig. 2.1). Datorită

existenței tensiunilor reziduale în secțiunile transversale ale secțiunilor metalice, comportarea acestor secțiuni în domeniul elasto-plastic, solicitate la încovoiere cu efort axial, este diferită în cazul unor eforturi axiale de compresiune față de cele de întindere (v. cap.4), implicând utilizarea unor relații analitice neliniare $M-N-\Phi$ diferențiate. Pe de altă parte aceste metode nu pot surprinde cu maximă acuratețe efectele descărcărilor elastice ale fibrelor asupra răspunsului structurilor (Clarke, 1994). O posibilă cale de a elimina aceste dezavantaje, dar cu un efort computațional mai mare, o reprezintă metodele de analiză din cea de-a doua categorie prezentate anterior, dar în care, procesul simplificat de evaluare a caracteristicilor de rigiditate, pe baza relațiilor analitice $M-N-\Phi$, este înlocuit printr-un proces iterativ de echilibrare mai exact, în diferitele secțiuni transversale ale barelor situate în dreptul nodurilor de integrare numerică, și care presupune modelarea neliniarității fizice în puncte prin utilizarea relațiilor $\sigma-\varepsilon$ (Chiorean, 2001).

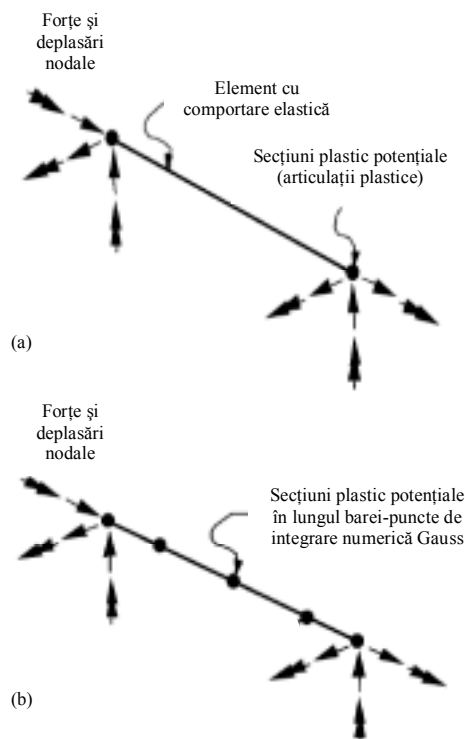


Fig. 2.1 Elemente liniare unidimensionale utilizate în analiza elasto-plastică. (a) Modelul plastificării concentrate; (b) Modelul plastificării distribuite.

Cel mai exact model care ia în considerare neliniaritatea materială, prin urmărirea în mod explicit a dezvoltării zonelor plastice în secțiune și în lungul barelor printr-un calcul incremental iterativ este considerat a fi modelul zonelor

plastice care modelează neliniaritatea fizică la nivel de fibră, pe baza relațiilor constitutive neliniare σ - ε ("plastic zone analysis"). Literatura de specialitate menționează în principal două tipuri de astfel de analize. Primul tip implică utilizarea elementelor finite tridimensionale de tip "shell" pentru discretizarea structurilor și aplicarea unui calcul incremental/incremental-iterativ, presupunând înlocuirea matricei de rigiditate elastică a elementelor finite cu o matrice de rigiditate elasto-plastică, în cazul în care s-a detectat o depășire a domeniului elastic de comportare. Considerând o stare de tensiune spațială, acest tip de analiză ia în considerare efectul combinat al deformațiilor normale și tangențiale asupra plastificării. Acest tip de analiză permite considerarea cu maximă acuratețe a efectelor dezvoltării zonelor plastice în secțiune și în lungul barelor, a tensiunilor reziduale, precum și a efectelor descărcării elastice a fibrelor, dar implică o discretizare a structurii într-un număr mare de elemente finite tridimensionale și aplicarea unor metode de integrare numerică pentru determinarea matricelor de rigiditate elasto-plastică, conducând la un efort computațional foarte ridicat.

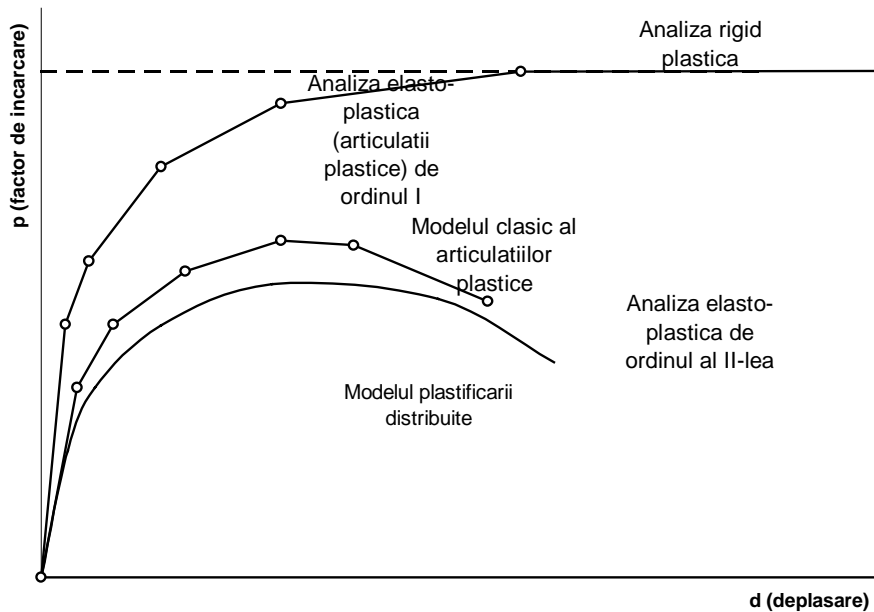


Fig. 2.2. Curbele de răspuns forță-deplasare în metodele de analiză elasto-plastică discutate.

Pentru analiza structurilor în cadre, pentru care barele pot fi tratate ca elemente liniare unidimensionale, în literatura de specialitate sunt propuse foarte multe metode de tratare a plastificării distribuite, în accepțiunea avansată a conceptului de zone de plastificare, și care presupun o modelare rafinată a structurii prin discretizarea în elemente finite de tip bară (Orbison ș al.1982; Bradford & Trahair

1984; Chan & Kitipornchai 1988; Albermani & Kitipornchai 1990; Clarke ș.al 1992, Jiang.s.al., 2002) sau "segmente" finite (Han & Chen 1983, 1987; Sugimoto & Chen 1985) și subdivizarea fiecărei secțiuni de element sau "segment" în fâșii ("fibre"), considerându-se astfel în mod direct efectele tensiunilor reziduale, a imperfecțiunilor geometrice, a efectelor de reconsolidare a materialului, precum și a descărcărilor elastice a unor fibre asupra răspunsului structural. Deși cele mai multe dintre metodele de analiză ce utilizează conceptul de zone plastice au fost concepute pentru determinarea răspunsului structurilor plane (Clarke ș.al. 1992; White, 1985; Vogel, 1985; El-Zanaty ș.al., 1980; Alvarez & Birnsteil, 1967), în literatura de specialitate, se găsesc referiri și la metode de analiză statică tridimensională a cadrelor care iau în considerare cu diferite grade de acuratețe efectul dezvoltării zonelor plastice (White, 1988; Wang, 1988; Chen & Atsuta, 1977; Pi & Trahair, 1994; Izzuddin & Smith, 1996; Jiang ș.al., 2002; Chiorean&Bârsan, 2005). Având în vedere complexitatea unora dintre aceste metode, datorată în primul rând discretizărilor foarte rafinate pe care îl presupun, aceste metode sunt utilizate cu precădere în cercetare, pentru calibrarea altor metode de analiză mai simplificate (ECCS, 1984; White & Chen, 1990).

În principiu, utilizând una din metodele de analiză elasto-plastică de ordinul al II-lea amintite, curbele de răspuns forță-deplasare pentru cazul unor acțiuni statice sunt prezentate în figura 2.2, iar în figura 2.3 se prezintă schematic caracteristicile de modelare ale neliniarității fizice în metodele discutate.

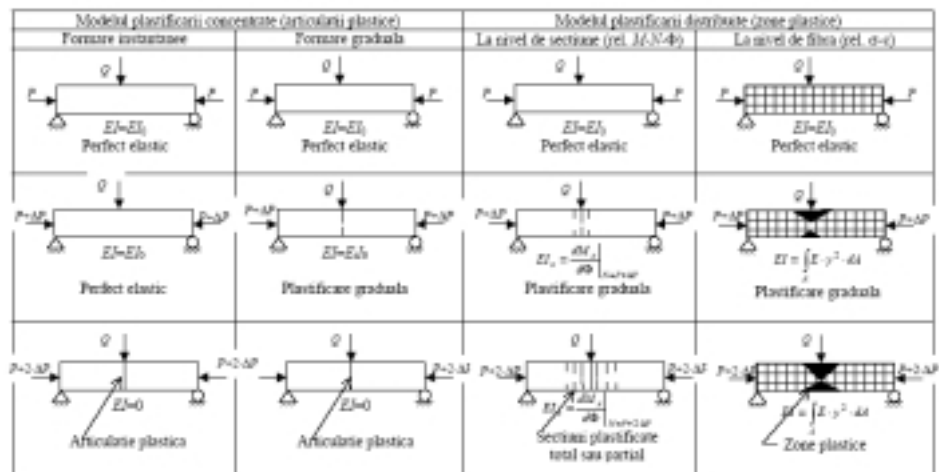


Fig. 2.3 Modele de analiză elasto-plastică a structurilor în cadre.

2.2. MODELE NUMERICE BAZATE PE CONCEPTUL DE ARTICULAȚIE PLASTICĂ

Cercetarea comportării unei structuri supuse la sarcini care cresc, în întregul

domeniu cuprins între limita stadiului elastic și stadiul de pierdere a capacității portante, prin determinarea evoluției stării de eforturi și a mărimii deplasărilor, constituie o problemă dificilă datorită complexității fenomenului real. O analiză prin calcul implică acceptarea unor simplificări; în funcție de schematizarea adoptată, rezultatele pot diferi sensibil, în funcție de natura solicitărilor exterioare, a tipului de material structural etc. Utilizarea calculului automat permite să se urmărească o modelare cât mai apropiată de comportarea reală. La structuri alcătuite din bare, ipoteza articulațiilor plastice punctuale și cu formare instantanee aduce simplificări importante: limita stadiului de comportare elastică coincide cu formarea primei articulații plastice, iar cedarea plastică devine iminentă când apare ultima articulație plastică. Între aceste două limite, evoluția comportării structurii rezultă împărțită într-o serie de etape, bine diferențiate între ele și care corespund intervalelor dintre formarea succesivă a articulațiilor plastice. Când, prin schematizare, se realizează și condiția ca sarcinile să fie aplicate numai în noduri, barele își păstrează permanent o comportare perfect elastică, deoarece articulații plastice pot apare numai în secțiunile de la extremități.

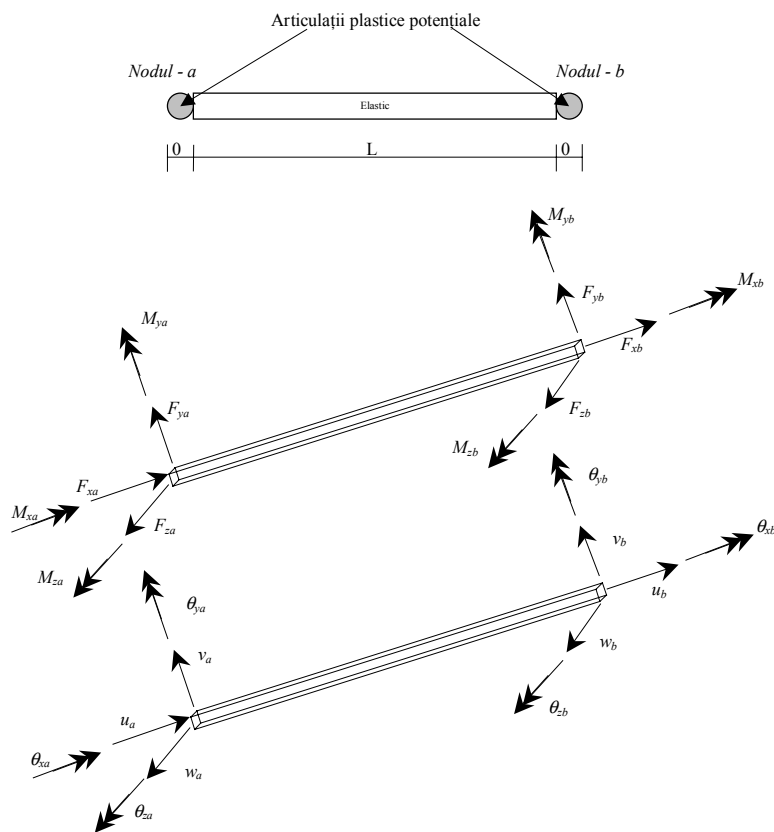


Fig. 2.4 Modelul articulațiilor plastice punctuale.

Într-un calcul de ordinul I, caracterul neliniar al corelației $P-\Delta$ provine numai din apariția treptată a unor articulații plastice în anumite secțiuni ale structurii, și deci diagrama are forma poligonală (Fig. 2.2). Considerarea efectului forțelor axiale, și modificarea configurației geometrice a structurii, printr-un calcul de ordinul al II-lea, modifică situația în sensul că și în intervalele delimitate de apariția articulațiilor plastice comportarea devine neliniară. Cât timp forțele axiale nu ating valori importante, efectul lor asupra mărimii momentelor plastice (M_p) poate fi neglijat, astfel că valorile M_p apar drept constante ale barelor structurii. Când însă, forțele axiale ajung deosebit de mari, efectul acestora trebuie introdus în condiția de plasticizare și valorile M_p devin variabile, scăzând pe măsura creșterii forțelor axiale N . Apare astfel firesc aplicarea unui calcul prin etape succesive, care constă din efectuarea repetată a rezolvării pe o structură ce se modifică de la o etapă la alta, pierzând succesiv câte o legătură; când s-a format și articulația plastică ultimă, structura ajunge static determinată. Modul de calcul indicat pentru o automatizare integrală constă în aplicarea metodei deplasărilor, introducând caracterul neliniar al comportării prin matricea de rigiditate.

Tipul de element folosit în modelarea barelor cadrelor este cel de bară standard de cadru spațial cu 12 grade de libertate (Fig. 2.4), iar formularea analitică se bazează pe metoda deplasărilor în formulare matriceală.

Comparativ cu forma generală a metodei deplasărilor, unde poziția deformată este complet definită admitând drept variabile independente toate deplasările nodurilor structurii, în domeniul elasto-plastic trebuie considerate și rotațiile relative din articulațiile plastice intrate în funcțiune. Pe parcursul creșterii sarcinilor, trecerea de la o etapă la alta este caracterizată tocmai prin intervenția unei noi asemenea necunoscute. Din acest punct de vedere, în literatura de specialitate sunt propuse diferite variante, dintre care cea mai eficientă sub aspectul automatizării calculului elasto-plastic de ordinul al II-lea o reprezintă metoda "tipurilor de bare". În această variantă se consideră aceleași necunoscute în toate etapele și anume deplasările nodurilor structurii, ca în forma generală a metodei deplasărilor, aplicată calculului liniar sau neliniar elastic. Sistemul de bază este geometric nedeterminat deoarece rămân libere rotațiile relative din articulațiile plastice formate până la etapa considerată. Acestea pot fi eliminate din calcul introducând mai multe tipuri de bare, cu matricele de rigiditate corespunzătoare, după stadiul în care se găsește bara respectivă în raport cu apariția succesivă a articulațiilor plastice (dublu încastrată, încastrat articulată, dublu articulată).

2.2.1 Modelul articulațiilor plastice cu formare instantanee

În modelul de analiză elasto-plastică a cadrelor descris în continuare se presupun următoarele ipoteze de lucru: (1) elementul de bară este cel cu 12 grade de libertate (6 grade de libertate pe nod), zonele plastice potențiale considerându-se doar la capetele elementului (Fig.2.4); (2) plastificarea materialului intervine punctual doar la capetele elementului ca urmare a unei stări de tensiuni uniaxiale provenite din acțiunea concomitentă a momentelor încovoietoare și a efortului

axial; (3) Plastificarea materialului are loc instantaneu, neglijându-se intrarea în curgere graduală a fibrelor și de asemenea efectul de reconsolidare a materialului (4) elementul are o comportare perfect elastică, până la atingerea eforturilor ce produc plastificarea integrală a unei secțiuni (aparitia articulației plastice) de la capetele elementului; (5) porțiunea de bară dintre articulațiile plastice rămâne cu comportare integral elastică; (6) conducerea analizei se face în metoda pașilor controlați de încărcări, cu creșterea incrementală a forțelor exterioare.

Formarea articulațiilor plastice de la capetele elementelor este guvernată de ecuațiile de interacțiune dintre forța axială și momentele încovoietoare corespunzătoare celor două axe principale de inerție ale secțiunii. Efectele forțelor tăietoare respectiv ale momentelor de torsiune sunt neglijate în ecuațiile de interacțiune plastice. Comportarea articulațiilor plastice este guvernată de *legea potențialului plastic* sau a *legii de normalitate* (Massonet, s.al., 1972). Formularea matematică a modelului presupune:

- Definirea unei relații între eforturi și deplasări în domeniul de comportare elastic.
- Definirea unui criteriu de plastificare corespunzător intrării în funcțiune a articulației plastice.
- Definirea unei relații între eforturi și deplasări pentru comportarea post elastică-legea de normalitate.

Relația constitutivă în domeniul elastic

În domeniul de comportare elastic creșterile deplasărilor elastice sunt legate de creșterile forțelor prin intermediul relației:

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{K} \Delta \mathbf{U} \quad (2.1)$$

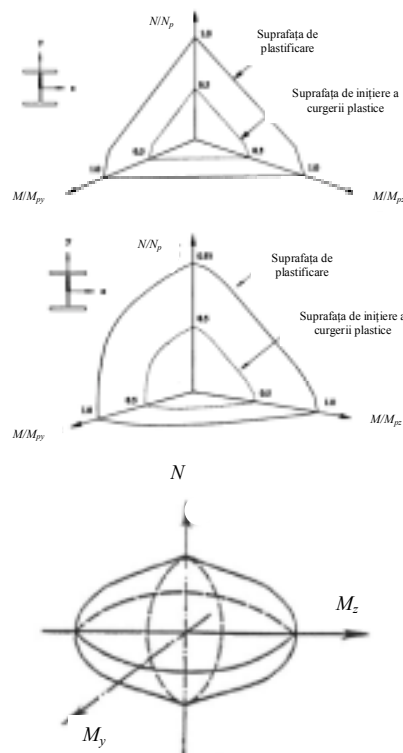
unde \mathbf{K} reprezintă matricea de rigiditate standard a elementului de bară, cea corespunzătoare comportării perfect elastice. În cazul în care se dorește luarea în considerare a efectelor neliniarității geometrice locale, matricea de rigiditate \mathbf{K} din relația (2.1) este înlocuită cu cea corectată prin intermediul funcțiilor de stabilitate. Detalii cu privire la implementarea acestui efect în calculul elasto-plastic sunt date în cadrul paragrafului 2.2.4.

Criteriul de plastificare

Formarea articulației plastice este determinată de depășirea într-un anumit punct al secțiunii a deformației unitare ultime admise, și care reprezintă condiția de plastificare asumată în calcul. Această condiție urmează a fi aplicată distribuțiilor de eforturi unitare ce corespund acțiunii concomitente a eforturilor rezultante, considerând ipoteza secțiunilor plane. Drept consecință, și între mărimile acestor eforturi trebuie să fie îndeplinită o anumită corelație, care reprezintă condiția de plastificare a secțiunii. Notând cu N , M_y , M_z eforturile din secțiune condiția de plastificare se scrie:

$$\Gamma(N, M_y, M_z) = 0 \quad (2.2)$$

care reprezintă în acest caz o suprafață, numită suprafața de interacțiune plastică. În spațiul N, M_y, M_z , o situație oarecare de solicitare a secțiunii este definită prin anumite mărimi ale eforturilor, care pot fi privite drept componentele unui vector ce pleacă din originea axelor și a cărui vârf caracterizează starea secțiunii. În cazul în care vârful vectorului se află în interiorul acestei suprafețe rezultă că secțiunea se comportă perfect elastic, în baza ipotezei articulațiilor plastice punctuale și cu formare instantanee; când vârful vectorului se află pe această suprafață condiția (2.2) este îndeplinită și deci articulația plastică este formată și începe să funcționeze. În timpul funcționării articulației plastice vectorul trebuie să-și mențină permanent vârful pe suprafața de plastificare, conducând la o corelație necesară între componente. Vârful vectorului nu poate depăși suprafața de plastificare, deoarece cazul contrar ar corespunde unei stări de eforturi ce nu se poate realiza.



AISC-LRFD (Kanchanalay 1977)-secțiune metalică (profil I)

$$\frac{N}{N_p} + \frac{8 M_y}{9 M_{py}} + \frac{8 M_z}{9 M_{pz}} - 1 = 0, \quad \frac{N}{N_p} \geq \frac{2 M_y}{9 M_{py}} + \frac{2 M_z}{9 M_{pz}}$$

$$\frac{N}{2N_p} + \frac{M_y}{M_{py}} + \frac{M_z}{M_{pz}} - 1 = 0, \quad \frac{N}{N_p} < \frac{2 M_y}{9 M_{py}} + \frac{2 M_z}{9 M_{pz}}$$

Orinison, 1982- secțiune metalică (profil I)

$$1.15n^2 + m_z^2 + m_y^4 + 3.67n^2m_z^2 + 3.0n^6m_y^2 + 4.65m_z^2m_y^2 - 1 = 0$$

$$n = \frac{N}{N_p}, \quad m_z = \frac{M_z}{M_{pz}}, \quad m_y = \frac{M_y}{M_{py}}$$

Powel-Chen, 1986

$$\sqrt{\left(\frac{M_y}{M_{py}}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{pz}}\right)^2} + \left(\frac{N}{N_p}\right)^\alpha - 1 = 0$$

Fig. 2.5 Suprafețe de plastificare utilizate în calculul secțiunilor metalice și din beton armat.

Determinarea unor relații analitice general valabile pentru definirea suprafețelor de interacțiune plastice ale secțiunilor este deosebit de dificilă. Aceasta se datorează în principal relațiilor constitutive neliniare σ - ϵ folosite la modelarea

curbelor caracteristice ale materialelor, diferite de la un material la altul, forma și dimensiunea secțiunilor, imperfecțiunilor de material, tipului de solicitare (încovoiere uniaxială, biaxială cu efort axial) etc. În literatura de specialitate pot fi găsite câteva exprimări analitice ale suprafețelor de plastificare pentru puține tipuri de secțiuni și materiale. În figura 2.5 sunt prezentate câteva dintre cele mai utilizate relații de interacțiune pentru secțiunile metalice de tip profil I și pentru secțiunile de beton armat de formă dreptunghiulară. În relațiile de mai sus s-a notat cu M_p momentul plastic (capabil) al secțiunii pe direcția considerată (y, z) și care se calculează în funcție de caracteristicile secționale de material și formă. N_p reprezintă efortul axial plastic (capabil) al secțiunii în absența celorlalte eforturi de solicitare. Relația de interacțiune plastică propusă de Powel și Chen (Powel&Chen, 1986) poate fi aplicată în mod aproximativ oricăror tipuri de secțiuni prin ajustarea corespunzătoare a sistemului de axe. Spre exemplu în cazul secțiunilor de beton armat originea sistemului de axe se translatează după axa eforturilor axiale N pentru a simula creșterea de capacitate portantă a secțiunilor solicitate la compresiune.

Legea de normalitate

Având stabilite criteriile de plastificare precum și relațiile constitutive forță-deplasare în domeniul elastic, corelația între vectorii incrementali ai forțelor și deplasărilor generalizate în domeniul plastic este stabilită sub forma legii de normalitate. Conform teoriei plasticității în comportarea elasto-plastică a materialului deformațiile specifice totale se pot separa în componentele elastice și plastice, considerate ireversibile. Analog, vectorii incrementali ai deplasărilor generalizate, pe direcțiile gradelor de libertate de la capetele barelor, pot fi considerați având două componente, una elastică și una perfect plastică:

$$\Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{U}^e + \Delta \mathbf{U}^p \quad (2.3)$$

Conform legii potențialului plastic componenta plastică a vectorului deplasărilor incrementale, $\Delta \mathbf{U}^p$, este dirijat după normala exterioară la suprafața de plastificare $\Gamma=0$. Cum această suprafață joacă pentru creșterile componentelor plastice ale deplasărilor rolul funcției potențial, pentru oricare componentă a vectorului deplasărilor incrementale plastice $\Delta \mathbf{U}^p$ se poate scrie sub forma:

$$\Delta \mathbf{U}^p = \lambda \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{f}} \quad (2.4)$$

unde λ este un coeficient de proporționalitate arbitrar, iar \mathbf{f} reprezintă vectorul forțelor nodale la nivel de element. Legea potențialului plastic poartă de asemenea numele de *legea de normalitate* deoarece, dacă se consideră componentele vectorilor \mathbf{f} și $\Delta \mathbf{U}^p$ drept coordonate într-un hiperspațiu cu 6 dimensiuni legea (2.4) arată că în punctul de eforturi \mathbf{f} vectorul $\Delta \mathbf{U}^p$ este normal la suprafața de plastificare din acel moment $\Gamma=0$:

$$\Delta \mathbf{f} \cdot \Delta \mathbf{U}^p = 0 \quad (2.5)$$

Figura (2.6) ilustrează această relație de normalitate în cazul în care există numai două eforturi diferite de zero.

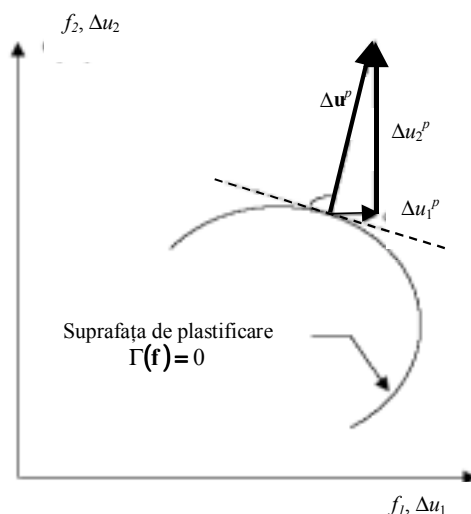


Fig. 2.6 Ilustrarea grafică a legii de normalitate în spațiul cu două dimensiuni.

2.2.1.1 Matricea de rigiditate incrementală și vectorul forțelor echivalente la noduri

În continuare vor fi determinate matricele de rigiditate tangente pentru elementul de bară de cadru spațial luând în considerare efectul de plastificare a secțiunilor de la capetele acestuia. În acest context sunt posibile patru situații: (1) plastificarea ambelor capete ale elementului; (2) plastificarea capatului "a" al barei; (3) plastificarea capatului "b" al barei; (4) ambele capete rămân în domeniul elastic. Formularea relației incrementale forța-deplasare pentru elementul de bară de cadru spațial (Fig. 2.4) se bazează pe legile fundamentale ale toriei plasticității prezentate anterior. Pentru obținerea relațiilor caracteristice, se exprimă faptul că, creșterile deplasărilor nodale au o parte elastică și o parte plastică. Notând cu ΔU vectorul deplasărilor incrementale de la ambele capete, a și b , ale barei, conform relației (2.3) acesta se descompune astfel (Fig. 2.7):

$$\begin{bmatrix} \Delta U_a \\ \Delta U_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta U_a^e \\ \Delta U_b^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta U_a^p \\ \Delta U_b^p \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

unde vectorul deplasărilor totale la capetele a și b ale barei au expresiile:

$$\Delta U_a = [u_a \quad v_a \quad w_a \quad \theta_{xa} \quad \theta_{ya} \quad \theta_{za}]^T \quad (2.7a)$$

$$\Delta U_b = [u_b \quad v_b \quad w_b \quad \theta_{xb} \quad \theta_{yb} \quad \theta_{zb}]^T \quad (2.7b)$$

iar componentele elastice respectiv plastice ale deplasărilor sunt date de următoarele expresii:

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{U}_a^e &= [u_a^e \quad v_a^e \quad w_a^e \quad \theta_{xa}^e \quad \theta_{ya}^e \quad \theta_{za}^e]^T \\
\Delta \mathbf{U}_b^e &= [u_b^e \quad v_b^e \quad w_b^e \quad \theta_{xb}^e \quad \theta_{yb}^e \quad \theta_{zb}^e]^T \\
\Delta \mathbf{U}_a^p &= [u_a^p \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \theta_{ya}^p \quad \theta_{za}^p]^T \\
\Delta \mathbf{U}_b^p &= [u_b^p \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \theta_{yb}^p \quad \theta_{zb}^p]^T
\end{aligned} \tag{2.8}$$

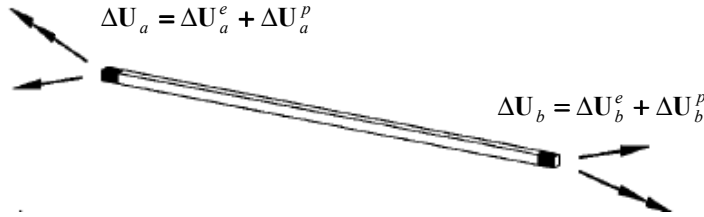


Fig. 2.7. Descopunerea vectorului deplasărilor nodale în componente elastice și plastice.

De notat faptul că, deplasările pe direcțiile gradelor de libertate de alunecare respectiv de torsiune se consideră pur elastice. Creșterile componentelor elastice ale deplasărilor sunt legate de creșterile forțelor nodale, în absența forțelor aplicate în lungul barei, prin intermediul relației:

$$\Delta \mathbf{F}_{(12 \times 1)} = \mathbf{K}_{(12 \times 12)} \Delta \mathbf{U}^e_{(12 \times 1)} \tag{2.9}$$

unde matricea de rigiditate elastică $\mathbf{K}_{(12 \times 12)}$ are următoarea expresie:

$$\mathbf{K}_{(12 \times 12)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa(6 \times 6)} & \mathbf{K}_{ab(6 \times 6)} \\ \mathbf{K}_{ba(6 \times 6)} & \mathbf{K}_{bb(6 \times 6)} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

unde

$$\mathbf{K}_{aa} = \begin{bmatrix} \frac{EA_0}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{0,z}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{0,z}}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_{0,y}}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_{0,y}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_{0,y}}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{0,y}}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_{0,z}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{0,z}}{L} \end{bmatrix} \tag{2.11a}$$

$$\mathbf{K}_{bb} = \begin{bmatrix} \frac{EA_0}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{0,z}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{0,z}}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_{0,y}}{L^3} & 0 & \frac{6EI_{0,y}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_{0,y}}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{0,y}}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_{0,z}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{0,z}}{L} \end{bmatrix} \quad (2.11b)$$

$$\mathbf{K}_{ba}^T = \mathbf{K}_{ab} = \begin{bmatrix} -\frac{EA_0}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{0,z}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{0,z}}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_{0,y}}{L^3} & 0 & \frac{6EI_{0,y}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_{0,y}}{L^2} & 0 & \frac{2EI_{0,y}}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_{0,z}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{0,z}}{L} \end{bmatrix} \quad (2.11c)$$

Integrarea efectelor neliniarității geometrice locale în matricea de rigiditate elastică poate fi făcută prin intermediul funcțiilor de stabilitate așa cum va fi arătat în cadrul paragrafului 2.2.4. Ținând seama de descompunerea (2.6) relația (2.9) se mai poate scrie:

$$\Delta \mathbf{F}_{(12 \times 1)} = \mathbf{K}_{(12 \times 12)} (\Delta \mathbf{U}_{(12 \times 1)} - \Delta \mathbf{U}^P_{(12 \times 1)}) \quad (2.13)$$

Conform legii potențialului plastic aplicată la ambele capete ale elementului, între creșterile vectoriale ale componentei plastice ale deplasărilor și cele ale forțelor nodale putem scrie:

$$\Delta \mathbf{U}^P_{(12 \times 1)} = \mathbf{G}_{(12 \times 2)} \cdot \boldsymbol{\lambda}_{(2 \times 1)} \quad (2.14)$$

unde matricea \mathbf{G} are forma:

$$\mathbf{G}_{(12 \times 2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{(6 \times 1)}^a & \mathbf{0}_{(6 \times 1)} \\ \mathbf{0}_{(6 \times 1)} & \mathbf{G}_{(6 \times 1)}^b \end{bmatrix}_{(12 \times 2)} \quad (2.15)$$

și reprezintă "*matricea gradient*" la suprafața de plastificare Γ alcătuită din matricele gradient corespunzătoare capetelor a și b ale barei:

$$\mathbf{G}_{(6 \times 1)}^a = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Gamma}{\partial F_{xa}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial M_{ya}}{\partial \Gamma} \\ \frac{\partial M_{za}}{\partial \Gamma} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}_{(6 \times 1)}^b = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Gamma}{\partial F_{xb}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial M_{yb}}{\partial \Gamma} \\ \frac{\partial M_{zb}}{\partial \Gamma} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

iar vectorul $\boldsymbol{\lambda}$ are expresia:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda^a \\ \lambda^b \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

cu componentele λ^a , λ^b mărimi scalare arbitrare asociate celor două capete ale barei. De obicei formarea și funcționarea articulațiilor plastice la cele două capete ale elementului are loc independent una față de cealaltă și prin urmare componentele matricei \mathbf{G} vor fi determinate în concordanță cu starea de eforturi existentă la formarea articulațiilor plastice de la cele două capete ale elementului. Prin urmare vom avea două situații de plastificare diferite ceea ce corespunde la două puncte distincte pe suprafața de plastificare. De asemenea, mai trebuie menționat faptul că, colonele matricei \mathbf{G} sunt activate în mod succesiv în concordanță cu ordinea de formare a articulațiilor plastice la extremitățile elementului. În concordanță cu *legea de normalitate* descrisă mai sus, componentele plastice ale vectorului deplasărilor generalizate trebuie să fie ortogonal vectorului forțelor incrementale (Fig. 2.8), adică:

$$(\Delta \mathbf{U}^p)^T \cdot \Delta \mathbf{F}_{(12 \times 1)} = 0 \quad (2.18)$$

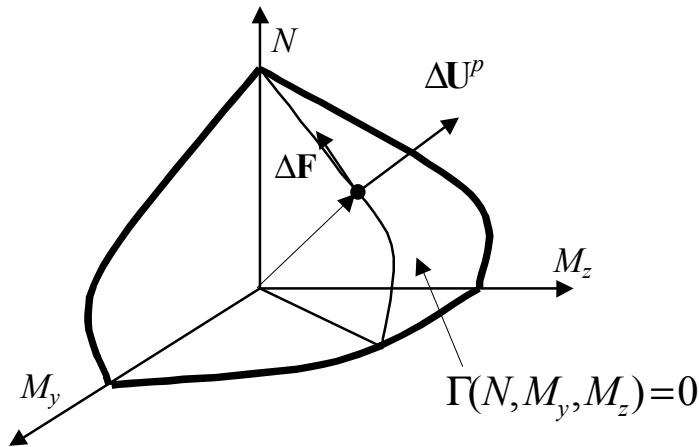


Fig. 2.8 Legea de normalitate.

Înlocuind relația (2.14) în relația (2.18) obținem:

$$\boldsymbol{\lambda}_{(1 \times 2)}^T \cdot \mathbf{G}_{(2 \times 12)}^T \cdot \Delta \mathbf{F}_{(12 \times 1)} = 0 \quad (2.19)$$

Cum însă componentele scalare ale vectorului $\boldsymbol{\lambda}$ sunt mărimi pozitive rezultă că:

$$\mathbf{G}_{(2 \times 12)}^T \cdot \Delta \mathbf{F}_{(12 \times 1)} = \mathbf{0}_{(2 \times 1)} \quad (2.20)$$

Multiplcând ambii membri ai relației (2.13) cu \mathbf{G}^T și ținând cont de identitatea (2.20) precum și de relația (2.14) obținem:

$$\mathbf{G}_{(2 \times 12)}^T \mathbf{K}_{(12 \times 12)} \Delta \mathbf{U}_{(12 \times 1)} = \mathbf{G}_{(2 \times 12)}^T \mathbf{K}_{(12 \times 12)} \mathbf{G}_{(12 \times 2)} \boldsymbol{\lambda}_{(2 \times 1)} \quad (2.21)$$

În cazul în care ambele capete ale barei sunt plastificate matricea $\mathbf{G}^T \mathbf{K} \mathbf{G}$ este nesingulară și poate fi inversată și prin urmare identitatea (2.21) are loc. În cazul în care însă, doar unul dintre capetele barei, a sau b , este plastificat conduce la singularitatea matricei $\mathbf{G}^T \mathbf{K} \mathbf{G}$ și prin urmare vor trebui determinate relații separate care să surprindă fiecare caz în parte. Din relația (2.21) se obține vectorul $\boldsymbol{\lambda}$:

$$\boldsymbol{\lambda}_{(2 \times 1)} = \left[\mathbf{G}_{(2 \times 12)}^T \mathbf{K}_{(12 \times 12)} \mathbf{G}_{(12 \times 2)} \right]^{-1} \mathbf{G}_{(2 \times 12)}^T \mathbf{K}_{(12 \times 12)} \Delta \mathbf{U}_{(12 \times 1)} \quad (2.22)$$

Ținând seama de relația (2.14) relația (2.13) se scrie:

$$\Delta \mathbf{F}_{(12 \times 1)} = \mathbf{K}_{(12 \times 12)} \Delta \mathbf{U}_{(12 \times 1)} - \mathbf{K}_{(12 \times 12)} \mathbf{G}_{(12 \times 2)} \boldsymbol{\lambda}_{(2 \times 1)} \quad (2.23)$$

și cu expresia (2.22) determinată pentru vectorul $\boldsymbol{\lambda}$ mai putem scrie:

$$\Delta \mathbf{F}_{(12 \times 1)} = \left(\mathbf{K}_{(12 \times 12)} + \mathbf{K}^r_{(12 \times 12)} \right) \Delta \mathbf{U}_{(12 \times 1)} = \mathbf{K}^{ep}_{(12 \times 12)} \Delta \mathbf{U}_{(12 \times 1)} \quad (2.24)$$

unde cu $\mathbf{K}^r_{(12 \times 12)}$ s-a notat matricea de rigiditate de reducere plastică și care integrează caracterul plastic de comportare al articulațiilor plastice formate la ambele capete ale barei:

$$\mathbf{K}^r_{(12 \times 12)} = -\mathbf{K}_{(12 \times 12)} \mathbf{G}_{(12 \times 2)} \left[\mathbf{G}_{(2 \times 12)}^T \mathbf{K}_{(12 \times 12)} \mathbf{G}_{(12 \times 2)} \right]^{-1} \mathbf{G}_{(2 \times 12)}^T \mathbf{K}_{(12 \times 12)} \quad (2.25)$$

Relația (2.24) exprimă legătura între creșterile deplasărilor și cele ale forțelor nodale în domeniul de comportare elasto-plastic, pentru cazul în care plastificarea are loc în ambele capete ale barei, iar matricea:

$$\mathbf{K}^{ep}_{(12 \times 12)} = \mathbf{K}_{(12 \times 12)} + \mathbf{K}^r_{(12 \times 12)} \quad (2.26)$$

reprezintă matricea de rigiditate tangentă a elementului de bară și care se obține prin însumarea matricei de rigiditate elastică a barei $\mathbf{K}_{(12 \times 12)}$ și a matricei de rigiditate de reducere plastică $\mathbf{K}^r_{(12 \times 12)}$. Efectele neliniarității geometrice la nivel de element vor fi integrate în matricea de rigiditate elastică. În cazul în care, capătul b al barei rămâne în domeniul elastic, articulația plastică formându-se doar la capătul a , matricea de reducere plastică se determină urmărind un raționament similar cu cel descris mai sus. Astfel, eliminând din calcul componentele plastice ale deplasărilor de la capătul b și de asemenea coloana a doua din matricea gradient \mathbf{G} și urmărind un raționament similar pornind de la relația (2.14) ajungem la următoarea expresie pentru matricea de reducere plastică:

$$\mathbf{K}^r_{(12 \times 12)} = -\frac{1}{(\mathbf{G}^a)^T_{(1 \times 6)} \cdot (\mathbf{K}_{aa})_{(6 \times 6)} \mathbf{G}^a_{(6 \times 1)}} \mathbf{K}_{(12 \times 12)} \mathbf{G}_{(12 \times 2)} \mathbf{G}^T_{(2 \times 12)} \mathbf{K}_{(12 \times 12)} \quad (2.27)$$

Similar, dacă articulația plastică se formează doar la capatul b , matricea de reducere plastică rezultă de următoarea formă:

$$\mathbf{K}^r_{(12 \times 12)} = -\frac{1}{(\mathbf{G}^b)^T_{(1 \times 6)} \cdot (\mathbf{K}_{bb})_{(6 \times 6)} \mathbf{G}^b_{(6 \times 1)}} \mathbf{K}_{(12 \times 12)} \mathbf{G}_{(12 \times 2)} \mathbf{G}^T_{(2 \times 12)} \mathbf{K}_{(12 \times 12)} \quad (2.28)$$

În relațiile (2.27) și (2.28) matricele de rigiditate elastice \mathbf{K}_{aa} respectiv \mathbf{K}_{bb} sunt date de relațiile (2.11). În cazul barelor încărcate cu forțe în lungul lor, efectul acestora va fi echivalat cu forțele nodale echivalente la nodurile elementului. Determinarea forțelor nodale echivalente corespunzătoare diferitelor cazuri de plastificare de la extremitățile barei se face urmărind un raționament similar cu cel descris mai sus, pornind de data aceasta de la următoarea relație de echilibru:

$$\Delta \mathbf{F}_{(12 \times 1)} = \mathbf{K}_{(12 \times 12)} \Delta \mathbf{U}^e_{(12 \times 1)} + \Delta \mathbf{P}^0_{(12 \times 1)} \quad (2.29)$$

unde cu $\Delta \mathbf{P}^0$ s-a notat vectorul forțelor echivalente la noduri din încărcarea cu forțele exterioare date considerând comportarea perfect elastică a barei:

$$\Delta \mathbf{P}^0 = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P}^0_a \\ \Delta \mathbf{P}^0_b \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Astfel, în prezența forțelor aplicate în cursul barelor, relația incrementală de echilibru (2.24) devine:

$$\Delta \mathbf{F}_{(12 \times 1)} = \mathbf{K}^{ep}_{(12 \times 12)} \Delta \mathbf{U}_{(12 \times 1)} + \Delta \mathbf{P}^{ep}_{(12 \times 1)} \quad (2.31)$$

unde $\mathbf{K}^{ep}_{(12 \times 12)}$ reprezintă matricea de rigiditate tangentă (incrementală) a barei a carei expresie pentru diferitele cazuri de plastificare a fost deja determinată, iar $\Delta \mathbf{P}^{ep}_{(12 \times 1)}$ reprezintă vectorul forțelor nodale echivalente corespunzător diferitelor stări de solicitare plastice de la capetele barei. Spre exemplu în cazul plastificării ambelor capete ale barei vectorul forțelor echivalente este dat de expresia:

$$\Delta \mathbf{P}^{ep}_{(12 \times 1)} = \Delta \mathbf{P}^0_{(12 \times 1)} - \mathbf{K}_{(12 \times 12)} \mathbf{G}_{(12 \times 2)} \left[\mathbf{G}^T_{(2 \times 12)} \mathbf{K}_{(12 \times 12)} \mathbf{G}_{(12 \times 2)} \right]^{-1} \mathbf{G}^T_{(2 \times 12)} \Delta \mathbf{P}^0_{(12 \times 1)} \quad (2.32)$$

Expresii similare se obțin și pentru alte situații de plastificare.

2.2.1.2 Detalii cu privire la implementarea metodei

Răspunsul elasto-plastic al structurii se obține prin aplicarea unui calcul incremental, cu control asupra pașilor de încărcare a forțelor exterioare sau control asupra deplasărilor nodale (v. cap.3). Pentru conducerea analizei se recurge la un procedeu prin pași succesivi prevăzând o liniarizare în trepte a comportării neliniare. În intervalul unei anumite trepte de încărcare comportarea trebuie să

rămâna liniară spre a permite o rezolvare prin metoda deplasărilor. Aceasta presupune că matricele de rigiditate ale barelor rămân constante, asumându-se deci că pentru o creștere $\Delta\lambda$ a încărcării vârful P al vectorului solicitărilor ce caracterizează starea secțiunii nu se deplasează pe curba de plastificare ci pe tangenta din punctul P la curbă, trecând din poziția P în poziția Q (Fig.2.9). Se realizează astfel condiția ca raportul dintre componentele plastice ale vectorului deplasărilor nodale să rămână neschimbat. Pe parcursul unui increment de încărcare, vârful vectorului solicitărilor de la un nod oarecare al structurii trebuie să rămână în interiorul sau pe suprafața de plastificare. Această condiție nu poate fi satisfăcută decât prin efectuarea unui calcul iterativ de tip predictor-corector. Pe parcursul unui increment de încărcare predicția deplasărilor și totodată a eforturilor se face cu matricea de rigiditate construită la sfârșitul etapei precedente, și păstrată constantă în timpul ciclului curent de calcul. Aceasta poate conduce la obținerea unei stări de eforturi, într-o extremitate a unui element oarecare aparținând structurii, care violează criteriul de plastificare asumat în calcul (punctul N , Fig. 2.9). Presupunând că înaintea aplicării incrementului de încărcare punctul N se află în interiorul suprafeței, în punctul M din Fig. 2.9, rezultă că formarea articulației plastice corespunde unei stări de solicitări determinate de corecția ρ a factorului de încărcare considerat (punctul P din Fig. 2.9). Pentru determinarea corecției ρ se aplică un calcul iterativ utilizându-se condiția de plastificare. Corecția ρ identifică pe suprafața de plastificare punctul P corespunzător unor stări de solicitări la nodul considerat corespunzătoare inițierii formării articulației plastice.

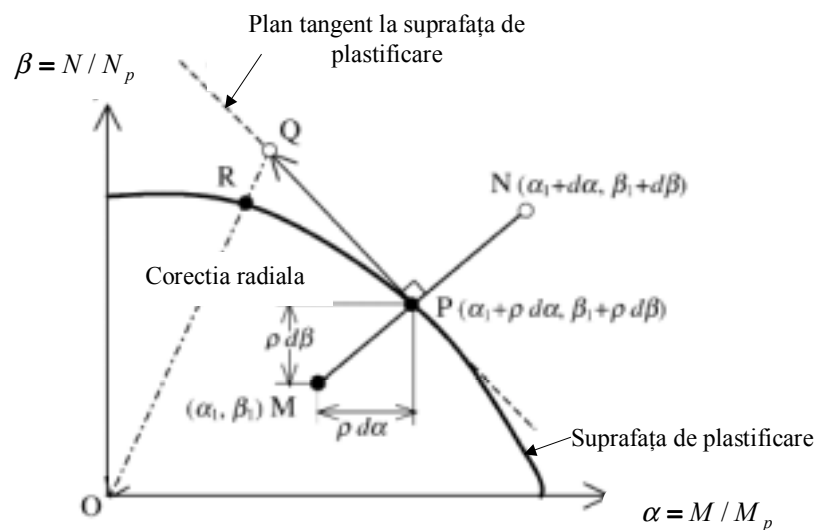


Fig. 2.9. Revenirea pe curba de plastificare. Corecția radială.

Matricea de rigiditate a elementului este recalculată prin adăugarea componentei de reducere plastică la matricea de rigiditate elastică a elementului și apoi se efectuează o nouă rezolvare a structurii determinând eforturile corespunzătoare

corecției factorului de încărcare rămas $(1-\rho)$. Deplasarea pe tangenta din poziția P în poziția Q , conduce la o îndepărtare de la condiția de plastificare deoarece punctul Q nu se află pe suprafața de interacțiune plastică asumată în calcul. În acest caz se prevede o nouă operație de revenire la sfârșitul treptei pe curba de plastificare-sub încărcare constantă- prin efectuarea unei treceri din punctul Q în punctul R , cunoscută în literatură sub denumirea de *corecția radială* (McGuire s.al., 2000). Punctul R se determină prin intersecția vectorului QO cu suprafața de plastificare (Fig. 2.9). Acest procedeu se aplică la toate extremitățile barelor unde s-au format articulații plastice determinându-se forțele reziduale la nivel de structură. Aceste forțe urmează a fi disipate printr-un calcul iterativ care se conduce la nivel de structură, pâna când valoarea acestora se încadrează sub o toleranță de calcul admisă.

2.2.2 Includerea efectului de reconsolidare în modelul articulațiilor plastice punctuale

Modelul numeric prezentat anterior și bazat pe conceptul de articulație plastică punctuală cu formare instantanee are la bază idealizarea comportării materialului ca fiind elastic-perfect plastic. Relațiile moment-curbură dezvoltate la nivel de secțiune se consideră ca fiind de asemenea idealizate, admițându-se că după plastificarea materialului pe întreaga secțiune transversală, situație în care momentul încovoietor atinge valoarea plastică, curbura crește continuu sub efort constant. De altfel justificarea unui asemenea calcul în domeniul plastic constă tocmai în existența unui asemenea palier de curgere. Cu toate acestea, majoritatea materialelor utilizate la realizarea structurilor de rezistență a construcțiilor înregistrează o creștere a deformațiilor și tensiunilor după atingerea punctului de inițiere a curgerii. Această situație se reflectă și asupra răsunsului global al secțiunii transversale; după plastificarea fibrelor extreme acestea intră în reconsolidare atrăgând după sine o creștere a eforturilor capabile odată cu creșterea deformațiilor. Mai mult, la descărcare, revenirea are loc elastic înregistrându-se deformațiile remanente, iar la reîncărcare se înregistrează o creștere a punctului limită de inițiere a curgerii în material (Fig. 2.10a). Structurile de rezistență realizate din asemenea materiale dezvoltă un comportament global similar (Fig. 2.10b).

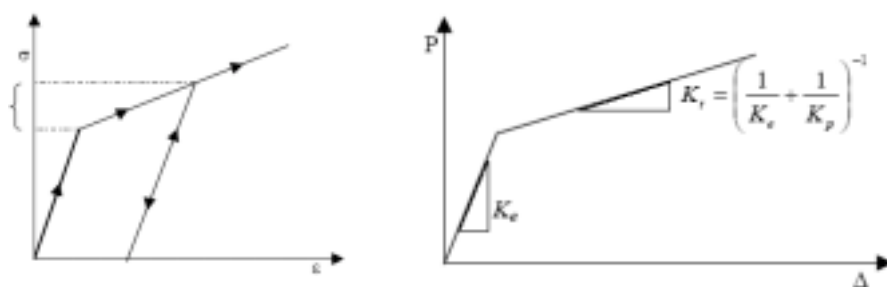


Fig. 2.10. Efectul de reconsolidare: (a) la nivel de material; (b) la nivel de element.

Pentru determinarea matricei de rigiditate incrementală (tangente) care să includă și efectul de reconsolidare se pornește de la situația în care vârful vectorului solicitărilor de la o extremitate oarecare a elementului a atins suprafața de plastificare (Fig. 2.11). Aplicând o creștere a incrementului de încărcare vârful vectorului poate depăși suprafața de plastificare ca urmare a efectului de reconsolidare. Vectorul forțelor nodale se poate descompune în două componente, o componentă tangentă la suprafața de plastificare ΔF_t și o alta după o direcție arbitrară ΔF_p (Fig.2.11).

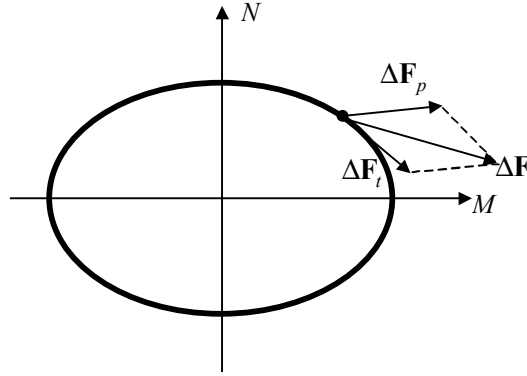


Fig.2.11. Descompunerea vectorului forțelor nodale incluzând efectul de reconsolidare.

Alegerea direcției pentru componenta ΔF_p se face din considerente empirice iar în literatura de specialitate există o serie de modele dezvoltate în acest sens care să surprindă comportamentul diferitelor materiale implicate în analiză (El-Tawil&Deierlein, 2001). Componenta ΔF_p poate fi exprimată în funcție de valoarea componentelor plastice ale deplasărilor incrementale nodale și de matricea de rigiditate plastică K_p a cărei expresie depinde de tipul de reconsolidare adoptată în calcul (El-Tawil&Deierlein, 2001):

$$\Delta F_p = K_p \Delta U^p \quad (2.33)$$

Astfel vectorul forțelor nodale din secțiunea plastificată poate fi descompus astfel:

$$\Delta F = \Delta F_t + \Delta F_p \quad (2.34)$$

Și în acest caz creșterile componentelor elastice ale deplasărilor sunt legate de creșterile forțelor nodale, prin intermediul relației:

$$\Delta F = K \Delta U^e \quad (2.35)$$

și ținând seama de descompunerea (2.3) a vectorului deplasărilor precum și de relația (2.33) obținem:

$$\Delta F_t + \Delta F_p = K(\Delta U - \Delta U^p) \quad (2.36)$$

Multiplicând ambii membri ai relației (2.36) cu matricea gradient \mathbf{G} definită de relația (2.15) rezultă:

$$\mathbf{G}\Delta\mathbf{F}_t + \mathbf{G}\Delta\mathbf{F}_p = \mathbf{G}\mathbf{K}(\Delta\mathbf{U} - \Delta\mathbf{U}^p) \quad (2.37)$$

Întrucât vectorul $\Delta\mathbf{F}_t$ este perpendicular pe normala la suprafața de plastificare ecuația (2.36) se reduce la:

$$\mathbf{G}\Delta\mathbf{F}_p = \mathbf{G}\mathbf{K}(\Delta\mathbf{U} - \Delta\mathbf{U}^p) \quad (2.38)$$

și ținând seama de relația (2.33) obținem în final:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}\mathbf{K}(\Delta\mathbf{U} - \Delta\mathbf{U}^p) - \mathbf{G}\mathbf{K}_p\Delta\mathbf{U}^p &= \mathbf{0} \\ \mathbf{G}\mathbf{K}\Delta\mathbf{U} &= \mathbf{G}(\mathbf{K} + \mathbf{K}_p)\Delta\mathbf{U}^p \end{aligned} \quad (2.39)$$

Lucrând în continuare cu relații similare cu cele dezvoltate în cadrul paragrafului 2.2.1.1 obținem în final următoare relație incrementală forță-deplasare:

$$\Delta\mathbf{F} = \left[\mathbf{K} - \mathbf{K}\mathbf{G}(\mathbf{G}^T(\mathbf{K} + \mathbf{K}_p)\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{K} \right] \Delta\mathbf{U} \quad (2.40)$$

și prin urmare matricea de reducere plastică în acest caz are forma:

$$\mathbf{K}^r = -\mathbf{K}\mathbf{G}(\mathbf{G}^T(\mathbf{K} + \mathbf{K}_p)\mathbf{G})^{-1}\mathbf{G}^T\mathbf{K} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{K}^{ep} = \mathbf{K} + \mathbf{K}^r$$

După cum se poate observa din relația ce definește matricea de rigiditate tangentă a elementului de bară care include efectul de reconsolidare, singura diferență față de expresia dedusă pentru modelul cu formare instantanee constă în includerea matricei de rigiditate plastică \mathbf{K}_p și a cărei expresie depinde de tipul de reconsolidare luat în calcul. În principal, modelele de reconsolidare pot fi clasificate în două categorii: *modelul izotrop*, respectiv *modelul cinematic*. Ilustrarea grafică a celor două modele în spațiul cu două dimensiuni N - M (efort axial-moment încovoietor) este dată în figura 2.12.

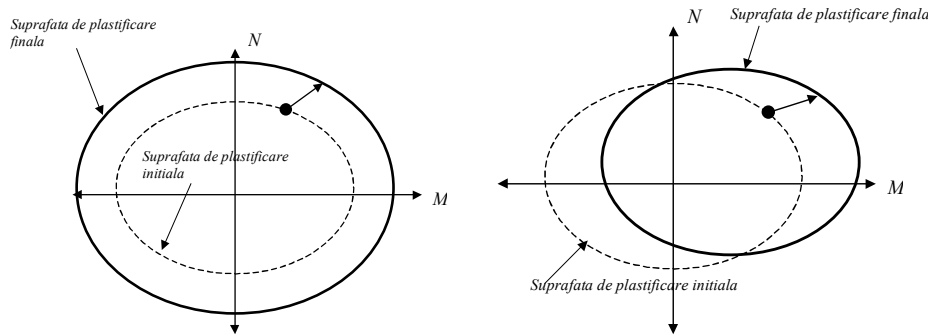


Fig. 2.12 Modele de reconsolidare. (a) Modelul izotrop; (b) Modelul cinematic.

Modelul izotrop de reconsolidare corespunde situației în care suprafața de plastificare se dilată în spațiu păstrându-și însă forma și poziția (Fig. 2.12a), în timp ce modelul de reconsolidare cinematic corespunde unei situații în care suprafața de plastificare se translatează în direcția creșterii tensiunilor incrementale păstrându-și

însă forma și dimensiunile originale (Fig. 2.12b). În cazul unui model de reconsolidare de tip izotropic valoarea tensiunilor de curgere la compresiune vor crește odată cu creșterea tensiunilor de întindere, astfel că relația moment-curbură poate fi reprezentată grafic ca în figura 2.13a. Acest model descrie acceptabil comportarea materialelor la solicitări monotone. Spre deosebire de modelul izotrop, în cel cinematic, ca urmare a intrării în curgere a materialului ca urmare a unei stări de tensiune de întindere va atrage după sine translatarea suprafeței de plastificare în direcția de întindere și ca urmare materialul va atinge mai repede limita de curgere când este supus unor acțiuni de compresiune (Fig.2.13b). Acest model reflectă mult mai fidel comportarea materialelor la acțiuni ciclice.

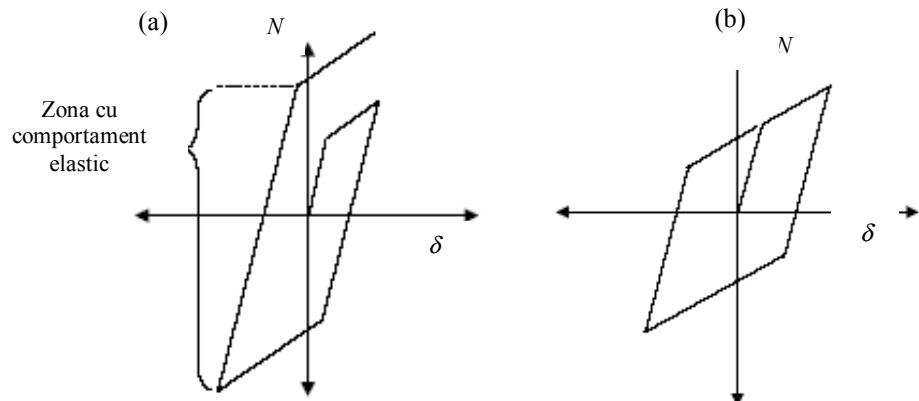


Fig. 2.13 Relația moment-curbură asociată modelelor de reconsolidare (a) izotrop și (b) cinematic

Modele mai complexe utilizate la determinarea răspunsului structural în domeniul elasto-plastic sunt dezvoltate în literatura de specialitate. Câteva dintre acestea au la bază modele hibride de considerare a reconsolidării neliniare a materialului și totodată a degradării rigidității elementelor ca urmare a incursiunilor în domeniul plastic.

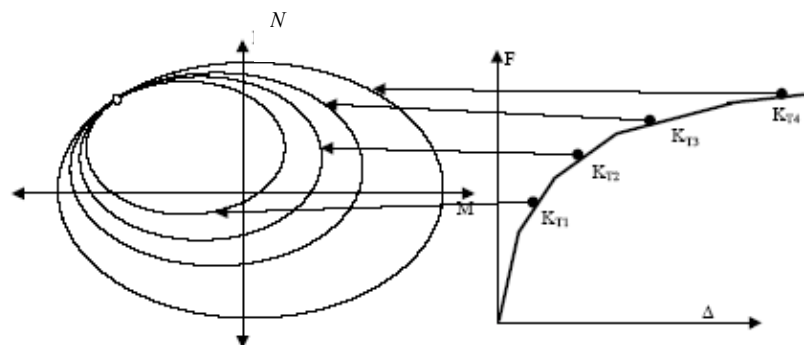


Fig. 2.14. Modelul suprafețelor de plastificare imbricate.

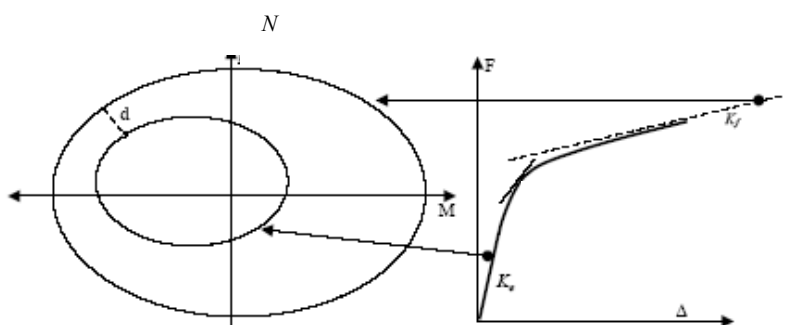


Fig. 2.15. Modelul suprafeței de plastificare cu limitare.

Două dintre aceste modele, des utilizate la modelarea comportării elasto-plastice a structurilor sub solicitări monotone sunt prezentate în figurile 2.14 și 2.15. Modelul suprafețelor de plastificare imbricate (Fig. 2.14) capabil să surprindă reconsolidarea multi-liniară, fiecare suprafață de plastificare activează valori diferite ale reconsolidării și totodată rigidități tangente diferite. Modelul suprafeței de plastificare mărginit capabil să surprindă comportarea de reconsolidare neliniară a materailului prin interpolarea rigidității tangente între rigiditatea inițială și finală asociată suprafeței plastice de margine (limită) (Fig.2.15).

2.2.3 Modelul articulațiilor plastice cu formare graduală

Așa după cum s-a demonstrat de către multi cercetatori (McGuire, 1991; King și al., 1992; White și al. 1993) și după cum se poate observa și în cadrul exemplelor numerice din capitolul 6 al acestei cărți, o modelare a neliniarității fizice folosind conceptul de articulație plastică punctuală și instantanee conduce la rezultate sensibil diferite față de o modelare mai apropiată de realitate care consideră efectul dezvoltării graduale a zonelor plastice în secțiune și în lungul barelor. Astfel, pentru structurile metalice, principalele modificări care sunt aduse acestor metode, în cadrul metodelor articulațiilor plastice cu formare graduală, constau în considerarea, aproximativă, a dezvoltării zonelor plastice în lungul barelor datorate tensiunilor reziduale și de asemenea considerarea formării graduale a articulațiilor plastice la extremitățile barelor (Liew și al., 1992; White și al., 1992; King & Chen, 1994; S.E. Kim și al., 2000). Pentru structurile în cadre din beton armat pot fi dezvoltate metode similare, dar datorită multitudinii de factori care concură la răspunsul elasto-plastic al elementelor din beton armat, literatura de specialitate semnalează doar puține încercări în această direcție. Determinarea matricelor de rigiditate care să țină seama de efectul dezvoltării graduale a zonelor plastice în secțiune și în lungul barelor, precum și de efectul descărcării elastice a unor fibre, reprezintă principalul obiectiv al metodelor articulațiilor plastice cu formare graduală aplicate structurilor în cadre metalice. (Liew și al., 1992; King și al., 1994;

S.E. Kim, 2000). Câteva dintre aceste propuneri preluate din literatura de specialitate sunt prezentate în continuare. Descrierea metodelor este făcută pentru elementul de bară de cadru plan, extinderea procedeeelor fiind imediată la cazul structurilor spațiale.

2.2.3.1 Considerarea distribuției zonelor plastice în lungul barelor

Prin schematizarea admisă, în care se consideră că barele cuprinse între articulațiile plastice formate au comportare elastică, se introduce un spor de rigiditate în raport cu situația reală. O metodă aproximativă de considerare a distribuției zonelor plastice în lungul barelor supuse la forțe axiale de compresiune mari, ca efect al tensiunilor reziduale existente în secțiunile transversale ale barelor, o constituie folosirea modului de elasticitate tangent E_t în locul modului de elasticitate longitudinal inițial E , la determinarea caracteristicilor de rigiditate ale secțiunilor. Astfel caracteristicile de rigiditate ale secțiunilor barelor supuse la compresiune sunt definite astfel: $E_t I$, pentru rigiditatea la încovoiere, respectiv $E_t A$ pentru rigiditatea axială. Modulul de elasticitate tangent E_t poate fi determinat pornind de la relațiile ce stabilesc valorile încărcărilor critice N_{cr} folosite la proiectarea elementelor metalice, înglobindu-se astfel, implicit, și efectul imperfecțiunilor geometrice și mecanice și, constituie o caracteristică variabilă a barei, în funcție de valoarea efortului axial din bară. Astfel în cazul elementelor metalice supuse la compresiune pură, codul american AISC-LRFD prevede următoarele formule pentru evaluarea încărcării critice:

$$N_{cr} = N_p \cdot 0,658^{\lambda_c^2}, \quad \lambda_c \leq 1,5 \quad (2.42)$$

$$N_{cr} = N_p \cdot \frac{0,877}{\lambda_c^2}, \quad \lambda_c > 1,5 \quad (2.43)$$

unde N_p reprezintă efortul axial plastic ($N_p = A \cdot \sigma_c$), iar λ_c reprezintă coeficientul de sveltete transformat definit de $\lambda_c = (K \cdot L / \pi \cdot r) \cdot \sqrt{\sigma_c / E}$, σ_c reprezintă tensiunea specifică corespunzătoare curgerii materialului, E este modulul de elasticitate, iar KL/r este coeficientul de sveltete efectiv al barei. Conform prevederilor codului AISC-LRFD modulul de elasticitate tangent reprezintă produsul dintre modulul de elasticitate longitudinal E și raportul dintre încărcarea critică corespunzătoare pierderii stabilității în domeniul plastic, $N_{cr \text{ plastic}}$, și cea corespunzătoare pierderii stabilității în domeniul elastic, $N_{cr \text{ elastic}}$:

$$\frac{E_t}{E} \approx \frac{N_{cr \text{ plastic}}}{N_{cr \text{ elastic}}} = \frac{0,658^{\lambda_c^2}}{0,877/\lambda_c^2} \leq 1,0 \quad (2.44)$$

Exprimând coeficientul de sveltete transformat λ_c în funcție de raportul N/N_p din ecuația (2.43) și înlocuindu-l în ecuația (2.44), rezultă următoarea expresie pentru modulul de elasticitate tangent E_t :

$$\begin{aligned}
E_t &= E, \quad N \leq 0,39 \cdot N_p \\
E_t &= -2,7243 \cdot \frac{N}{N_p} \cdot \ln \left[\frac{N}{N_p} \right], \quad N > 0,39 \cdot N_p
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Întrucit modulul de elasticitate tangent E_t s-a determinat plecând de la relațiile de determinare a încărcării critice prevăzute de AISC-LRFD și care iau în considerare în mod implicit efectele tensiunilor reziduale și ale imperfecțiunilor geometrice locale, relațiile (2.45) includ de asemenea aceste imperfecțiuni în evaluarea modulului de elasticitate tangent (Liew 1992).

Relațiile efort axial-deplasare axială pentru un element de lungime L , ținând seama de reducerea rigidității barei ca urmare a corectării (reducerii) modulului de elasticitate E , pot fi determinate, pe baza următoarelor relații:

$$u = \frac{N \cdot L}{E \cdot A}, \quad N \leq 0,39 \cdot N_p \tag{2.46. a}$$

$$u = \frac{0,39 \cdot N_p \cdot L}{E \cdot A} + \int_{0,39 \cdot N_p}^N \frac{L}{A \cdot E_t} \cdot dN, \quad N > 0,39 \cdot N_p \tag{2.46. b}$$

Prin introducerea relațiilor (2.45), ce determină modulul de elasticitate tangent E_t corespunzător unui efort axial N , în relațiile (2.46) și efectuarea integralei rezultă următoarele relații neliniare forță axială-deformație axială:

$$\frac{N}{N_p} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}, \quad N \leq 0,39 \cdot N_p \tag{2.47. a}$$

$$\frac{N}{N_p} = \exp \left\{ -0,9416 \cdot \exp \left[2,7243 \cdot \left(0,39 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p} \right) \right] \right\}, \quad N > 0,39 \cdot N_p \tag{2.47. b}$$

unde $\varepsilon/\varepsilon_p = E \cdot u / (\sigma_c \cdot L)$ reprezintă deformația axială normalizată totală din element.

Un alt mod de a determina modulul de elasticitate tangent E_t este cel propus de Chen și Lui (Chen & Lui, 1992), și care utilizează relațiile date de Column Research Council (CRC) pentru evaluarea încărcării critice a barelor supuse la compresiune axială (Galambos, 1988):

$$N_{cr} = N_p \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \lambda_c^2 \right), \quad \lambda_c \leq \sqrt{2} \tag{2.48. a}$$

$$N_{cr} = \frac{N_p}{\lambda_c^2}, \quad \lambda_c > \sqrt{2} \tag{2.48. b}$$

unde cu λ_c s-a notat coeficientul de sveltețe transformat. Încărcarea critică în domeniul plastic este determinată de relația (2.48.a) care include implicit efectul tensiunilor reziduale, considerând valoarea maximă a tensiunii reziduale de compresiune $\sigma_{cr} = 0,5\sigma_c$, în cazul secțiunilor de tip I, față de $\sigma_{cr} = 0,3\sigma_c$ prevăzută în codul american AISC-LRFD.

Modulul de elasticitate tangent al barei, este determinat în mod similar cu procedeul descris mai sus, astfel:

$$\frac{E_t}{E} \approx \frac{N_{cr \text{ plastic}}}{N_{cr \text{ elastic}}} = \frac{1 - \frac{\lambda_c^2}{4}}{\frac{1}{\lambda_c^2}} \leq 1,0 \quad (2.49)$$

rezultând următoarele relații pentru modulul de elasticitate tangent:

$$\frac{E_t}{E} = 1,0 \quad N \leq 0,5 \cdot N_p \quad (2.50. a)$$

$$\frac{E_t}{E} = \frac{4 \cdot N}{N_p} \cdot \left(1 - \frac{N}{N_p} \right), \quad N > 0,5 \cdot N_p \quad (2.50. b)$$

Deplasarea axială a barei acționată de forța axială de compresiune N , considerând corecția modulului de elasticitate tangent E_t este determinată de următoarele relații:

$$u = \frac{N \cdot L}{E \cdot A}, \quad N \leq 0,5 \cdot N_p \quad (2.51. a)$$

$$u = \frac{0,5 \cdot N_p \cdot L}{E \cdot A} + \int_{0,5 \cdot N_p}^N \frac{L}{A \cdot E_t} \cdot dN, \quad N > 0,5 \cdot N_p \quad (2.51. b)$$

Prin substituirea relațiilor (2.50) de determinare a modulului de elasticitate tangent E_t în relațiile de determinare a deplasării axiale (2.51) și efectuarea integralei rezultă relațiile neliniare efort axial-deformație axială:

$$\frac{N}{N_p} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_p}, \quad N \leq 0,5 \cdot N_p \quad (2.52. a)$$

$$\frac{N}{N_p} = \frac{1}{1 + \exp\left(2 - \frac{4 \cdot \varepsilon}{\varepsilon_p}\right)}, \quad N > 0,5 \cdot N_p \quad (2.52. b)$$

unde $\varepsilon/\varepsilon_p = E \cdot u/(\sigma_c \cdot L)$ reprezintă deformația axială normalizată totală din element. În figura 2.16. sunt prezentate curbele comparative ale variației modulului de elasticitate tangent deduse pe baza relațiilor (2.45) și (2.50), iar în figura 2.16 sunt prezentate relațiile forță axială-deformație axială determinate de relațiile (2.46) respectiv (2.51). Principala diferență dintre cele două metode prezentate, consta în faptul că prima metoda (LRFD- E_t) include implicit atât efectul tensiunilor reziduale cât și efectul imperfecțiunilor geometrice locale la modelarea rigidității efective a barelor, în timp ce a doua metodă (CRC- E_t) consideră implicit doar efectul tensiunilor reziduale.

2.2.3.2 Considerarea plastificării graduale a secțiunilor transversale

În cazul elementelor supuse la eforturi de încovoiere importante, modelarea rigidității elementelor utilizând doar conceptul de modul de elasticitate tangent nu

este suficientă pentru reprezentarea degradării graduale a rigidității elementelor ca urmare a plastificării secțiunilor din lungul elementului (Liew s.al., 1992; White ș.al., 1992). Efectele plastificării distribuite suplimentare din elemente pot fi atribuite în principal acțiunii momentelor încovoietoare. Aceste efecte pot fi reprezentate prin modificarea modelului articulațiilor plastice clasice astfel încât să se asigure o degradare graduală a rigidității la încovoiere a secțiunilor, surprinzându-se diferitele situații de plastificare parțială a secțiunilor până la plastificarea totală și formarea articulațiilor plastice. În literatura de specialitate sunt propuse diferite modele de considerare a plastificării graduale și implicit de reducere a rigidității la încovoiere a secțiunilor, considerând două suprafețe de interacțiune N - M , corespunzătoare inițierii curgerii respectiv plastificării integrale a secțiunilor și adoptarea unor relații liniare (White s. al., 1992), parabolice (Liew ș.al., 1992) sau neliniare deduse pe baza relațiilor M - N - Φ (King & Chen, 1994) pentru considerarea degradării rigidității secțiunilor la încovoiere. În articulațiile plastice formate, ca urmare a plastificării integrale a secțiunilor, acționează momentele plastice corectate ținând seama de efectul forței axiale, M_{pc} , care reprezintă încărcări aplicate asupra barelor, spre deosebire de sarcinile date care se aplică direct în noduri. Este necesar ca încărcarea dată de momentele M_{pc} să fie înlocuită prin componentele aplicate în noduri, urmând procedeul general de reducere la noduri, a încărcărilor din cuprinsul barelor. Pentru aceasta, trebuie determinate în prealabil eforturile de încastrare perfectă corespunzătoare. Se ține astfel seama de efectul forțelor axiale asupra momentelor plastice ale secțiunilor, și de asemenea se realizează corelația corectă între eforturi prin respectarea condiției de plastificare. În continuare se prezintă modul de obținere a matricelor de rigiditate ale elementelor de tip bară cadru plan, prin intermediul cărora se ține seama de efectul reducerii graduale a rigidității la încovoiere, corespunzător modelului liniar respectiv parabolic.

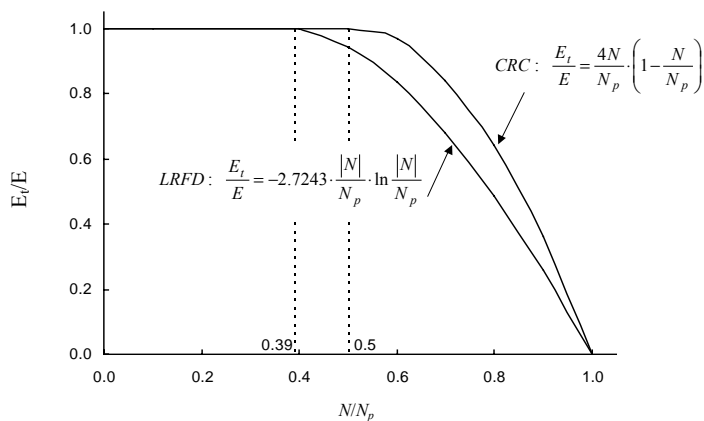


Fig. 2.16. Variația modului de elasticitate tangent în funcție de valoarea forței axiale N .

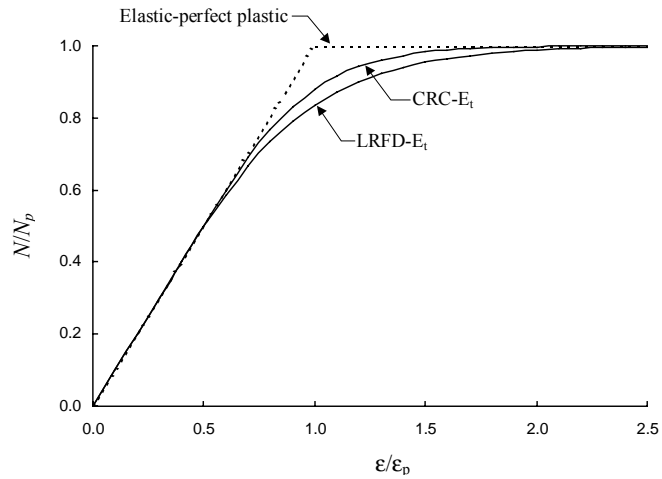


Fig. 2.17. Variația deformației axiale în raport cu forța axială

2.2.3.2.1 Modelul liniar (King s.al., 1992)

Pentru elementul de bară din figura 2.18, relațiile incrementale elastice de echilibru, utilizând deformațiile elementului, pot fi scrise astfel (King s.al., 1992):

$$\begin{pmatrix} \delta M_i \\ \delta M_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta \theta_i \\ \delta \theta_j \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

în care coeficienții matricei de rigiditate din ecuația de mai sus sunt (Goto & Chen 1987):

$$K_{ii} = K_{jj} = \frac{4EI}{L} + \frac{2NL}{15} + \frac{44N^2 L^3}{25000EI} \quad (2.54)$$

$$K_{ij} = K_{ji} = \frac{2EI}{L} - \frac{PL}{30} - \frac{26P^2 L^3}{25000EI}$$

și reprezintă primii trei termeni din dezvoltarea în serie Taylor a funcțiilor de stabilitate elastică.

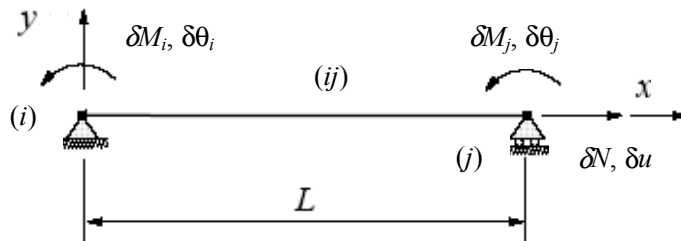


Fig. 2.18. Elementul de bară plan în sistemul coordonatelor de bază.

În relațiile (2.54) efortul axial N este luat cu semnul minus în cazul compresiunii. În cazul formării unei articulații plastice la nodul "i" al barei "ij" relațiile ce definesc valorile momentelor încovoietoare incrementale la capetele barei sunt:

$$\delta M_i = K_{ii} \cdot \delta \theta_i + K_{ij} \cdot \delta \theta_j = 0 \quad (2.55 a)$$

deoarece se consideră ca în nodul "i" se formează o articulație obișnuită, și prin urmare creșterea de moment încovoietor este zero, și

$$\delta M_j = K_{ji} \cdot \delta \theta_i + K_{jj} \cdot \delta \theta_j \quad (2.55 b)$$

Determinând pe $\delta \theta_i$ din ecuația (2.55 a) și înlocuindu-l în ecuația (2.55 b) rezultă:

$$\delta M_j = \left(K_{jj} - K_{ji} \cdot \frac{K_{ij}}{K_{ii}} \right) \cdot \delta \theta_j \quad (2.56)$$

astfel încât relația incrementală de echilibru a elementului devine:

$$\begin{pmatrix} \delta M_i \\ \delta M_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K'_{jj} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta \theta_i \\ \delta \theta_j \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

unde:

$$K'_{jj} = K_{jj} - K_{ji} \cdot \frac{K_{ij}}{K_{ii}} \quad (2.58)$$

Pentru reprezentarea graduală a plastificării secțiunii corespunzătoare unui anumit stadiu intermediar de pătrundere a plastificării în secțiune, pornind de la stadiul perfect elastic și ajungând la stadiul limită corespunzător plastificării integrale a secțiunii, matricea de rigiditate a elementului, utilizând deformațiile acestuia, se poate scrie:

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} (K_{ii} - K_{ii} \cdot \rho_i) & (K_{ij} - K_{ij} \cdot \rho_i) \\ (K_{ji} - K_{ji} \cdot \rho_i) & \left(K_{jj} - K_{ji} \cdot \frac{K_{ij}}{K_{ii}} \cdot \rho_i \right) \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

unde cu ρ_i s-a notat parametrul scalar corespunzător unui anumit stadiu intermediar de plastificare a secțiunii "i", și care poate lua valori între zero (perfect elastic, $M_i < M_c$) și unu (perfect plastic, $M_i = M_{pc}$). În metoda propusă (King ș.al., 1992), valoarea intermediară a parametrului ρ_i , corespunzătoare unui anumit stadiu de plastificare a secțiunii ($M_c \leq M_i \leq M_{pc}$), este definită pe baza următoarei relații liniare, astfel:

$$0 \leq \rho_i = \frac{M_i - M_c}{M_{pc} - M_c} \leq 1 \quad (2.60)$$

în care M_i este momentul încovoietor din nodul "i"; M_c reprezintă momentul încovoietor corespunzător inițierii curgerii în secțiune, iar M_{pc} reprezintă momentul încovoietor plastic corectat al secțiunii. Atât momentul încovoietor corespunzător curgerii, M_c , cât și cel corespunzător plastificării integrale a secțiunii, M_{pc} , pot fi determinate pe baza relațiilor de interacțiune $N-M$ corespunzătoare acestor stadii (King ș. al., 1992), fig. 2.19.

Pentru cazul general de comportare în domeniul elasto-plastic, în care articulațiile plastice se pot forma la ambele capete ale elementului, relațiile incrementale de echilibru se pot scrie sub următoarea formă matriceală:

$$\begin{pmatrix} \delta M_i \\ \delta M_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K'_{ii} & K'_{ij} \\ K'_{ji} & K'_{jj} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta \theta_i \\ \delta \theta_j \end{pmatrix} \quad (2.61)$$

unde:

$$\begin{aligned} K'_{ii} &= \left(K_{ii} - K_{ij} \cdot \frac{K_{ji}}{K_{jj}} \cdot \rho_j \right) \cdot (1 - \rho_i) \\ K'_{ij} &= K'_{ji} = K_{ij} \cdot (1 - \rho_i) \cdot (1 - \rho_j) \\ K'_{jj} &= \left(K_{jj} - K_{ji} \cdot \frac{K_{ij}}{K_{ii}} \cdot \rho_i \right) \cdot (1 - \rho_i) \end{aligned} \quad (2.62)$$

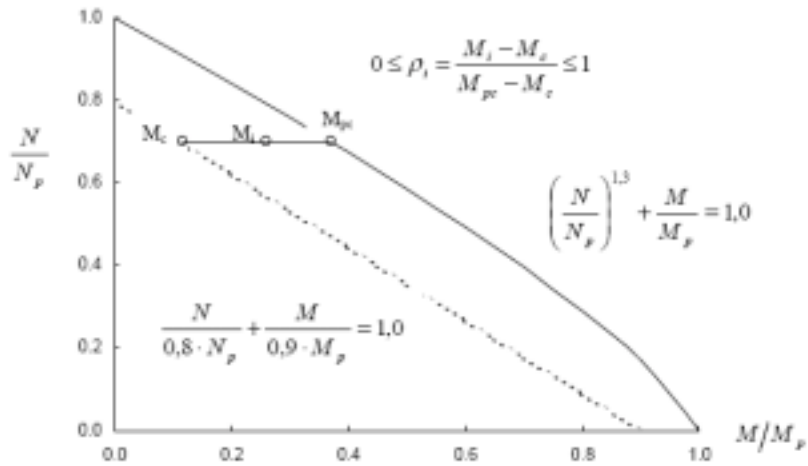


Fig. 2.19. Plastificarea graduală a secțiunilor. Modelul liniar.

Relațiile (2.62) introduc efectul plasticității graduale și totale la ambele capete ale elementului. Spre exemplu:

- În cazul în care $\rho_i = \rho_j = 0$, ambele capete ale elementului se află în domeniul elastic, astfel, ecuația (2.61) se reduce la ecuația (2.53) în care coeficienții de rigiditate sunt definiți de relațiile (2.54).
- În cazul în care $\rho_i = 1$ și $\rho_j = 0$ se consideră formarea articulației plastice la capătul "i" al elementului, în timp ce capătul "j" se află încă în domeniul elastic, relația (2.61) se reduce în acest caz la relația dată de ecuația (2.57).

- În cazul în care $\rho_i = 0$ și $\rho_j = 1$ se consideră formarea articulației plastice la capătul "j" al elementului, în timp ce capătul "i" se află încă în domeniul elastic, relația (2.61) se reduce în acest caz la o ecuație similară cu cea dată de relația (2.57). În cazul în care $\rho_i = 1$ și $\rho_j = 1$ se consideră ca la ambele capete ale elementului s-au format articulații plastice, matricea de rigiditate din relația (2.61) devine în acest caz:

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

- În cazul în care $0 < \rho_i < 1$ și $0 < \rho_j < 1$ se consideră plastificarea parțială la ambele capete ale elementelor, corespunzătoare unui stadiu intermediar de pătrundere a plastificării în secțiune.

2.2.3.2.2 Modelul parabolic (Liew s.al., 1992)

Pentru reprezentarea graduală a plastificării secțiunii de la capătul "i" al barei "ij" (fig.2.18), corespunzătoare unui anumit stadiu intermediar de pătrundere a plastificării în secțiune, pornind de la stadiul perfect elastic și ajungând la stadiul limită corespunzător plastificării integrale a secțiunii, se pot scrie următoarele relații incrementale de echilibru (Liew s.al., 1992):

$$\begin{pmatrix} \delta M_i \\ \delta M_j \\ \delta N \end{pmatrix} = \frac{E_t \cdot I}{L} \cdot \begin{bmatrix} \phi_i \cdot S_1 & \phi_i \cdot S_2 & 0 \\ \phi_i \cdot S_2 & \left[S_1 - \frac{S_2^2}{S_1} \cdot (1 - \phi_i) \right] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta \theta_i \\ \delta \theta_j \\ \delta u \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

În relația de mai sus S_1 și S_2 reprezintă funcțiile de stabilitate convenționale, corespunzătoare elementului de bară cadru plan acționat de forța axială N de compresiune și de momentele încovoietoare la capetele "i" respectiv "j" ale elementului, (fig. 2.18), dar în care modulul de elasticitate longitudinal este înlocuit cu modulul de elasticitate tangent E_t și care introduc efectul local P - δ al neliniarității geometrice locale:

$$S_1 = \begin{cases} \frac{\pi \cdot \sqrt{\rho} \cdot \sin(\pi \cdot \sqrt{\rho}) - \pi^2 \cdot \rho \cdot \cos(\pi \cdot \sqrt{\rho})}{2 - 2 \cdot \cos(\pi \cdot \sqrt{\rho}) - \pi \cdot \sqrt{\rho} \cdot \sin(\pi \cdot \sqrt{\rho})}, & N < 0 \\ \frac{\pi^2 \cdot \rho \cdot \cosh(\pi \cdot \sqrt{\rho}) - \pi \cdot \sqrt{\rho} \cdot \sinh(\pi \cdot \sqrt{\rho})}{2 - 2 \cdot \cosh(\pi \cdot \sqrt{\rho}) + \pi \cdot \sqrt{\rho} \cdot \sinh(\pi \cdot \sqrt{\rho})}, & N > 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

$$S_2 = \begin{cases} \frac{\pi^2 \cdot \rho - \pi \cdot \sqrt{\rho} \cdot \sin(\pi \cdot \sqrt{\rho})}{2 - 2 \cdot \cos(\pi \cdot \sqrt{\rho}) - \pi \cdot \sqrt{\rho} \cdot \sin(\pi \cdot \sqrt{\rho})}, & N < 0 \\ \frac{\pi \cdot \sqrt{\rho} \cdot \sinh(\pi \cdot \sqrt{\rho}) - \pi^2 \cdot \rho}{2 - 2 \cdot \cosh(\pi \cdot \sqrt{\rho}) + \pi \cdot \sqrt{\rho} \cdot \sinh(\pi \cdot \sqrt{\rho})}, & N > 0 \end{cases} \quad (2.66)$$

unde $\rho = \frac{N \cdot L^2}{\pi^2 \cdot E_t \cdot I}$ reprezintă coeficientul de compresiune elasto-plastic al barei,

iar efortul axial N este luat cu semnul negativ în relațiile (2.65) și (2.66), în cazul compresiunii. În relația (2.64) cu ϕ_i s-a notat parametrul scalar corespunzător unui anumit stadiu intermediar de plastificare al secțiunii "i", corespunzător unui moment încovoietor total M_i , și care poate lua valori între zero (plastificare totală, $M_i = M_{pc}$) și unu (perfect elastic, $M_i \leq M_c$). În metoda propusă (Liew s. al., 1992), valoarea intermediară a parametrului ϕ , corespunzătoare unui anumit stadiu de plastificare a secțiunii ($M_c \leq M_i \leq M_{pc}$), este definită pe baza unei funcții parabolice, obținută prin calibrare cu rezultatele obținute pe baza unor analize elasto-plactice "exacte" fundamentate pe modelul zonelor plastice:

$$\phi = f(\alpha) = f(M, N) \quad (2.67)$$

unde α reprezintă parametrul scalar ce măsoară intensitatea efortului resultant, determinat de efortul axial N și de momentul încovoietor M , de la capetele elementului:

$$\alpha = \frac{N}{N_p} + \frac{8}{9} \cdot \frac{M}{M_p}, \quad N \geq 0,2 \cdot N_p$$

$$\alpha = \frac{N}{2 \cdot N_p} + \frac{M}{M_p}, \quad N < 0,2 \cdot N_p \quad (2.68)$$

unde cu M_p s-a notat momentul plastic inițial al secțiunii (în absența efortului axial). În figura 2.20 sunt prezentate curbele de interacțiune N - M corespunzătoare inițierii curgerii ($\alpha=0,5$) și cea corespunzătoare plastificării totale a secțiunii ($\alpha=1$), cu observația că în acest studiu ambele curbe s-au considerat ca având aceeași formă. Orice punct din interiorul suprafeței delimitate de curba de inițiere a curgerii ($\alpha=0,5$), care este o curbă convexă în raport cu originea axelor ($n = \frac{N}{N_p}$, $m = \frac{M}{M_p}$), definește o stare de eforturi N și M pentru care secțiunea se

află în stadiul elastic, iar rigiditatea secțiunii la încovoiere este cea inițială. Pentru un punct aflat în interiorul sau pe frontierele domeniului delimitat de curba de interacțiune corespunzătoare inițierii curgerii și cea corespunzătoare plastificării totale, corespunzător unui anumit stadiu intermediar de pătrundere a plastificării în interiorul secțiunii (fig. 2.20), degradarea rigidității la încovoiere este determinată

prin intermediul parametrului ϕ conform următoarei ecuații parabolice (Liew s.al., 1992):

$$\begin{aligned}\phi &= 1, \quad \alpha \leq 0,5 \\ \phi &= 4 \cdot \alpha \cdot (1 - \alpha), \quad \alpha > 0,5\end{aligned}\tag{2.69}$$

Pot fi considerate și alte ecuații mai complexe pentru parametrul ϕ de evaluare a rigidității la încovoiere, ținând seama de plastificarea graduală a secțiunilor, dar o expresie simplă de genul celor prezentate în figura 2.21, conferă acestei metode simplitate și eficiență. De menționat faptul ca funcția parabolică (2.69) a fost obținută prin calibrare cu rezultatele obținute pe baza unor analize elasto-plastice "exacte" fundamentate pe modelul zonelor plastice (Liew, 1992; Liew ș.al., 1992). Pentru reprezentarea graduală a plastificării secțiunii de la capătul "j" al barei "ij" (fig. 2.18), corespunzătoare unui anumit stadiu intermediar de pătrundere a plastificării în secțiune, pornind de la stadiul perfect elastic și ajunând la stadiul limită corespunzător plastificării integrale a secțiunii, se pot scrie următoarele relații incrementale de echilibru:

$$\begin{pmatrix} \delta M_i \\ \delta M_j \\ \delta N \end{pmatrix} = \frac{E_t \cdot I}{L} \cdot \begin{bmatrix} \left[S_1 - \frac{S_2^2}{S_1} \cdot (1 - \phi_j) \right] & \phi_j \cdot S_2 & 0 \\ \phi_j \cdot S_2 & \phi_j \cdot S_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta \theta_i \\ \delta \theta_j \\ \delta u \end{pmatrix}\tag{2.70}$$

în care semnificațiile notațiilor din relația de mai sus au fost descrise anterior. Pentru cazul general corespunzător unei plastificări graduale la ambele capete ale elementului, relațiile incrementale de echilibru, utilizând deformațiile elementului (fig.2.18), se pot scrie sub formă matriceală în modul următor:

$$\begin{pmatrix} \delta M_i \\ \delta M_j \\ \delta N \end{pmatrix} = \frac{E_t \cdot I}{L} \begin{bmatrix} \phi_i \cdot \left[S_1 - \frac{S_2^2}{S_1} \cdot (1 - \phi_j) \right] & \phi_i \cdot \phi_j \cdot S_2 & 0 \\ \phi_i \cdot \phi_j \cdot S_2 & \phi_j \cdot \left[S_1 - \frac{S_2^2}{S_1} \cdot (1 - \phi_i) \right] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta \theta_i \\ \delta \theta_j \\ \delta u \end{pmatrix}\tag{2.71}$$

În legătură cu ecuația (2.71) se pot face următoarele observații:

- În cazul în care $0 < \phi_i < 1$ și $0 < \phi_j < 1$, ecuația (2.71) introduce efectul plastificării parțiale la ambele capete ale elementului, în matricea de rigiditate.

- În cazul în care $\phi_i = \phi_j = 1$, ambele capete ale elementului se află în domeniul elastic, matricea de rigiditate a elementului din ecuația (2.71) se reduce în acest caz la următoarea formă:

$$\mathbf{K} = \frac{E \cdot I}{L} \cdot \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & 0 \\ S_2 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A}{I} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

- În cazul în care $\phi_i = 1$ și $0 < \phi_j < 1$, capătul i al elementului este în domeniul elastic iar capătul j este parțial plastificat, și prin urmare ecuația (2.71) se reduce în acest caz la ecuația (2.71).
- În cazul în care $\phi_j = 1$ și $0 < \phi_i < 1$, capătul j al elementului este în domeniul elastic iar capătul i este parțial plastificat, ecuația (2.71) reducându-se în acest caz la ecuația (2.64).

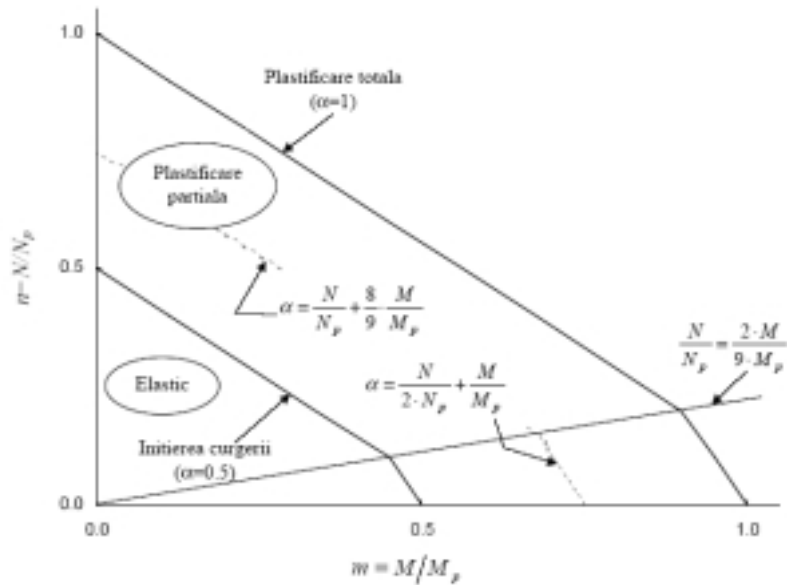


Fig. 2.20. Curbele de interacțiune N - M corespunzătoare diferitelor stadii de comportare a secțiunii în domeniul elasto-plastic.

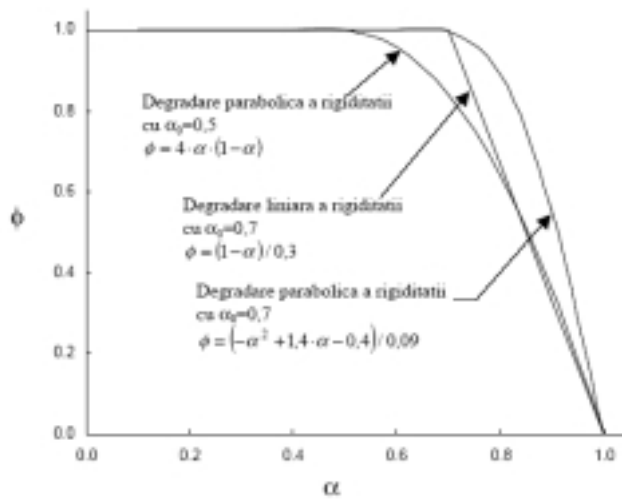


Fig. 2.21. Relații de determinare a rigidității la încovoire în domeniul elasto-plastic.

2.2.4 Efectul neliniarității geometrice locale. Funcții de stabilitate

2.2.4.1 Integrarea ecuației diferențiale a fibrei medii deformate

Se consideră cazul general al unei încărcări transversale constituită dintr-o forță uniform distribuită q și o forță concentrată Q care acționează la distanța c de capătul b al unei bare puternic comprimate, Fig. 2.22.

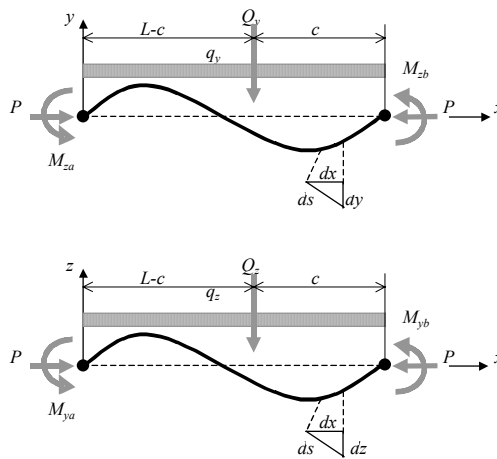


Fig. 2.22. Bara puternic comprimată încărcată cu forțe în lungul barei și momente încovoietoare de capăt.

Bara de lungime L , se consideră realizată dintr-un material omogen și izotrop cu comportare liniar elastică având modulul de elasticitate E și a cărei formă inițială este afectată de imperfecțiunile geometrice de forma unei curbe spațiale cu proiecțiile în planurile (xy) și (xz) de forma unor sinusoide cu excentricitățile maxime egale cu $f_{y(z)}L$ în mijlocul său (Fig.2.23):

$$\begin{aligned} y_0 &= f_y L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\ z_0 &= f_z L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \end{aligned} \quad (2.73)$$

Metoda suprapunerii de efecte poate fi aplicată și în cazul în care bara comprimată este acționată de mai multe sarcini transversale cu condiția ca fiecare componentă a încărcării să fie considerată pe bara acționată de întreaga mărime a forței axiale, deci pentru același factor de compresiune ν considerat drept o caracteristică (constantă) dată a barei puternic comprimate: $\nu = L\sqrt{P/EI}$. Premiza mai sus menționată își găsește justificarea în faptul că sarcinile axiale importante se aplică direct asupra barelor fiind independente de celelalte sarcini aplicate transversal pe barele structurii. Având la bază această premiză și faptul că deplasările transversale totale ale barei sunt obținute prin însumarea deplasărilor inițiale datorate imperfecțiunilor geometrice și a celor datorate sarcinilor externe, deformația rezultantă se obține:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + y_e \\ z &= z_0 + z_e \end{aligned} \quad (2.74)$$

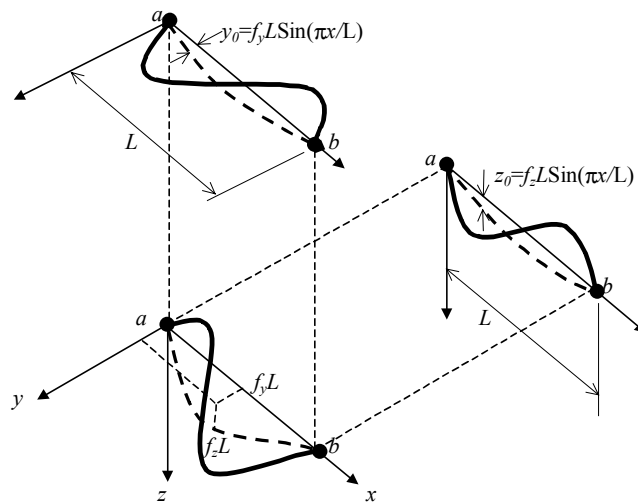


Fig. 2.23. Modelarea imperfecțiunilor geometrice locale.

Efectuarea integrării pe o bară puternic solicitată axial, necesită exprimarea momentelor încovoietoare în secțiunea curentă definită de abscisa x . Considerând planul de încovoiere (xy) și bara solicitată de forța axială de compresiune P ($P>0$), forța uniform distribuită q_y , forța concentrată Q_y , și de momentele încovoietoare nodale M_{za} și M_{zb} , momentul încovoietor în secțiunea curentă, scris în raport cu poziția deformată a barei (Fig. 2.22) este dat de relația:

$$M_z = Py + \frac{1}{2}q_y x(L-x) + \frac{Q_y cx}{L} + M_{za} \left(\frac{x}{L} - 1 \right) + M_{zb} \frac{x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L-c \quad (2.75a)$$

$$M_z = Py + \frac{1}{2}q_y x(L-x) + Q_y \left(\frac{cx}{L} - x + L - c \right) + M_{za} \left(\frac{x}{L} - 1 \right) + M_{zb} \frac{x}{L}, \quad L-c \leq x \leq L \quad (2.75b)$$

Ecuatia axei deformată, pentru cazul când aceasta se încadrează în domeniul micilor deplasări are forma cunoscută:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^2 y_0}{dx^2} = \frac{d^2 y_e}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (2.76)$$

sau ținând cont de expresia momentului încovoietor în secțiunea curentă x :

$$\frac{d^2 y_e}{dx^2} = \begin{cases} -\frac{1}{EI_z} \left[Py + \frac{1}{2}q_y x(L-x) + \frac{Q_y cx}{L} + M_{za} \left(\frac{x}{L} - 1 \right) + M_{zb} \frac{x}{L} \right], & 0 \leq x \leq L-c \\ -\frac{1}{EI_z} \left[Py + \frac{1}{2}q_y x(L-x) + Q_y \left(\frac{cx}{L} - x + L - c \right) + M_{za} \left(\frac{x}{L} - 1 \right) + M_{zb} \frac{x}{L} \right], & L-c \leq x \leq L \end{cases} \quad (2.77)$$

Notând cu $\alpha^2 = |P|/EI_z$ și având în vedere expresiile (2.73) pentru imperfecțiunile geometrice inițiale și ținând cont de relația (2.77) se ajunge la ecuația diferențială liniară neomogenă de ordinul II:

$$\frac{d^2 y_e}{dx^2} + \alpha^2 y_e = -\frac{1}{EI_z} \begin{cases} P \left(f_y \sin \frac{\pi x}{L} \right) L + \frac{1}{2}q_y x(L-x) + \frac{Q_y cx}{L} + M_{za} \left(\frac{x}{L} - 1 \right) + M_{zb} \frac{x}{L}, & 0 \leq x \leq L-c \\ P \left(f_y \sin \frac{\pi x}{L} \right) L + \frac{1}{2}q_y x(L-x) + Q_y \left(\frac{cx}{L} - x + L - c \right) + M_{za} \left(\frac{x}{L} - 1 \right) + M_{zb} \frac{x}{L}, & L-c \leq x \leq L \end{cases} \quad (2.78)$$

ce caracterizează bara puternic comprimată. Soluția generală a acestei ecuații este de forma:

$$y_e = y_e^0 + \bar{y}_e \quad (2.79)$$

unde y_e^0 este soluția generală a ecuației omogene și care se poate alege sub forma:

$$y_e^0 = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x \quad (2.80)$$

iar \bar{y}_e este o soluție particulară a ecuației neomogene și care se poate alege după forma membrului drept a ecuației (2.78). Astfel soluția ecuației diferențiale (2.78) se poate scrie:

$$y_e = -\frac{1}{EI_z} \begin{cases} C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + \frac{\alpha^2 f_y L^3}{\pi^2 - \alpha^2 L^2} \sin \frac{\pi x}{L} - \\ -\frac{1}{P} \left[M_{za} \left(\frac{x}{L} - 1 \right) + \frac{1}{2} q_y x(L-x) + \frac{q_y}{\alpha^2} + \frac{Q_y c x}{L} + M_{zb} \frac{x}{L} \right], 0 \leq x \leq L-c \\ C_3 \sin \alpha x + C_4 \cos \alpha x + \frac{\alpha^2 f_y L^3}{\pi^2 - \alpha^2 L^2} \sin \frac{\pi x}{L} - \\ -\frac{1}{P} \left[M_{za} \left(\frac{x}{L} - 1 \right) + \frac{1}{2} q_y x(L-x) + \frac{q_y}{\alpha^2} + \frac{Q_y (L-c)(L-x)}{L} + M_{zb} \frac{x}{L} \right], L-c \leq x \leq L \end{cases} \quad (2.81)$$

Constantele de integrare $C_{i(i=1,\dots,4)}$ se determină atât din condițiile de la capetele barei $y(0)=0$; $y(L)=0$, cât și din punctul de aplicare al sarcinii Q unde cele doua porțiuni ale axei deformată descrise de ecuația (2.81) au aceeași deplasare și o tangentă comună $y(L-c-0) = y(L-c+0)$, $\frac{dy}{dx} \Big|_{(L-c)-0} = \frac{dy}{dx} \Big|_{(L-c)+0}$. Aplicarea acestor condiții conduc la următoarele expresii pentru constantele de integrare:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{P \sin \alpha L} \left[M_{zb} + M_{za} \cos \alpha L + \frac{q_y}{\alpha^2} (1 - \cos \alpha L) + \frac{Q_y}{\alpha} \sin \alpha c \right] \\ C_2 &= \frac{1}{P} \left[\frac{q_y}{\alpha^2} - M_{za} \right] \\ C_3 &= \frac{1}{P \sin \alpha L} \left[\frac{q_y}{\alpha^2} + M_{zb} - \cos \alpha L \left(\frac{q_y}{\alpha^2} - M_{za} \right) - \frac{Q_y}{\alpha} \cos \alpha L \sin \alpha (L-c) \right] \\ C_4 &= \frac{1}{P} \left[\frac{q_y}{\alpha^2} - M_{za} \right] + \frac{Q_y}{\alpha P} \sin \alpha (L-c) \end{aligned} \quad (2.82)$$

Relații similare se pot obține în cazul încovoierii în planul (xz) înlocuind indicii inferiori y cu z iar pe α cu $\beta = \sqrt{|P|/EI_y}$. În mod asemănător pot fi studiate și alte cazuri de încărcare. Cu constantele de integrare determinate de relațiile (2.82) deplasarea totală este obținută înlocuind relația (2.82) în relația (2.81).

s_3 : funcția de stabilitate ce măsoară efectul forței axiale asupra rigidității la încovoiere ce se opune rotirii de nod b față de axa z ;
 s_4 : funcția de stabilitate ce măsoară efectul forței axiale asupra rigidității la încovoiere ce se opune rotirii de nod a față de axa y ;
 s_5 : funcția de stabilitate ce măsoară efectul forței axiale asupra rigidității la încovoiere ce se opune rotirii de nod b față de axa y ;
 s_6 : funcția de stabilitate ce măsoară efectul forței axiale asupra rigidității la încovoiere față de axa z ce se opune translației în direcția y ;
 s_7 : funcția de stabilitate ce măsoară efectul forței axiale asupra rigidității la lunecare în direcția y ce se opune translației în direcția y ;
 s_8 : funcția de stabilitate ce măsoară efectul forței axiale asupra rigidității la încovoiere față de axa y ce se opune translației în direcția z ;
 s_9 : funcția de stabilitate ce măsoară efectul forței axiale asupra rigidității la lunecare în direcția z ce se opune translației în direcția z ;

Trebuie specificat faptul că, funcțiile de stabilitate definite mai sus, surprind efectul local al neliniarității geometrice prin raportarea forțelor axiale la poziția deformată a barelor respective, introducând în calcul așa numitul efect $P-\delta$ și exprimând faptul ca forța axială de compresiune sau de întindere are drept efect modificarea rigidității barei respective. Cu toate acestea, deformata de ansamblu a barei, caracterizată prin deplasările și rotațiile nodurilor (efectul $P-\Delta$) nu intervine în matricea de rigiditate \mathbf{k} care se alcătuiește pentru condițiile domeniului micilor deplasări și rotații. Acest din urmă efect, care se referă numai la încovoierea suplimentară datorată forțelor axiale din barele a caror noduri de capăt suferă deplasări pe direcția perpendiculară, va fi exprimat separat în cadrul matricei de rigiditate geometrică. Mai trebuie specificat de asemenea faptul că așa numitul efect $P-\Delta$ doar aproximează efectul neliniarității geometrice globale care se referă la modificarea rigidității de ansamblu a structurii ca urmare a modificării configurației geometrice globale ale acesteia. Efectul global al neliniarității geometrice poate fi surprins riguros în analiză doar prin considerarea explicită a modificării configurației geometrice ale nodurilor structurii și exprimarea condițiilor de echilibru static în aceste configurații deformatate. Modalități cu privire la integrarea efectului neliniarității geometrice globale în analiza de ansamblu a structurilor cu deplasări și rotații mari vor fi prezentate în cadrul paragrafului 2.4.

Efectele forței axiale asupra rigidității la torsiune și a momentului de torsiune asupra rigidității axiale a barei sunt neglijate în prezenta formulare, deși funcții de stabilitate similare cu cele definite mai sus pot fi formulate. În cele ce urmează vor fi determinate expresiile funcțiilor de stabilitate și a forțelor echivalente la noduri, în cazul unei bare puternic sollicitată axial precum și de momentele încovoietoare nodale (m_a, m_b) și de o forță uniform distribuită pe întreaga lungime a barei.

Efectul încovoierii barei asupra rigidității axiale. Coeficientul s_1

Așa cum rezultă din figura 2.22 lungimea axei deformate a barei sollicitată de sarcini exterioare poate fi calculată cu relația:

$$S = \int_0^L ds = \int_0^L \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx \quad (2.85)$$

unde y și z reprezintă deplasările transversale totale obținute prin însumarea deplasărilor inițiale din imperfecțiuni geometrice și cele date de sarcinile exterioare aplicate asupra barei, iar abscisa x definește un punct aparținând liniei elastice a barei definite ca locul geometric al centrelor de greutate ale secțiunilor din lungul ei, (Fig. 2.22). În ipoteza deformațiilor unghiulare mici în secțiune $dy/dx \ll 1$, $dz/dx \ll 1$, relația de mai sus se scrie:

$$S = L + \frac{1}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (2.86)$$

Astfel, scurtarea barei, cauzată de deplasările transversale totale y și z se poate calcula cu relația:

$$\delta = S - L = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (2.87)$$

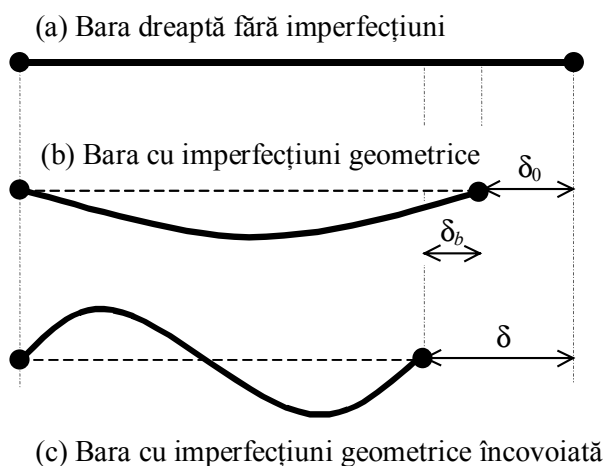


Fig. 2.24. Efectul încovoierii barei asupra rigidității axiale.

Ținând seama de faptul că deplasările transversale y și z sunt obținute prin însumarea celor două efecte, a încovoierii inițiale și a deformațiilor datorate sarcinilor exterioare ($y=y_e+y_0$; $z=z_e+z_0$), așa cum rezultă din Fig. 2.24, scurtarea reală a barei, este determinată de următoarea relație:

$$\delta_b = \delta - \delta_0 = \frac{1}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right] dx - \frac{1}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{dy_0}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (2.88)$$

iar scurtarea totala (δ_t) este obținută prin însumarea deformațiilor axiale datorate efortului axial P (δ_a) și a deformațiilor din încovoiere (δ_b):

$$\delta_t = \delta_a + \delta_b = \frac{PL}{EA} + \frac{1}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right] dx - \frac{1}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{dy_0}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (2.89a)$$

$$\delta_t = \frac{PL}{EA} \left\{ 1 + \frac{EA}{2PL} \left[\frac{1}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right] dx - \frac{1}{2} \int_0^L \left[\left(\frac{dy_0}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dx} \right)^2 \right] dx \right] \right\} \quad (2.89b)$$

Relația (2.89) poate fi rescrisă astfel:

$$\delta_t = \frac{P}{s_1 \left(\frac{EA}{L} \right)} \quad (2.90)$$

unde

$$s_1 = \frac{1}{1 + \frac{EA}{2PL} \left[\int_0^L \left[\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 \right] dx - \int_0^L \left[\left(\frac{dy_0}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz_0}{dx} \right)^2 \right] dx \right]} \quad (2.91)$$

și reprezintă coeficientul de corecție ce măsoară efectul încovoierii asupra rigidității axiale a barei. Având cunoscute expresiile pentru calculul deplasărilor transversale y și z coeficientul s_1 se poate calcula prin integrări succesive pe lungimea barei. Vom da în continuare expresia acestui coeficient neglijând efectul imperfecțiunilor locale și a sarcinilor dintre nodurile barei. În acest caz avem:

$$\int_0^L \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{1}{2P^2L} \left[\alpha L (m_{za}^2 + m_{zb}^2) (\cot \alpha L + \alpha L \cos ec^2 \alpha L) - 2(m_{za} + m_{zb})^2 + \right] = \frac{1}{2P^2L} H_z \quad (2.92)$$

și

$$\int_0^L \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 = \frac{1}{2P^2L} \left[\beta L (m_{ya}^2 + m_{yb}^2) (\cot \beta L + \beta L \cos ec^2 \beta L) - 2(m_{ya} + m_{yb})^2 + \right] = \frac{1}{2P^2L} H_y \quad (2.93)$$

Astfel relația (2.91) devine în acest caz:

$$s_1 = \frac{1}{1 + \frac{EA}{4P^3L^2} (H_y + H_z)} \quad (2.94)$$

Similar se poate obține expresia coeficientului s_1 în cazul în care forța axială este de întindere. În acest caz coeficientul s_1 are următoarea formă:

$$s_1 = \frac{1}{1 - \frac{EA}{4P^3 L^2} (H'_y + H'_z)} \quad (2.95)$$

unde

$$H'_y = \beta L (m_{ya}^2 + m_{yb}^2) (\coth \beta L + \beta L \operatorname{cosech}^2 \beta L) - 2(m_{ya} + m_{yb})^2 + 2\beta L m_{ya} m_{yb} (\operatorname{cosech} \beta L) (1 + \beta L \coth \beta L) \quad (2.96)$$

și

$$H'_z = \alpha L (m_{za}^2 + m_{zb}^2) (\coth \alpha L + \alpha L \operatorname{cosech}^2 \alpha L) - 2(m_{za} + m_{zb})^2 + 2\alpha L m_{za} m_{zb} (\operatorname{cosech} \alpha L) (1 + \alpha L \coth \alpha L) \quad (2.97)$$

Efectul forței axiale asupra rigidității la încovoiere

Se consideră bara cu imperfecțiuni geometrice locale sollicitată de forța uniform distribuită $q_{y(z)}$ și de momentele încovoietoare de capăt $m_{y(z)a}$ și $m_{y(z)b}$. În acest caz deplasarea transversală într-o secțiune curentă x a barei se obține prin particularizarea relației (2.81).

a. Încovoierea în planul X-Y.

$$y = \frac{m_{zb}}{P} \left(\frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha L} - \frac{x}{L} \right) - \frac{m_{za}}{P} \left(\frac{\sin \alpha(L-x)}{\sin \alpha L} - \frac{L-x}{L} \right) + \frac{q_y}{P\alpha^2} \left(\frac{\cos\left(\frac{1}{2}\alpha L - \alpha x\right)}{\cos \frac{1}{2}\alpha L} - 1 \right) - \frac{q_y x}{2P} (L-x) + \frac{\pi^2 f_y L}{\pi^2 - \alpha^2 L^2} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (2.98)$$

Unghiurile de rotație de la capetele barei se găsesc derivând relația (2.98) și substituind $x=0$ pentru capătul a și $x=L$ pentru capătul b :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m_{zb}}{P} \left(\frac{\alpha \cos \alpha x}{\sin \alpha L} - \frac{1}{L} \right) + \frac{m_{za}}{P} \left(\frac{\alpha \cos \alpha(L-x)}{\sin \alpha L} - \frac{1}{L} \right) + \frac{q_y}{P\alpha^2} \left(\frac{\alpha \sin\left(\frac{1}{2}\alpha L - \alpha x\right)}{\cos \frac{1}{2}\alpha L} \right) - \frac{q_y}{2P} (L-2x) + \frac{\pi^3 f_y}{\pi^2 - \alpha^2 L^2} \cos \frac{\pi x}{L} \quad (2.99)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \alpha_{za} = \frac{m_{zb}}{P} \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha L} - \frac{1}{L} \right) + \frac{m_{za}}{P} \left(\frac{\alpha \cos \alpha L}{\sin \alpha L} - \frac{1}{L} \right) + \frac{q_y}{P \alpha^2} \left(\frac{\alpha \sin \left(\frac{1}{2} \alpha L \right)}{\cos \frac{1}{2} \alpha L} \right) - \frac{q_y}{2P} L + \frac{\pi^3 f_y}{\pi^2 - \alpha^2 L^2} \quad (2.100)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=L} = \alpha_{zb} = \frac{m_{zb}}{P} \left(\frac{\alpha \cos \alpha L}{\sin \alpha L} - \frac{1}{L} \right) + \frac{m_{za}}{P} \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha L} - \frac{1}{L} \right) - \frac{q_y}{P \alpha^2} \left(\frac{\alpha \sin \left(\frac{1}{2} \alpha L \right)}{\cos \frac{1}{2} \alpha L} \right) + \frac{q_y}{2P} L - \frac{\pi^3 f_y}{\pi^2 - \alpha^2 L^2} \quad (2.101)$$

Relațiile (2.100) și (2.101) pot fi rearanjate în formă matriceală condensată astfel:

$$\mathbf{m} = \mathbf{k}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{f}_q + \mathbf{f}_{y_0} = \mathbf{k}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{f}_{eq} \quad (2.102)$$

unde \mathbf{m} reprezintă vectorul momentelor încovoietoare nodale, \mathbf{k} este matricea de rigiditate $\boldsymbol{\theta}$ vectorul rotirilor iar \mathbf{f}_q și \mathbf{f}_{y_0} reprezintă vectorul forțelor echivalente nodale \mathbf{f}_{eq} provenite din forța uniform distribuită q respectiv imperfecțiunile geometrice locale y_0 . Dezvoltat relația de mai sus se scrie:

$$\begin{bmatrix} m_{za} \\ m_{zb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2 \left(\frac{4EI_z}{L} \right) & s_3 \left(\frac{2EI_z}{L} \right) \\ s_3 \left(\frac{2EI_z}{L} \right) & s_2 \left(\frac{4EI_z}{L} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{za} \\ \alpha_{zb} \end{bmatrix} + \frac{q_y L^2}{12} \begin{bmatrix} -\frac{6}{4s_2 + 2s_3} \\ \frac{6}{4s_2 + 2s_3} \end{bmatrix} + \frac{2P}{\alpha^2 L} \frac{\pi^3 f_y}{\pi^2 - \alpha^2 L} \begin{bmatrix} -(2s_2 + s_3) \\ (2s_2 + s_3) \end{bmatrix} \quad (2.103)$$

unde pentru cazul forței axiale P de compresiune funcțiile s_2 și s_3 au următoarele expresii:

$$s_2 = \frac{\alpha L}{4} \frac{(\sin \alpha L - \alpha L \cos \alpha L)}{(2 - 2 \cos \alpha L - \alpha L \sin \alpha L)} \quad (2.104)$$

$$s_3 = \frac{\alpha L}{2} \frac{(\alpha L - \sin \alpha L)}{(2 - 2 \cos \alpha L - \alpha L \sin \alpha L)}$$

Din aceste expresii se constată caracterul neliniar pe care coeficienții de corecție îl introduc în expresiile momentelor încovoietoare de capăt și în cele ale forțelor echivalente la noduri. De asemenea se poate observa faptul că variația coeficienților este neliniară în raport cu α , accentuându-se când factorul de compresiune crește, iar pentru $\alpha=0$ valoarea coeficienților este egală cu unitatea. Alte situații de încărcare pot fi introduse în calcul urmând un raționament similar, matricea de rigiditate nefiind afectată de forma acestora. Pentru bare cu forțe axiale mari de întindere, efectul este favorabil, aducând un spor de rigiditate. Se pot stabili expresii similare ale coeficienților de corecție, înlocuind forța axială P cu $-P$ în

relația (2.75). Urmând un procedeu similar cu cel pentru cazul forței de compresiune se ajunge la o relație similară cu cea dată în (2.103) dar în care coeficienții de corecție au următoarea expresie:

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{\alpha L}{4} \frac{(\alpha L \cosh \alpha L - \sinh \alpha L)}{(2 - 2 \cosh \alpha L - \alpha L \sinh \alpha L)} \\ s_3 &= \frac{\alpha L}{2} \frac{(\sinh \alpha L - \alpha L)}{(2 - 2 \cosh \alpha L - \alpha L \sinh \alpha L)} \end{aligned} \quad (2.105)$$

b. Încovoierea în planul X-Z

Urmând un raționament similar relația între momentele încovoietoare nodale și rotirile la capetele a și b ale barei rezultă de următoarea formă:

$$\begin{bmatrix} m_{ya} \\ m_{yb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_4 \left(\frac{4EI_y}{L} \right) & s_5 \left(\frac{2EI_y}{L} \right) \\ s_5 \left(\frac{2EI_y}{L} \right) & s_4 \left(\frac{4EI_y}{L} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{ya} \\ \alpha_{yb} \end{bmatrix} + \frac{q_z L^2}{12} \begin{bmatrix} -\frac{6}{4s_4 + 2s_5} \\ \frac{6}{4s_4 + 2s_5} \end{bmatrix} + \frac{2P}{\beta^2 L} \frac{\pi^3 f_z}{\pi^2 - \beta^2 L} \begin{bmatrix} -(2s_4 + s_5) \\ (2s_4 + s_5) \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

unde în cazul unei forțe de compresiune și notând cu $\beta^2 = |P|/EI_y$:

$$\begin{aligned} s_4 &= \frac{\beta L}{4} \frac{(\sin \beta L - \beta L \cos \beta L)}{(2 - 2 \cos \beta L - \beta L \sin \beta L)} \\ s_5 &= \frac{\beta L}{2} \frac{(\beta L - \sin \beta L)}{(2 - 2 \cos \beta L - \beta L \sin \beta L)} \end{aligned} \quad (2.107)$$

iar pentru întindere:

$$\begin{aligned} s_4 &= \frac{\beta L}{4} \frac{(\beta L \cosh \beta L - \sinh \beta L)}{(2 - 2 \cosh \beta L - \beta L \sinh \beta L)} \\ s_5 &= \frac{\beta L}{2} \frac{(\sinh \beta L - \beta L)}{(2 - 2 \cosh \beta L - \beta L \sinh \beta L)} \end{aligned} \quad (2.108)$$

Matricea de rigiditate

Relațiile (2.103-2.106) pot fi rearanjate într-o forma matriceala compacta punând în evidență matricea de rigiditate în coordonatele de bază ale elementului \mathbf{k} de bară spațial (Fig.2.25):

$$\begin{bmatrix} P \\ m_{ya} \\ m_{yb} \\ m_{za} \\ m_{zb} \\ m_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_4 \left(\frac{4EI_y}{L} \right) & s_5 \left(\frac{2EI_y}{L} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_5 \left(\frac{2EI_y}{L} \right) & s_4 \left(\frac{4EI_y}{L} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_2 \left(\frac{4EI_z}{L} \right) & s_3 \left(\frac{2EI_z}{L} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_3 \left(\frac{2EI_z}{L} \right) & s_2 \left(\frac{4EI_z}{L} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GI_t / L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_t \\ \alpha_{ya} \\ \alpha_{yb} \\ \alpha_{za} \\ \alpha_{zb} \\ \theta_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{f}_{eq}^a \\ \mathbf{f}_{eq}^b \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

Mai departe, matricea de rigiditate, în sistemul local al elementului, se alcătuiește în condițiile domeniului micilor deplasări și rotații printr-o transformare liniară între coordonatele de bază și cele locale ale elementului. Având în vedere figura 2.25 putem exprima relațiile cinematice și de echilibru în forma matriceală astfel:

$$\begin{bmatrix} \delta_t \\ \alpha_{ya} \\ \alpha_{yb} \\ \alpha_{za} \\ \alpha_{zb} \\ \theta_t \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{[6 \times 12]} \cdot \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ w_a \\ \theta_{xa} \\ \theta_{ya} \\ \theta_{za} \\ u_b \\ v_b \\ w_b \\ \theta_{xb} \\ \theta_{yb} \\ \theta_{zb} \end{bmatrix} ; \quad \begin{bmatrix} F_{xa} \\ F_{ya} \\ F_{za} \\ M_{xa} \\ M_{ya} \\ M_{za} \\ F_{xb} \\ F_{yb} \\ F_{zb} \\ M_{xb} \\ M_{yb} \\ M_{zb} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T_{[6 \times 12]} \cdot \begin{bmatrix} P \\ m_{ya} \\ m_{yb} \\ m_{za} \\ m_{zb} \\ m_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{q_y L}{2} \\ \frac{q_z L}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{q_y L}{2} \\ \frac{q_z L}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

unde matricea liniară de transformare \mathbf{T} are următoarea formă:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/L & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/L & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/L & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

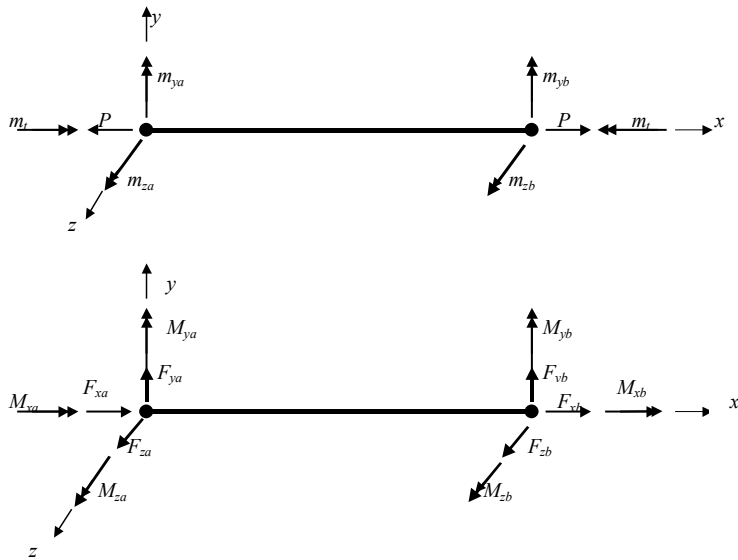


Fig. 2.25. Sistemele de referință de bază respectiv local al elementului de bară.

Astfel relația între vectorul forțelor nodale și cel al deplasărilor în sistemul de coordonate local elementului pot fi obținute prin combinarea relațiilor (2.110):

$$\begin{bmatrix} F_{xa} \\ F_{ya} \\ F_{za} \\ M_{xa} \\ M_{ya} \\ M_{za} \\ F_{xb} \\ F_{yb} \\ F_{zb} \\ M_{xb} \\ M_{yb} \\ M_{zb} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ w_a \\ \theta_{xa} \\ \theta_{ya} \\ \theta_{za} \\ u_b \\ v_b \\ w_b \\ \theta_{xb} \\ \theta_{yb} \\ \theta_{zb} \end{bmatrix} + \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{f}_{eq} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{q_y L}{2} \\ \frac{q_z L}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{q_y L}{2} \\ \frac{q_z L}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.112)$$

rezultând matricea de rigiditate și vectorul forțelor nodale echivalente prezentate la începutul acestui paragraf și dată de relațiile (2.84) a cărei expresie compactă poate fi scrisă:

$${}^l \mathbf{k}_{12 \times 12} = \mathbf{T}_{6 \times 12}^T \cdot {}^c \mathbf{k}_{6 \times 6} \cdot \mathbf{T}_{6 \times 12} \quad (2.113)$$

$$\mathbf{F}_{eq} = \mathbf{T}_{6 \times 12}^T \cdot \mathbf{f}_{eq} + \mathbf{q}$$

unde s-a folosit notația:

$$\mathbf{q} = \left[0 \quad \frac{q_y L}{2} \quad \frac{q_z L}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{q_y L}{2} \quad \frac{q_z L}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T. \text{ Efectuând produsele}$$

matriceale din relația (2.112) se ajunge la următoarea formă pentru matricea de rigiditate a elementului ținând seama de efectele locale P-δ ale neliniarității geometrice:

$${}^l \mathbf{k}_{12 \times 12} = \begin{bmatrix} {}^l \mathbf{k}_1 & {}^l \mathbf{k}_2 \\ {}^l \mathbf{k}_2 & {}^l \mathbf{k}_3 \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

unde

$${}^l \mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d & 0 & -e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e & 0 & g & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & h \end{bmatrix}; \quad {}^l \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -d & 0 & -e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & i & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 & 0 & j \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

$${}^l \mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & m & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & n \end{bmatrix}$$

unde:

$$a = s_1 \frac{EA}{L}, \quad b = \frac{12EI_z}{L^3} \left(\frac{2}{3}s_2 + \frac{1}{3}s_3 \right); \quad c = \frac{6EI_z}{L^2} \left(\frac{2}{3}s_2 + \frac{1}{3}s_3 \right)$$

$$d = \frac{12EI_y}{L^3} \left(\frac{2}{3}s_4 + \frac{1}{3}s_5 \right); \quad e = \frac{6EI_y}{L^2} \left(\frac{2}{3}s_4 + \frac{1}{3}s_5 \right); \quad f = \frac{GI_t}{L}; \quad g = \frac{4EI_y}{L} s_4 \quad (2.116)$$

$$h = \frac{4EI_z}{L} s_2; \quad i = \frac{2EI_y}{L} s_5; \quad j = \frac{2EI_z}{L} s_3; \quad m = \frac{4EI_y}{L} s_4; \quad n = \frac{4EI_z}{L} s_2$$

Așa cum s-a menționat mai sus matricea de rigiditate determinată de relațiile (2.113) include doar efectul local al neliniarității geometrice. În mod curent neliniaritatea geometrică se manifestă prin două efecte importante și anume:

- un efect local de flexibilizare/rigidizare a barelor comprimate/întinse care poate fi prins în analiză prin considerarea matricelor de rigiditate elementare de ordinul II determinate de relațiile (2.114-2.115);
- un efect global datorat modificării configurației geometrice a nodurilor și care în mod riguros poate fi evaluat doar prin analiza structurii în ansamblu și corectarea forțelor neechilibrate ce apar datorate modificării configurației geometrice a structurii de la un ciclu de calcul la altul. O variantă aproximativă a acestui efect prin care se ia în considerare numai încovoierea suplimentară datorită forțelor din noduri raportate la schema deformată a structurii, ca urmare a deplasărilor nodurilor pe direcția perpendiculară la axele barelor, este așa numitul efect P- Δ .



Fig. 2.26. Efectul local P- δ și cel global P- Δ .

Pentru includerea efectului P- Δ în matricea de rigiditate elementară se poate considera următoarea relație de echilibru între forțele nodale în configurația de bază a elementului și cele în sistemul local:

$$\begin{bmatrix} F_{xa} \\ F_{ya} \\ F_{za} \\ M_{xa} \\ M_{ya} \\ M_{za} \\ F_{xb} \\ F_{yb} \\ F_{zb} \\ M_{xb} \\ M_{yb} \\ M_{zb} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T_{[6 \times 12]} \begin{bmatrix} P \\ m_{ya} \\ m_{yb} \\ m_{za} \\ m_{zb} \\ m_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{P\Delta}{L} \\ \frac{P\Delta}{L} \\ \frac{L}{0} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{P\Delta}{L} \\ -\frac{P\Delta}{L} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.117)$$

unde cu Δ s-a notat deplasarea relativă a nodurilor elementului de bară pe direcția perpendiculară axei barei (Fig. 2.26), iar \mathbf{T} reprezintă matricea liniară de transformare dată de relația (2.111). Urmând un raționament similar cu cel folosit la deducerea matricei de rigiditate în sistemul local ținând seama doar de efectele locale ale neliniarității geometrice se obține următoarea formă pentru matricea de rigiditate care include ambele efecte ale neliniarității geometrice:

$${}_l \mathbf{k}_{12 \times 12} = \begin{bmatrix} {}_l \mathbf{k}_1 & {}_l \mathbf{k}_2 \\ {}_l \mathbf{k}_2 & {}_l \mathbf{k}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{k}_\Delta & \mathbf{k}_\Delta \\ \mathbf{k}_\Delta & -\mathbf{k}_\Delta \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

unde s-a notat cu \mathbf{k}_Δ matricea de rigiditate geometrică datorată efectului P - Δ :

$$\mathbf{k}_\Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{P}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{P}{L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

2.3 METODA ELEMENTELOR FINITE ÎN STUDIUL COMPORTĂRII NELINIARE A CADRELOR PLANE. MODELUL PLASTIFICĂRII DISTRIBUITE

Analiza statică neliniară generează, în metoda elementelor finite, sisteme de ecuații neliniare, pentru rezolvarea cărora se recurge la liniarizarea prin metoda secantelor sau prin metoda tangentelor. În concordanță cu acestea se definesc matricea secantă a rigidităților, respectiv matricea tangentă a rigidităților. Determinarea matricelor caracteristice ale elementelor finite, în formularea deplasărilor, se bazează pe principiul deplasărilor virtuale și, considerarea unei funcții de deplasări, de obicei sub forma polinomială, cu ajutorul căreia se pot exprima deplasările oricărui punct din interiorul elementului, în raport cu deplasările nodurilor de la capetele elementului finit. Odată cunoscut câmpul de deplasări, pe baza unui studiu geometric, se poate determina starea de deformație specifică și de efort unitar din element. Dacă se ține seama ca deformată structura nu se încadrează în domeniul micilor deplasări, pentru o bară dintr-o structură plană, unde din tensorul deformațiilor se reține numai deformația specifică corespunzătoare axei longitudinale a barei, expresia acesteia nu mai poate fi menținută sub forma simplă, ci trebuie adăugați unul sau mai mulți termeni pentru a ține seama de interdependența dintre solicitări. Pentru fiecare asemenea formă va rezulta o altă alcătuire a matricei de rigiditate secantă respectiv tangentă, alegerea celei mai potrivite depinzând de natura problemei studiate și de gradul de aproximare dorit.

Formularea calculului neliniar în metoda elementelor finite, implică rezolvarea următoarelor două aspecte principale:

(1) Determinarea ecuațiilor ce caracterizează comportarea neliniară a structurilor, sub cele două aspecte, cel fizic și cel geometric:

- (a) adoptarea relațiilor neliniare între deformațiile specifice și deplasări.
- (b) adoptarea unui model pe baza căruia să se deducă relațiile constitutive neliniare σ - ϵ
- (c) aplicarea principiului deplasărilor virtuale pentru determinarea ecuațiilor de echilibru static.

(2) Rezolvarea acestor ecuații neliniare, prin metoda elementelor finite. Principiul metodei elementelor finite aplicat în studiul structurilor din bare, constă în separarea structurii prin linii imaginare rezultând un anumit număr de elemente finite. Elementele finite sunt presupuse că se interconectează într-un număr discret de puncte nodale situate la capetele lor; deplasările acestor puncte nodale se consideră a fi parametri necunoscuți. Deplasările punctelor din interiorul fiecărui element finit sunt exprimate în funcție de deplasările nodurilor de interconexiune, cu ajutorul unor funcții de deplasări. Funcțiile de deplasări, odată definite, servesc la deducerea stării de eforturi unitare în diverse secțiuni și fibre, din interiorul elementului finit. Soluționarea sistemului de ecuații neliniare implică aplicarea următoarelor proceduri:

(a) Adoptarea tipului de element finit și asocierea gradelor de libertate în funcție de natura problemei studiate și de gradul de aproximare dorit.

(b) Definirea funcțiilor de deplasări pe baza cărora se definesc deplasările în interiorul elementului finit.

(c) Exprimarea ecuațiilor de echilibru în funcție de deplasările gradelor de libertate asociate elementului finit utilizat.

(d) Aplicarea unor procedee incrementale sau incremental-iterative pentru rezolvarea sistemelor de ecuații neliniare rezultate.

Exemplificarea aplicării metodei elementelor finite la analiza elasto-plastică a structurilor în cadre plane metalice se prezintă în continuare. Modelul de calcul prezentat în continuare a stat la baza dezvoltării unui program de calculator utilizat în studiile numerice de calibrare a programului *NEFCAD*, prezentate în cadrul capitolului 5 al acestei lucrări.

2.3.1 Relații neliniare între deformațiile specifice și deplasări. Efectul local al neliniarității geometrice

Neliniaritatea geometrică provine din relații deformații-deplasări neliniare și din modificări finite ale geometriei. Relația între deformațiile specifice și deplasări care este luată în considerare în acest studiu este cea corespunzătoare ipotezei conform căreia deformațiile sunt mici, dar finite, iar rotirile moderate. Considerând elementul plan de bară dreaptă supus acțiunii unei forțe uniform distribuite q și forțelor axiale N la capetele ei (Fig. 2.27 a), se va determina în cele ce urmează forma componentei axiale a tensorului deformațiilor Green, e_x , corespunzătoare ipotezelor amintite mai sus. Pentru aceasta se consideră elementul de bară de lungime dx paralel cu axa fibrei medii deformată a elementului și care este prezentat în figura 2.27.b.

Componenta axială a tensorului Green, în problema plană, este dată de relația:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.120)$$

în care cu u și v s-au notat deplasările unui punct arbitrar P al secțiunii transversale al elementului (fig. 2.27.b).

Considerând deformația elementului infinitesimal dx conform figurii 2.27.c, și aplicând teorema lui Pitagora, urmată de niște operații matematice elementare, se pot deduce următoarele relații geometrice:

$$\varepsilon_x \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon_x}{2} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.121)$$

în care cu ε_x s-a notat alungirea specifică a elementului infinitesimal dx . Se observă că partea dreaptă a ecuației (2.121) reprezintă tocmai componenta axială a tensorului deformațiilor Green. Astfel alungirea specifică ε_x se poate scrie:

$$\varepsilon_x + \frac{1}{2} \varepsilon_x^2 = e_x \quad (2.122)$$

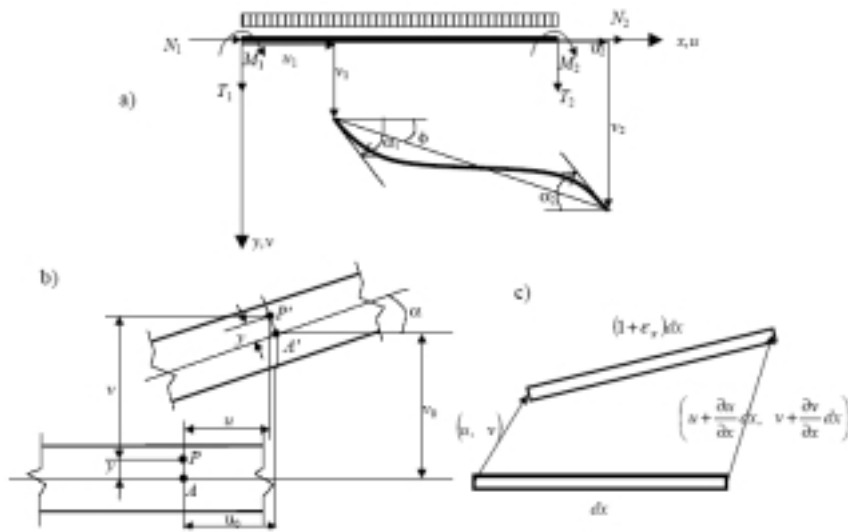


Fig.2.27. Efectul neliniarității geometrice. Stabilirea relațiilor neliniare între deplasări și deformații.

Acceptând ipoteza deformațiilor mici, dar finite:

$$e_x \ll 1 \text{ sau } \varepsilon_x \ll 1 \quad (2.123)$$

rezultă că $\varepsilon_x^2 \Rightarrow 0$, în acest caz conform ec. (2.120) alungirea specifică coincide cu componenta axială a tensorului Green. Pentru simplificarea relației neliniare ce definește deformația e_x se introduce condiția rotirilor moderate:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \ll 1 \quad (2.124)$$

care este oricum mai puțin restrictivă decât cea a rotirilor mici ($\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \ll 1$).

Rezolvând ecuația (2.121) în necunoscuta $\partial u / \partial x$ rezultă:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -1 + \sqrt{1 + 2 \cdot e_x - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} \quad (2.125)$$

Notând:

$$\lambda = 2 \cdot e_x - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \quad (2.126)$$

ecuația (2.125) poate fi scrisă:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -1 + \sqrt{1 + \lambda} \quad (2.127)$$

Pe baza relațiilor de mai sus se observă că $\partial u/\partial x$ are același ordin de mărime cu λ , ceea ce implică că:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot \lambda - \frac{1}{8} \cdot \lambda^2 + \dots \ll 1 \quad (2.128)$$

rezultând următoarea expresie redusă a ecuației (2.120):

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (2.129)$$

Acceptând, în continuare, ipotezele conform cărora forma secțiunii transversale a secțiunii nu se modifică și de asemenea planul transversal rămâne plan și normal la axa barei, în timpul deformării (Bernoulli-Euler), componentele deplasării unui punct oarecare P al secțiunii transversale pot fi exprimate în funcție de componentele deplasării punctului A , situat pe fibra medie a aceleiași secțiuni astfel (fig. 2.27.b):

$$u = u_0 - y \cdot \sin \alpha \approx u_0 - y \cdot \frac{dv_0}{dx} \quad (2.130)$$

$$v = v_0 - y \cdot (1 - \cos \alpha) \approx v_0 \quad (2.131)$$

unde:

$$\cos \alpha = \frac{dx + \frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot dx}{\sqrt{\left(dx + \frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \cdot dx\right)^2}} = \frac{1 + \frac{\partial u_0}{\partial x}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)^2}} \approx 1 \quad (2.132)$$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{\partial v_0}{\partial x} \cdot dx}{\sqrt{\left(dx + \frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} \cdot dx\right)^2}} = \frac{\frac{\partial v_0}{\partial x}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)^2}} \approx \frac{\partial v_0}{\partial x} \quad (2.133)$$

rezultând următoarea relație neliniară între deformații și deplasări în ipoteza deformațiilor mici și a rotirilor moderate:

$$e_x = \frac{du_0}{dx} - y \cdot \frac{d^2 v_0}{dx^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv_0}{dx} \right)^2 \quad (2.134)$$

Această relație va fi utilizată pe mai departe pentru determinarea energiei potențiale de deformație a elementului finit.

2.3.2 Relații neliniare între eforturi unitare și deformații specifice. Efectul neliniarității fizice.

La nivelul materialului neliniaritatea fizică este caracterizată prin relația neliniară între tensiuni și deformații:

$$\sigma = f(\varepsilon) \quad (2.135)$$

ce poate fi scrisă convențional sub forma liniarizată:

$$\sigma = E_s(\varepsilon) \cdot \varepsilon \quad (2.136)$$

Pe lângă această reprezentare finită se poate utiliza și o reprezentare diferențială, ce stabilește o legătură liniară între variațiile tensiunii σ și a deformației ε :

$$\delta\sigma = E_T(\varepsilon) \cdot \delta\varepsilon \quad (2.137)$$

Spre deosebire de cazul fizic liniar (elastic), modulii de elasticitate $E_s(\varepsilon)$ și $E_T(\varepsilon)$ depind de valoarea deformației ε și reprezintă rigiditatea secantă, respectiv tangenta a materialului. Pentru exemplificare, în figura 2.28 sunt prezentate formele simplificate ale curbelor caracteristice ale betonului (fig. 2.28.b) și a oțelului (fig. 2.28.a).

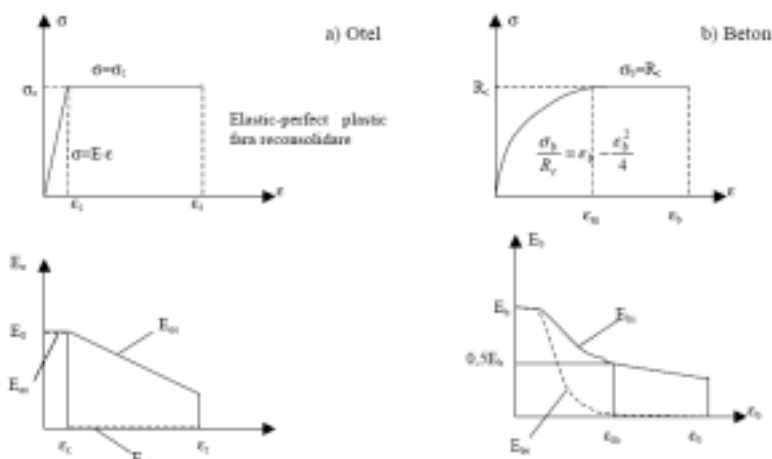


Fig.2.28. Curbe constitutive σ - ε teoretice utilizate pentru modelarea neliniarității fizice ale oțelului și ale betonului.

Astfel pentru modulii de deformație secant și tangent în cazul betonului se obțin următoarele relații:

- pentru $\varepsilon_b < \varepsilon_m$

$$\sigma_b = \frac{2 \cdot R_c}{\varepsilon_m} \cdot \left(1 - 0,5 \cdot \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_m}\right) \cdot \varepsilon_b = E_b \cdot \left(1 - 0,5 \cdot \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_m}\right) = E_{bs} \cdot \varepsilon_b, \quad (2.138)$$

deci modulul de deformație secant este egal cu:

$$E_{bs} = E_b \cdot \left(1 - 0,5 \cdot \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_m}\right) \quad (2.139)$$

Prin derivare se obține:

$$\frac{d\sigma_b}{d\varepsilon_b} = E_b \cdot \left[-0,5 \cdot \frac{1}{\varepsilon_m} \cdot \varepsilon_b + \left(1 - 0,5 \cdot \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_m} \right) \right] = E_b \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_m} \right), \quad (2.140)$$

$$d\sigma_b = E_b \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_m} \right) \cdot d\varepsilon_b \quad (2.141)$$

cu modulul de deformație tangent:

$$E_{bT} = E_b \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_b}{\varepsilon_m} \right) \quad (2.142)$$

- pentru $\varepsilon_m < \varepsilon_b \leq \bar{\varepsilon}_b$: $\sigma_b = R_c = \frac{R_c}{\varepsilon_b} \cdot \varepsilon_b$ cu modulul de deformație secant:

$$E_{bs} = \frac{R_c}{\varepsilon_b}, \text{ și cel tangent } E_{bT} = 0.$$

Forma simplificată a curbei caracteristice a oțelului este reprezentată în figura 2.28.a, împreună cu modulii de deformație corespunzători. Pentru deducerea matricelor caracteristice ale elementului finit, în continuare se utilizează această formă simplificată a modelării neliniarității materialului, corespunzătoare oțelului, și anume modelul elastic perfect plastic fără reconsolidare.

2.3.3 Determinarea matricelor caracteristice ale elementelor finite

Tipul de element finit utilizat în acest studiu este cel de bară dreaptă cu șase grade de libertate (3 grade de libertate pe nod), corespunzătoare deplasărilor axiale, verticale și rotirilor (fig. 2.29.a). Acceptând modelul de comporare elastic-perfect plastic al materialului (descărarea are loc considerând modulul de elasticitate inițial, iar reconsolidarea nu este luată în considerare), energia potențială de deformație a elementului finit poate fi scrisă în modul următor (Foley & Vinnakota, 1999):

$$U = \iint_{V_e} \sigma \cdot d\varepsilon \cdot dV_e + \int_{V_p} \left(\int_{\varepsilon_c}^{\varepsilon} \sigma \cdot d\varepsilon + \int_{\varepsilon_c}^{\varepsilon} \sigma_c \cdot d\varepsilon \right) \cdot dV_p \quad (2.143)$$

Legatură neliniară între deformația specifică axială (incrementală) și deplasări, față de sistemul de referință fix al secțiunii transversale curente a elementului finit (fig. 2.29.b), poate fi scrisă conform ecuației (2.134), acceptând comportarea elastică pe parcursul unui increment al încărcării, astfel:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - y \cdot \frac{d^2v}{dx^2} \quad (2.144)$$

Utilizând legea lui Hooke, ce stabilește relația între deformații și tensiuni, pentru fibrele secțiunilor transversale aflate în domeniul elastic, substituind relația (2.144) în (2.143) și efectuând integrările de suprafață, rezultă următoarea expresie a energiei potențiale de deformație pentru elementul finit parțial plastificat (fig. 2.29.b):

$$\begin{aligned}
U = & \frac{E}{2} \cdot \int \left[A_e \cdot \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - 2 \cdot S_{ze} \cdot \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right) \cdot \left(\frac{du}{dx} \right) + I_{ze} \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \right] \cdot dx + \\
& + \frac{E}{2} \cdot \int \left[A_e \cdot \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - S_{ze} \cdot \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right) \cdot \left(\frac{dv}{dx} \right) + \frac{A_e}{4} \cdot \left(\frac{dv}{dx} \right)^4 \right] \cdot dx + \\
& + \int \left[\int_{A_p} \sigma_c \cdot \left(\frac{du}{dx} \right) \cdot dA_p + \int_{A_p} \frac{1}{2} \cdot \sigma_c \cdot \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \cdot dA_p \right] \cdot dx - \\
& - \int \left[\int_{A_p} \sigma_c \cdot y \cdot \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right) \cdot dA_p + \frac{1}{2} \int_{A_p} \sigma_c \cdot \varepsilon_c \cdot dA_p \right] \cdot dx
\end{aligned} \tag{2.145}$$

În relația (2.145) caracteristicile secționale (aria, momentul static și momentul de inerție) ale secțiunilor transversale ale elementelor finite sunt determinate considerând doar porțiunea elastică rămasă (referențiate prin indicele "e"), și sunt determinate față de un sistem de referință fix, format de regulă, din axele principale ale secțiunii și având originea în centrul de greutate elastic inițial al secțiunii, conform figurii 2.29.b. Considerarea sistemului de referință fix, permite luarea în considerare a dezvoltărilor nesimetrice ale zonelor plastice în secțiune, precum și efectul excentricității de aplicare ale forțelor axiale. Caracteristicile secționale ale secțiunilor transversale pot fi exprimate pe baza următoarelor relații (fig. 2.29.b):

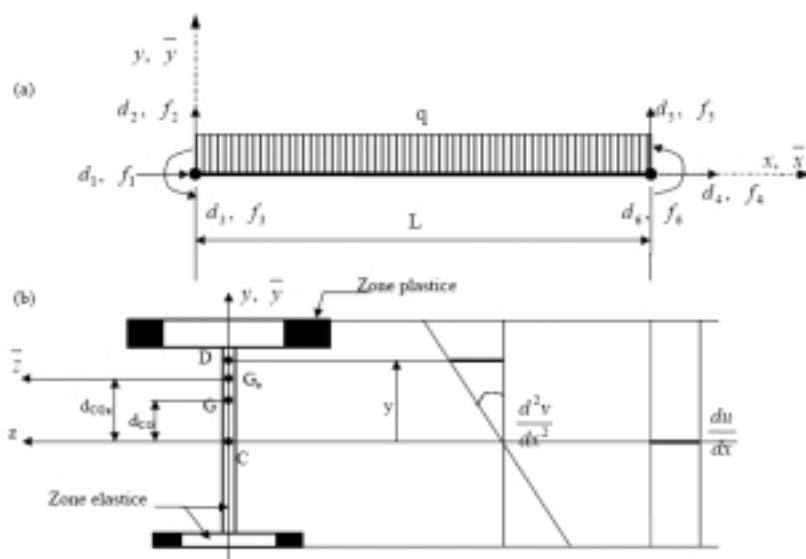


Fig. 2.29. Elementul finit de fibră.

$$A_e = \int_{A_e} dA_e, S_{ze} = \int_{A_e} y \cdot dA_e = A_e \cdot d_{CG_e}, I_{ze} = \int_{A_e} y^2 \cdot dA_e, A_p = \int dA_p \quad (2.146)$$

Rezultatele tensiunilor din zonele plastificate ale secțiunii pot fi exprimate:

$$N_{A_p} = \int_{A_p} \sigma_c \cdot dA_p, M_{A_p} = \int_{A_p} \sigma_c \cdot y \cdot dA_p \quad (2.147)$$

Astfel, cu notațiile de mai sus, energia potențială totală de deformare pentru elementul finit din figura 2.29.a, încărcat cu forța uniform distribuită q și forțele de capăt \mathbf{f} se scrie:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{E}{2} \cdot \int_b^L \left[A_e \cdot \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - 2 \cdot S_{ze} \cdot \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right) \cdot \left(\frac{du}{dx} \right) + I_{ze} \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 \right] \cdot dx + \\ & + \frac{E}{2} \cdot \int_b^L \left[A_e \cdot \left(\frac{du}{dx} \right) \cdot \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - S_{ze} \cdot \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right) \cdot \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{A_e}{4} \cdot \left(\frac{dv}{dx} \right)^4 \right] \cdot dx + \\ & + \int_b^L \left[N_{A_p} \cdot \left(\frac{du}{dx} \right) + \frac{N_{A_p}}{2} \cdot \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 - M_{A_p} \cdot \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right) - \frac{N_{A_p}}{2} \cdot \varepsilon_c \right] \cdot dx - \\ & - \int_b^L q \cdot v \cdot dx - \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{d} \end{aligned} \quad (2.148)$$

Pentru aproximarea câmpului de deplasări din interiorul elementului finit, se utilizează funcțiile standard de interpolare Lagrange pentru deplasările axiale și Hermite pentru deplasările transversale. Prin intermediul acestor funcții de interpolare se aproximează deplasările punctelor, din lungul axei de referință inițială (fixă) a elementului finit (fig. 2.29.a), după cele două direcții, longitudinale și transversale, în funcție de deplasările nodale cunoscute, considerând o variație liniară (Lagrange) pentru reprezentarea deplasărilor axiale, u , respectiv o variație polinomială cubică (Hermite) pentru reprezentarea deplasărilor transversale, v . Notând cu \mathbf{d} vectorul deplasărilor nodale ale elementului finit reprezentat în figura 2.29.a, câmpul de deplasări se poate exprima în funcție de vectorii de interpolare corespunzători deplasărilor axiale, \mathbf{N}_u și transversale, \mathbf{N}_v astfel:

$$u = \mathbf{N}_u \cdot \mathbf{d}; v = \mathbf{N}_v \cdot \mathbf{d} \quad (2.149)$$

unde:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_u &= \left[1 - \frac{x}{L}, 0, 0, \frac{x}{L}, 0, 0 \right] \\ \mathbf{N}_v &= \left[0, 1 - \frac{3}{L^2} \cdot x^2 + \frac{2}{L^3} \cdot x^3, x - \frac{2}{L} \cdot x^2 + \frac{1}{L^2} \cdot x^3, 0, \frac{3}{L^2} \cdot x^2 - \frac{2}{L^3} \cdot x^3, -\frac{1}{L} \cdot x^2 + \frac{1}{L^2} \cdot x^3 \right] \end{aligned} \quad (2.150)$$

Substituind relațiile (2.150) în (2.148) rezultă următoarea expresie a energiei potențiale totale de deformare a elementului finit în funcție de vectorul

deplasărilor nodale \mathbf{d} de la capetele elementului:

$$\begin{aligned}
\Pi = & \frac{E}{2} \cdot \int_0^L A_e \mathbf{d}^T \mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_u' dx + \frac{E}{2} \cdot \int_0^L I_e \mathbf{d}^T \mathbf{N}_v''^T \mathbf{N}_v'' dx - 2E \cdot \int_0^L S_{ze} \mathbf{d}^T \mathbf{N}_v''^T \mathbf{N}_u' dx + \\
& + \frac{E}{2} \cdot \int_0^L A_e \mathbf{d}^T \mathbf{N}_u'^T \mathbf{d}^T \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' dx + \frac{E}{8} \cdot \int_0^L A_e \mathbf{d}^T \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' \mathbf{d} \mathbf{d}^T \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' dx - \\
& - \frac{E}{2} \cdot \int_0^L S_{ze} \mathbf{d}^T \mathbf{N}_v''^T \mathbf{d}^T \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' dx + N_{A_p} \cdot \int_0^L \mathbf{d}^T \mathbf{N}_u'^T dx + \frac{N_{A_p}}{2} \cdot \int_0^L \mathbf{d}^T \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' dx + \\
& + M_{A_p} \cdot \int_0^L \mathbf{d}^T \mathbf{N}_v''^T dx - \int_0^L \mathbf{q} \mathbf{N}_v dx - \mathbf{f}^T \mathbf{d}
\end{aligned} \tag{2.151}$$

Aplicarea principiului deplasărilor virtuale este echivalentă cu minimizarea funcționalei (2.151) a energiei potențiale totale de deformare a elementului, adică anularea primei derivate a potențialului în raport cu toate deplasările nodale:

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{d}} \cdot \delta \mathbf{d}^T = 0 \tag{2.152}$$

care cu relația (2.151) devine:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{d}^T \int_0^L EA_e \mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_u' dx + \delta \mathbf{d}^T \int_0^L EI_e \mathbf{N}_v''^T \mathbf{N}_v'' dx - 4 \delta \mathbf{d}^T \int_0^L ES_{ze} \mathbf{N}_v''^T \mathbf{N}_u' dx + \delta \mathbf{d}^T \int_0^L \frac{EA_e}{2} \mathbf{N}_u'^T \mathbf{d}^T \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' dx + \\
+ \delta \mathbf{d}^T \int_0^L \frac{EA_e}{2} \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' \mathbf{d} \mathbf{N}_u' dx + \delta \mathbf{d}^T \int_0^L \frac{EA_e}{2} \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' \mathbf{d} \mathbf{N}_v' dx - \delta \mathbf{d}^T \int_0^L \frac{ES_{ze}}{2} \mathbf{N}_v''^T \mathbf{d}^T \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' dx - \\
- \delta \mathbf{d}^T \int_0^L \frac{ES_{ze}}{2} \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' \mathbf{d} \mathbf{N}_v'' dx - \delta \mathbf{d}^T \int_0^L \frac{ES_{ze}}{2} \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v'' \mathbf{d} \mathbf{N}_v' dx + \delta \mathbf{d}^T \int_0^L \frac{EA_e}{2} \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' \mathbf{d} \mathbf{d}^T \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' dx + \\
+ \delta \mathbf{d}^T \int_0^L N_{A_p} \mathbf{N}_u'^T dx + \delta \mathbf{d}^T \int_0^L N_{A_p} \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' dx + \delta \mathbf{d}^T \int_0^L M_{A_p} \mathbf{N}_v''^T dx - \delta \mathbf{d}^T \int_0^L \mathbf{q} \mathbf{N}_v dx - \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}^T = 0
\end{aligned} \tag{2.153}$$

Eliminând variația $\delta \mathbf{d}^T$ a deplasărilor și grupând în mod convenabil termenii ecuației neliniare (2.153) se poate obține relația neliniară forță-deplasare, în sensul metodei secantelor, între mărimile totale ale forțelor și ale deplasărilor:

$$\Psi(\mathbf{d}) \equiv \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{d} - \mathbf{F} = 0 \tag{2.154}$$

și care poate fi scrisă:

$$(\mathbf{K}_{0s} + \mathbf{K}_{1s} + \mathbf{K}_{2s} + \mathbf{K}_{3s}) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{f} + \int_0^L \mathbf{q} \cdot \mathbf{N}_v^T \cdot dx \tag{2.155}$$

în care:

$$\mathbf{K}_{0s} = \int_0^L EA_e \mathbf{N}_u'^T \mathbf{N}_u' dx + \int_0^L EI_e \mathbf{N}_v''^T \mathbf{N}_v'' dx - 4 \int_0^L ES_{ze} \mathbf{N}_v''^T \mathbf{N}_u' dx \tag{2.156}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{1s} = & \int_0^L \frac{EA_e}{2} \mathbf{N}_u'^T \mathbf{d}^T \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' dx + \int_0^L \frac{EA_e}{2} \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' \mathbf{d} \mathbf{N}_u' dx + \int_0^L \frac{EA_e}{2} \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' \mathbf{d} \mathbf{N}_v' dx - \\
& - \int_0^L \frac{ES_{ze}}{2} \mathbf{N}_v''^T \mathbf{d}^T \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' dx - \int_0^L \frac{ES_{ze}}{2} \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' \mathbf{d} \mathbf{N}_v'' dx - \int_0^L \frac{ES_{ze}}{2} \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v'' \mathbf{d} \mathbf{N}_v' dx
\end{aligned} \tag{2.157}$$

$$\mathbf{K}_{2s} = \int_0^L \frac{EA_e}{2} \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' \mathbf{d} \mathbf{d}^T \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' dx \tag{2.158}$$

$$\mathbf{K}_{3s} = \int N_{Ap} \mathbf{N}_v'^T \mathbf{N}_v' dx \quad (2.159)$$

În ecuația (2.156) \mathbf{K}_{0s} reprezintă matricea de rigiditate din calculul de ordinul I (este independentă de deplasările nodurilor elementului finit), dar care include efectul plastificării parțiale și nesimetrice ale secțiunilor din lungul elementului finit. Matricea \mathbf{K}_{3s} reprezintă matricea deplasărilor inițiale, exprimând aproximația de ordinul I a interacțiunii între rezultanta axială a tensiunilor din zonele plastificate ale secțiunilor plastificate și deplasările transversale. Matricele \mathbf{K}_{1s} și \mathbf{K}_{2s} reprezintă matricele rigidităților geometrice, în variaanta secantă, și exprimă efectul datorat solicitărilor de încovoiere cu efort axial, prin intermediul unor relații liniare respectiv pătratice între deplasările laterale și rotațiile nodurilor. De notat faptul că toate aceste matrici sunt exprimate în coordonatele locale ale elementului finit și sunt simetrice, rezultând în acest caz o matrice de rigiditate secantă totală simetrică.

Exprimând variația de ordinul II a energiei potențiale totale de deformare (2.151) a elementului finit rezultă expresia matricei de rigiditate tangentă, în coordonate locale, prin intermediul căreia se exprimă relația neliniară între variația forțelor și variația deplasărilor, și care poate fi scrisă simbolic, sub forma matriceală astfel:

$$\mathbf{K}_t \cdot \Delta \mathbf{d} = \Delta \mathbf{F} \quad (2.160)$$

unde $\Delta \mathbf{F}$ și $\Delta \mathbf{d}$ reprezintă vectorul variației forțelor și respectiv vectorul variației deplasărilor nodale ale elementului finit, în coordonate locale, iar \mathbf{K}_t reprezintă matricea de rigiditate tangentă care de asemenea poate fi scrisă ca suma a patru matrici:

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{K}_{0t} + \mathbf{K}_{1t} + \mathbf{K}_{2t} + \mathbf{K}_{3t} \quad (2.161)$$

a caror semnificație este similară cu cea dată anterior, în cazul matricei de rigiditate secantă.

Considerarea dezvoltării zonelor plastice în secțiunile transversale ale elementelor finite se face prin împărțirea acestor secțiuni printr-un cadrulaj de ochiuri dreptunghiulare (fig. 2.30) și explicitarea deformațiilor în dreptul acestora utilizând ecuația (2.150) în funcție de valorile deplasărilor incrementale de la capetele elementului finit, actualizându-se astfel la fiecare pas valorile deformațiilor totale, pe baza deformațiilor din pașii anteriori:

$$\varepsilon_i^k = \varepsilon_i^{k-1} + \Delta \varepsilon_i^k \quad (2.162a)$$

$$\Delta \varepsilon_i^k = \mathbf{N}_u' \cdot \Delta \mathbf{d}^{k-1} + \frac{1}{2} \cdot \Delta \mathbf{d}^{k-1T} \cdot \mathbf{N}_v''^T \cdot \mathbf{N}_v'' \cdot \Delta \mathbf{d}^{k-1} - y_i \cdot \mathbf{N}_v'' \cdot \Delta \mathbf{d}^{k-1} + \varepsilon_{ri} \quad (2.162.b)$$

Prin monitorizarea explicită a deformațiilor în fiecare fibră a secțiunii transversale, pentru fiecare increment al încărcării, prin intermediul relațiilor (2.162), se ia în considerare cu maximă acuratețe dezvoltarea graduală a zonelor plastice și a descărcărilor elastice în fibrele secțiunii precum și influența deformațiilor din tensiuni reziduale, ε_{ri} , asupra caracteristicilor de deformabilitate și rigiditate ale

secțiunilor. O fibră se consideră plasticată în momentul în care deformația totală corespunzătoare unui anumit increment k al încărcării depășește valoarea deformației de inițiere a curgerii ϵ_c .

Pentru evaluare integralelor de suprafață care intervin în relațiile (2.146) și (2.147), de determinare a caracteristicilor de rigiditate ale secțiunilor transversale, se pot utiliza diferite metode numerice de integrare numerică cum ar fi metoda Simpson sau metoda Gauss. Deși metoda Gauss este în general mai eficientă din punct de vedere al numărului de puncte utilizate (la același număr de puncte de integrare are o precizie mai bună decât metoda Simpson) deseori în programele de analiză este utilizată metoda Simpson. Motivul principal al acestei alegeri îl constituie faptul că rețeaua de puncte de integrare presupusă de metoda Simpson surprinde și frontiera domeniului de integrare, adică tocmai fibrele cele mai puternic solicitate, în timp ce metoda Gauss nu consideră puncte de integrare în aceste zone.

Matricele de rigiditate secantă respectiv tangentă ale elementelor finite pot fi determinate doar aproximativ prin intermediul unor metode numerice de integrare numerică a funcțiilor de o singură variabilă, deoarece caracteristicile de rigiditate ale secțiunilor din lungul elementelor finite, ce intervin în expresiile matricelor de rigiditate, sunt mărimi cu caracter discret, ce depind de valoarea deplasărilor de la capetele elementului. Cea mai eficientă metodă de integrare numerică, utilizată în acest caz, ca urmare a considerării unei variații polinomiale ale deplasărilor în interiorul elementului finit, este considerată a fi metoda Gauss în diferite variante (Gauss-Legendre, Gauss-Lobatto). În figura 2.30 se prezintă modul de discretizare a elementului de bară în elemente finite și a secțiunilor transversale din dreptul punctelor de integrare numerică Gauss a elementelor finite.

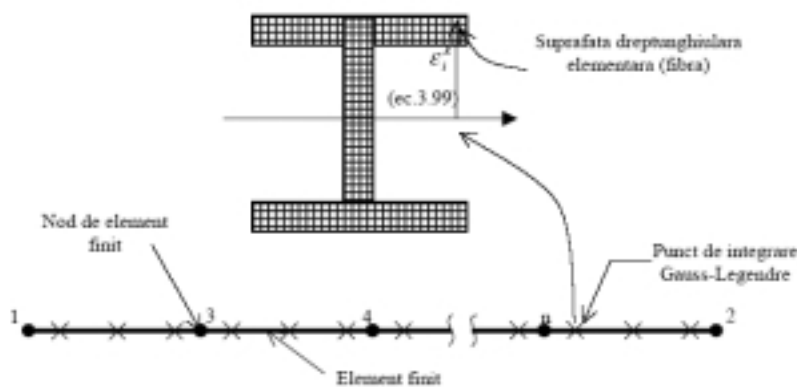


Fig.2.30. Discretizarea elementelor de bară în elemente finite de fibră.

Întrucât la determinarea matricelor de rigiditate ale elementelor finite, în coordonate locale, relația între deformații și deplasări s-a considerat a fi cea

corespunzătoare ipotezei deformațiilor mici dar finite și a rotirilor medii, deplasările incrementale nodale pe baza cărora se determină deformațiile corespunzătoare, din pasul curent al încărcării, se determină față de sistemul de coordonate local al elementului finit corespunzătoare configurației geometrice din pasul anterior (fig. 2.31).

Pentru determinarea matricelor de rigiditate în sistemul global de referință a structurii se utilizează matricea de transformare \mathbf{R} , prin intermediul căreia matricele de rigiditate incrementale exprimate în coordonatele locale (coordoanatele elementului) se trec în coordonatele globale ale structurii conform relației:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{R} \quad (2.163)$$

în care \mathbf{K}_e reprezintă matricea de rigiditate a elementului finit în coordonatele globale ale structurii; \mathbf{k} reprezintă matricea de rigiditate a elementului finit în coordonatele locale ale acestuia; iar \mathbf{R} reprezintă matricea de transformare a cărei expresie în funcție de unghiul făcut de axele sistemului de referință local cu cele ale sistemului de referință global este:

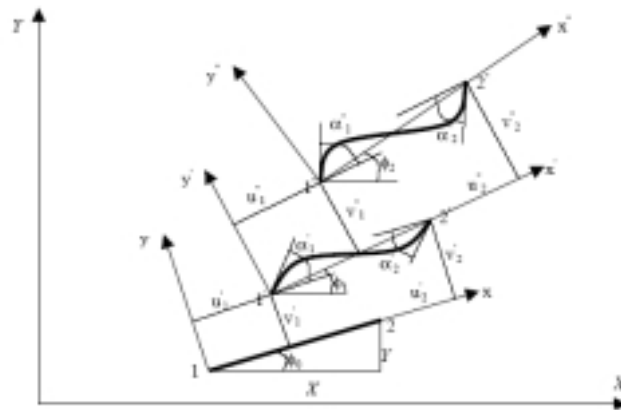


Fig. 2.31. Coordonatele locale și globale ale elementului finit.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.164)$$

și care este reactualizată după fiecare increment al încărcării.

2.4 EFECTUL GLOBAL AL NELINIARITĂȚII GEOMETRICE

Considerarea în calcul a deplasărilor și rotirilor de dimensiuni finite influențează atât rigiditatea de ansamblu a structurii precum și evaluarea forțelor neechilibrate la nivel de structură. De fiecare dată intervine o altă configurație geometrică a structurii, caracterizată prin deplasările și rotirile de noduri care au fost calculate în ciclul precedent. Aceasta influențează atât formarea matricelor de rigiditate ale elementelor în sistemul local de axe, cât și trecerea acestora în sistemul global de referință al structurii în vederea asamblării. Matricea de rigiditate globală obținută prin însumarea matricelor de rigiditate ale fiecărui element component al structurii, presupune transformarea matricei de rigiditate a fiecărui element de bară din sistemul local-variabil în timpul procesului de încărcare- în sistemul global de referință al structurii. În principiu, operația de transformare păstrează forma generală utilizată la calculul structurilor în domeniul micilor deplasări:

$$\mathbf{K} = \sum_{b=1, Nrbare} \mathbf{R}_b^T \mathbf{k}_b \mathbf{R}_b \quad (2.165)$$

dar matricea de rotație \mathbf{R} se referă la poziția deformată a structurii și deci trebuie reactualizată la sfârșitul fiecărui ciclu de încărcare în concordanță cu noua configurație geometrică a elementului. De asemenea, în cadrul procesului iterativ de corectare a sarcinilor neechilibrate presupune transformarea forțelor nodale rezultate la nivel de element din sistemul local în sistemul global de referință și deci aceași matrice de transformare, variabilă de la un ciclu de încărcare la altul, trebuie să fie utilizată în acest scop. Tratarea adecvată a acestei etape este esențială în determinarea forțelor neechilibrate și deci a determina curba neliniară reală de comportare a structurii. În literatura de specialitate acest efect de considerare în calcul a deplasărilor finite este cunoscut sub denumirea de efectul neliniarității geometrice globale fiind propuse în acest scop diferite metode pentru luarea în considerare a acestui efect. Aceste metode pot fi clasificate în funcție de sistemul de referință ales (configurația inițială nedeformată-Lagrangianul total, respectiv ultima configurație-Lagrangianul actualizat- de echilibru) pentru reactualizarea matricelor de transformare și ipotezele legate de ordinul de mărime a deplasărilor și rotirilor luate în calcul pe parcursul unui increment de încărcare.

Astfel, efectul neliniarității geometrice globale, datorat modificării configurației geometrice a structurii, poate fi considerat fie prin translația matricei de rigiditate exprimată în deformațiile barei, în funcție de deplasările nodale printr-o transformare neliniară, fie direct prin reactualizarea la fiecare etapa de calcul a matricei de rotație conform cu relația (2.165). În acest sens, formarea matricei de rotație \mathbf{R}_b pentru o noua configurație geometrică implică recalcularea cosinuşilor directori ai barelor structurii și implicit a noilor lungimi reactualizate ale barelor. Trebuie ținut însă seama că, de această dată, deformata structurii nu se mai încadrează în domeniul micilor deplasări și rotiri și deci nu mai pot fi utilizate aceleași expresii simplificate pentru matricele de transformare ca și în cazul structurilor cu deplasări mici. În plus, o problemă specifică legată de tratarea

rotirilor mari aplicate unui solid rigid în spațiu o reprezintă ordinea de aplicare a rotirilor.

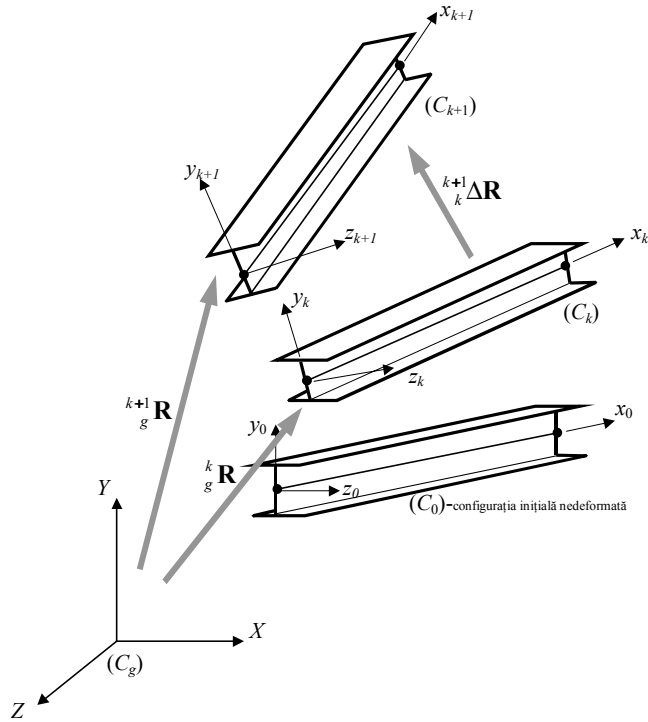


Fig.2.32.Efectul global al neliniarității geometrice.

Astfel, considerând cunoscută matricea de transformare de la componentele în sistemul global de axe la componentele în sistemul local, ${}^k_g \mathbf{R}$, (fig. 2.32) trecerea de la sistemul global de axe la sistemul propriu de axe al barei corespunzător configurației de echilibru $k+1$ se poate scrie sub forma:

$${}^{k+1}_g \mathbf{R} = {}^{k+1}_k \Delta \mathbf{R} {}^k_g \mathbf{R} \quad (2.166)$$

unde cu ${}^{k+1}_k \Delta \mathbf{R}$ s-a notat matricea de rotație incrementală ce relaționează configurațiile (C_k) și (C_{k+1}) și care poate fi exprimată astfel:

$${}^{k+1}_k \Delta \mathbf{R} = \begin{bmatrix} {}^{k+1}\lambda_x \cdot {}^k\lambda_x & {}^{k+1}\lambda_x \cdot {}^k\lambda_y & {}^{k+1}\lambda_x \cdot {}^k\lambda_z \\ {}^{k+1}\lambda_y \cdot {}^k\lambda_x & {}^{k+1}\lambda_y \cdot {}^k\lambda_y & {}^{k+1}\lambda_y \cdot {}^k\lambda_z \\ {}^{k+1}\lambda_z \cdot {}^k\lambda_x & {}^{k+1}\lambda_z \cdot {}^k\lambda_y & {}^{k+1}\lambda_z \cdot {}^k\lambda_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta {}^{k+1}\lambda_x \\ \Delta {}^{k+1}\lambda_y \\ \Delta {}^{k+1}\lambda_z \end{bmatrix} \quad (2.167)$$

și în care λ_x , λ_y , λ_z reprezintă vectorii de orientare a axelor proprii ale barei în cele două configurații k respectiv $k+1$. În figura 2.32 este prezentat acest aspect pentru cazul unui profil dublu T. Astfel, simpla extindere a metodelor de

transformare aplicată în cazul structurilor plane nu mai poate fi aplicată la structurile spațiale datorită necomutativității operațiilor de rotație față de un sistem de axe tri-dimensional, sistemul de vectori rezultați $[\Delta^{k+1}\lambda_x \quad \Delta^{k+1}\lambda_y \quad \Delta^{k+1}\lambda_z]^T$ ne mai constituind o bază ortonormată, conducând la acumularea erorilor pe parcursul procesului de calcul.

2.4.1. Matricea de rotație. Formula lui Rodrigues

În cele ce urmează se vor descrie câteva considerente teoretice legate de tratarea rotirilor mari în spațiu. Sunt deduse formulele utilizate la reactualizarea matricei de rotație în timpul procesului incremental.

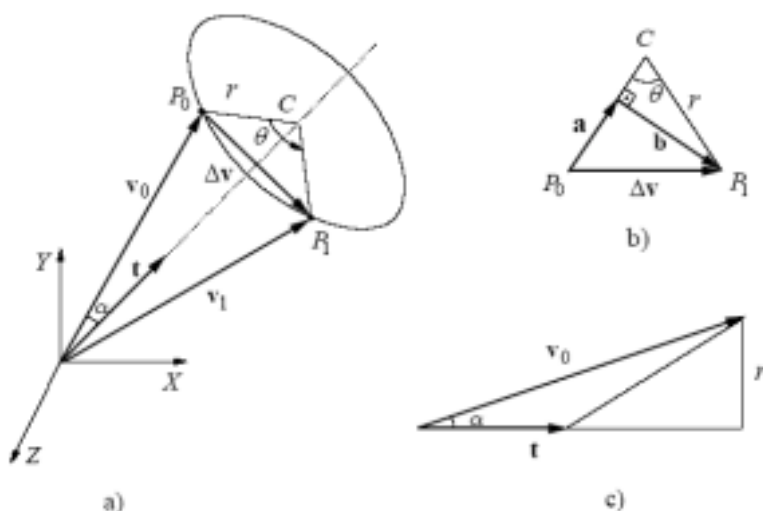


Fig. 2.33.

Fie \mathbf{v}_0 vectorul de poziție al unui punct P_0 în raport cu un sistem de referință fix (X, Y, Z) așa cum este prezentat în figura 2.33. Vectorul \mathbf{v}_0 este rotit față de versorul \mathbf{t} cu unghiul θ rezultând un nou vector de poziție \mathbf{v}_1 care definește poziția punctului P_1 . Fie $\Delta\mathbf{v}$ vectorul orientat cu originea în P_0 și extremitatea în P_1 astfel încât putem scrie:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \Delta\mathbf{v} \quad (2.168)$$

Întrucât punctul P_0 este rotit față de vectorul \mathbf{t} el va descrie un cerc de rază r cu centrul în punctul C (Fig. 2.33). Considerăm triunghiul P_0P_1C vectorul $\Delta\mathbf{v}$ se poate obține prin operația de adunare a vectorilor ortogonali astfel:

$$\Delta\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (2.169)$$

Fie \mathbf{b} vectorul ortogonal la vectorii \mathbf{t} și \mathbf{v}_0 :

$$\mathbf{b} = b \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{v}_0}{\|\mathbf{t} \times \mathbf{v}_0\|} \quad (2.170)$$

având norma:

$$b = \|\mathbf{b}\| = r \sin \theta \quad (2.170')$$

și în care raza r poate fi calculată ca și norma produsului vectorial dintre versorul \mathbf{t} și vectorul \mathbf{v}_0 :

$$\|\mathbf{t} \times \mathbf{v}_0\| = v_0 \sin \alpha = r \quad (2.171)$$

unde α este unghiul dintre vectorii \mathbf{t} și \mathbf{v}_0 . Astfel vectorul \mathbf{b} poate fi exprimat în modul următor:

$$\mathbf{b} = \sin \theta (\mathbf{t} \times \mathbf{v}_0) \quad (2.172)$$

Fie \mathbf{a} vectorul ortogonal la vectorii \mathbf{t} și \mathbf{b} așa cum este prezentat în Fig. 2.33.

$$\mathbf{a} = a \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{t} \times \mathbf{b}\|} \quad (2.173)$$

având norma:

$$a = \|\mathbf{a}\| = r(1 - \cos \theta) \quad (2.174)$$

Înlocuind relația (2.170) în relația (2.173) rezultă:

$$\mathbf{a} = a \frac{\mathbf{t} \times (\mathbf{t} \times \mathbf{v}_0)}{\|\mathbf{t} \times (\mathbf{t} \times \mathbf{v}_0)\|} = a \frac{\mathbf{t} \times (\mathbf{t} \times \mathbf{v}_0)}{\|(\mathbf{t} \times \mathbf{v}_0)\|^2} \quad (2.175)$$

care se mai poate scrie:

$$\mathbf{a} = (1 - \cos \theta) (\mathbf{t} \times (\mathbf{t} \times \mathbf{v}_0)) \quad (2.175')$$

Pe baza relațiilor de mai sus expresia vectorului \mathbf{v}_1 devine:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{v}_0 + \sin \theta (\mathbf{t} \times \mathbf{v}_0) + (1 - \cos \theta) (\mathbf{t} \times (\mathbf{t} \times \mathbf{v}_0)) \quad (2.176)$$

În continuare unghiul θ este tratat ca și un “pseudo-vector” (Yang s.al., 2003) care este paralel cu vectorul \mathbf{t} și având norma egală cu unghiul de rotație θ :

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T = \theta \mathbf{t} \quad (2.177)$$

$$\|\boldsymbol{\theta}\| = \theta$$

Denumirea de “pseudo-vector” este atribuită întrucât rotirea nu satisface toate proprietățile vectorilor. Trebuie notat faptul că în cazul unor rotații infinitezimale componentele $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ pot fi considerate ca și componente de rotație față de axele X, Y, Z , în cazul rotațiilor finite acest lucru nu mai poate fi valabil. Pe baza relației (2.168) expresia vectorului \mathbf{v}_1 devine:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \frac{\sin \theta}{\theta} (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{v}_0) + \frac{(1 - \cos \theta)}{\theta^2} (\boldsymbol{\theta} \times (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{v}_0)) \quad (2.178)$$

Produsul vectorial a doi vectori $\mathbf{w} = [w_1 \quad w_2 \quad w_3]^T$, $\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T$ poate fi exprimat astfel:

$$\mathbf{w} \times \mathbf{v} = \begin{Bmatrix} w_2 v_3 - w_3 v_2 \\ w_3 v_1 - w_1 v_3 \\ w_1 v_2 - w_2 v_1 \end{Bmatrix} = \mathbf{S}(\mathbf{w})\mathbf{v} \quad (2.179)$$

unde:

$$\mathbf{S}(\mathbf{w}) \equiv \text{spin}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.180)$$

Pe baza relației (2.180) expresia vectorului \mathbf{v}_1 devine:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{v}_0 + \frac{(1 - \cos \theta)}{\theta^2} \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{v}_0 \quad (2.181)$$

sau scrisă într-o formă compactă:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{v}_0 \quad (2.182)$$

unde:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I} + \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{(1 - \cos \theta)}{\theta^2} \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})^2 = \mathbf{I} + \sin \theta \mathbf{S}(\mathbf{t}) + (1 - \cos \theta) \mathbf{S}(\mathbf{t})^2 \quad (2.183)$$

reprezintă matricea de rotație, \mathbf{I} este matricea unitate, iar relația (2.183) poartă denumirea de formula Rodrigues. O formă alternativă la cea dată de relația (2.183) se poate obține dezvoltând în serie trigonometrică funcțiile sinus și cosinus:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \theta - \frac{1}{3!} \theta^3 + \frac{1}{5!} \theta^5 - \frac{1}{7!} \theta^7 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \theta^{(2n+1)} + \dots \\ \cos \theta &= 1 - \frac{1}{2!} \theta^2 + \frac{1}{4!} \theta^4 - \frac{1}{6!} \theta^6 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \theta^{2n} + \dots \end{aligned} \quad (2.184)$$

care împreună cu relația (2.183) rezultă:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) &= \mathbf{I} + \left(1 - \frac{1}{3!} \theta^2 + \frac{1}{5!} \theta^4 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} \theta^{2n} + \dots \right) \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) + \\ &+ \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} \theta^2 + \frac{1}{6!} \theta^4 - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+2)!} \theta^{2n} + \dots \right) \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})^2 \end{aligned} \quad (2.185)$$

Exprimând puterile matricei \mathbf{S} rezultă următoarele relații:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^3 &= -\theta^2 \mathbf{S}; \quad \mathbf{S}^4 = -\theta^2 \mathbf{S}^2 \\ \mathbf{S}^5 &= \theta^4 \mathbf{S}; \quad \mathbf{S}^6 = \theta^4 \mathbf{S}^2 \end{aligned} \quad (2.186)$$

care conduc la următoarea relație de recurență:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{2n-1} &= (-1)^{n-1} \theta^{2(n-1)} \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^{2n} &= (-1)^{n-1} \theta^{2(n-1)} \mathbf{S}^2 \end{aligned} \quad (2.187)$$

Înlocuind aceste relații în relația (2.185) rezultă:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{I} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{2!} \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})^3 + \dots + \frac{1}{n!} \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})^n + \dots = \exp(\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})) = e^{\mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})} \quad (2.188)$$

Se poate ușor observa că reținând doar primii doi termeni din expresia matricei de rotație \mathbf{R} dată de relația de mai sus se obține relația utilizată în cazul rotirilor infinitezimale:

$$\mathbf{R}_1(\boldsymbol{\theta}) \cong \mathbf{I} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 1 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 1 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.189)$$

Cu o bună aproximație, în calculele practice, pentru considerarea rotirilor mari se poate utiliza relația (2.188) în care se rețin doar primii trei termeni:

$$\mathbf{R}_2(\boldsymbol{\theta}) \cong \mathbf{I} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{S}(\boldsymbol{\theta})^2 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\theta_2^2 + \theta_3^2}{2} & -\theta_3 + \frac{\theta_1\theta_2}{2} & \theta_2 + \frac{\theta_1\theta_3}{2} \\ \theta_3 + \frac{\theta_1\theta_2}{2} & 1 - \frac{\theta_1^2 + \theta_3^2}{2} & -\theta_1 + \frac{\theta_2\theta_3}{2} \\ -\theta_2 + \frac{\theta_1\theta_3}{2} & \theta_1 + \frac{\theta_2\theta_3}{2} & 1 - \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{2} \end{bmatrix} \quad (2.190)$$

2.4.2 Matricea de transformare pentru elementul de bară spațial în configurația inițială nedeformată

Să considerăm elementul de bară raportat la sistemul de coordonate fix ($OXYZ$) (Fig.2.34). În raport cu acest sistem, orientarea în spațiu a elementului de bară este definită de versorii $\boldsymbol{\lambda}_x, \boldsymbol{\lambda}_y, \boldsymbol{\lambda}_z$ atașați barei după direcția pozitivă a sistemului de axe local barei ($axyz$) așa cum este prezentat în figura 2.34. Vectorul $\boldsymbol{\lambda}_x$ se poate obține simplu ca și în cazul structurilor plane:

$$\boldsymbol{\lambda}_x = \frac{1}{L} \mathbf{X}_{ab} \quad (2.191)$$

unde $\mathbf{X}_{ab} = \mathbf{X}_b - \mathbf{X}_a$ iar

$$L = \|\mathbf{X}_{ab}\| = (\mathbf{X}_{ab}^T \mathbf{X}_{ab})^{1/2} = \sqrt{(X_b - X_a)^2 + (Y_b - Y_a)^2 + (Z_b - Z_a)^2} \quad (2.192)$$

și reprezintă lungimea elementului de bară în configurația inițială (nedeformată). Pentru definirea celorlalți doi vectori $\boldsymbol{\lambda}_y$ și $\boldsymbol{\lambda}_z$ este necesar definirea în planul median al barei xaz a unui vector \mathbf{v} astfel încât cei doi vectori pot fi exprimați astfel:

$$\boldsymbol{\lambda}_y = \frac{\mathbf{v} \times \boldsymbol{\lambda}_x}{\|\mathbf{v} \times \boldsymbol{\lambda}_x\|} \quad (2.193)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_z = \boldsymbol{\lambda}_x \times \boldsymbol{\lambda}_y$$

Având definite componentele triedrului:

$$\mathbf{r} = [\boldsymbol{\lambda}_x \quad \boldsymbol{\lambda}_y \quad \boldsymbol{\lambda}_z]^T \quad (2.194)$$

orientarea barei în raport cu sistemul de axe global este complet definită. Triedrul definit de relația (2.194) corespunde unei matrici de rotație utilizată la exprimarea

vectorilor deplasări și eforturi din sistemul global în sistemul local de coordonate. În cazul unui element de bară de cadru spațial cu 6 grade de libertate asociate unui nod, 3 translații și 3 rotații, (Fig. 2.35), această matrice de transformare are următoarea formă:

$$\mathbf{R}_{12 \times 12} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{3 \times 3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{r}_{3 \times 3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{r}_{3 \times 3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{r}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (2.195)$$

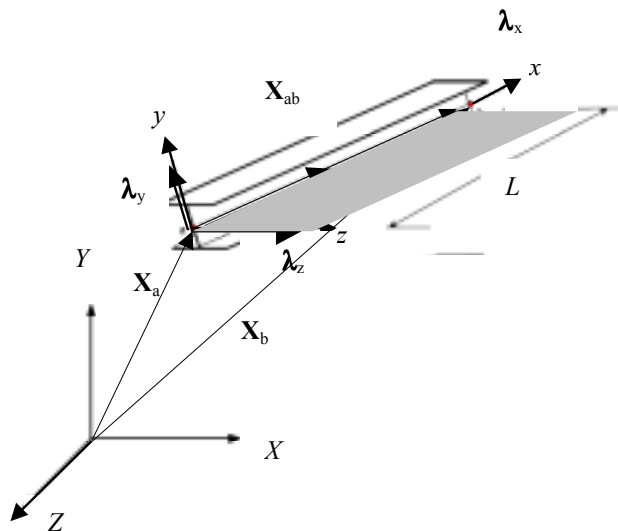


Fig. 2.34. Elementul de bară spațial în configurația inițială nedeformată.

Stabilirea unei forme sistematizate a matricei \mathbf{R} în care toate elementele să fie exprimate în funcție de un număr restrâns de date este prezentată în continuare. Se observă că într-o extremitate a barei intervin câte doi vectori de câte trei componente dirijați după axele sistemului de referință local, anume un vector cu trei componente-forțe sau deplasări liniare și un vector cu trei componente-momente sau rotații. Spre a trece de la un sistem de referință la celălalt, este necesar să se efectueze transformarea pentru fiecare din acești doi vectori, prin intermediul matricei de transformare \mathbf{r} de dimensiuni (3x3), care permite exprimarea componentelor într-un sistem de axe, în funcție de componentele din celălalt sistem.

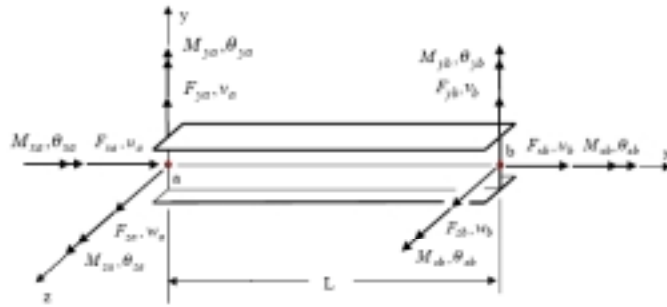


Fig. 2.35. Setul fundamental al deplasărilor și eforturilor pentru bara dreaptă de cadru spațial

Dacă \mathbf{v} este matricea coloană a componentelor în sistemul de axe propriu al barei, iar \mathbf{V} este matricea coloană a componentelor în sistemul global, matricea de transformare \mathbf{r} se definește sub forma:

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{V} = [\lambda_x \quad \lambda_y \quad \lambda_z]^T \cdot \mathbf{V} \quad (2.196)$$

unde $(\lambda_{xx} \quad \lambda_{xy} \quad \lambda_{xz})$, $(\lambda_{yx} \quad \lambda_{yy} \quad \lambda_{yz})$, $(\lambda_{zx} \quad \lambda_{zy} \quad \lambda_{zz})$ reprezintă componentele scalare (cosinuzii directori) ale versorilor definiți de relațiile (2.191) și (2.193). Deoarece matricea \mathbf{r} se referă la un singur vector de trei componente, pentru transformarea eforturilor de capăt, sau a deplasărilor de capăt dintr-o extremitate a barei este necesar să se utilizeze două asemenea matrice, iar pentru ansamblul barei patru matrice, dispuse astfel încât să se multiplice succesiv vectorii. Printr-o succesiune de transformări efectuate cu ajutorul unor rotații în jurul câte uneia din cele trei axe de referință globală XYZ , se pot stabili elementele matricei \mathbf{r} în funcție de cei trei cosinuzi directori ai axei x (componentele scalare ale versorului λ_x), eliminând necesitatea de a stabili direct mărimile cosinuzilor directori pentru fiecare dintre cele trei axe de referință ale barei (Gheorghiu, 1980). Astfel, în cazul general, când orientarea axelor principale ale secțiunii barei și deci sistemul local (xyz) sunt oarecare expresia pentru matricea de rotație \mathbf{r} este definită de următoarele relații:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ -\frac{\lambda_{xx}\lambda_{xy}}{\sqrt{\lambda_{xx}^2 + \lambda_{xz}^2}} & \sqrt{\lambda_{xx}^2 + \lambda_{xz}^2} & -\frac{\lambda_{xy}\lambda_{xz}}{\sqrt{\lambda_{xx}^2 + \lambda_{xz}^2}} \\ -\frac{\lambda_{xz}}{\sqrt{\lambda_{xx}^2 + \lambda_{xz}^2}} & 0 & -\frac{\lambda_{xx}}{\sqrt{\lambda_{xx}^2 + \lambda_{xz}^2}} \end{bmatrix} \quad (2.197)$$

unde cosinuşii directori ai axei x au următoarele expresii:

$$\begin{aligned}\lambda_{xx} &= \frac{X_b - X_a}{L} \\ \lambda_{xy} &= \frac{Y_b - Y_a}{L} \\ \lambda_{xz} &= \frac{Z_b - Z_a}{L}\end{aligned}\quad (2.198)$$

iar unghiul α reprezintă unghiul de rotaţie al axelor principale de inerţie ale secţiunii barei (considerată fără distorsiuni locale în lungul ei) în raport cu sistemul general de axe (fig. 2.34). Definirea matricei de rotaţie \mathbf{r} cu relaţia (2.197) este valabilă în toate situaţiile cu excepţia cazului în care axa x este paralelă cu axa Y . În acest din urmă caz matricea de rotaţie \mathbf{r} este definită de relaţia:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \lambda_{xy} & 0 \\ -\lambda_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\quad (2.199)$$

În cazul unei analize, în limitele micilor deplasări, relaţiile de mai sus pot fi utilizate pentru operaţiile de transformare ale matricei de rigiditate din sistemul local în sistemul global dar, în situaţia în care deplasările şi rotirile se consideră finite, sunt necesare procedee specifice care au la bază formulele lui Rodrigues capabile să considere necomutativitatea rotirilor faţă de un sistem de axe tridimensional.

2.4.3 Calculul structurilor cu deplasări şi rotiri mari. Transformări de coordonate neliniare

Întrucât relaţiile de transformare dintre deplasările raportate la sistemul coordonatelor de bază şi cele raportate la sistemul coordonatelor locale rezultă neliniare efectul neliniarităţii geometrice globale, datorat modificării configuraţiei geometrice a structurii, poate fi considerat prin translaţia matricei de rigiditate exprimată în deformaţiile barei, în exprimare în funcţie de deplasările nodale printr-o transformare neliniară, şi reactualizarea la fiecare etapă de calcul a configuraţiei geometrice a structurii în funcţie de deplasările generalizate ale nodurilor structurii. Reactualizarea geometriei structurii coroborată cu un set de relaţii de tip “secant” de determinare a forţelor interne raportate la forma deformată a structurii este necesară în vederea determinării forţelor neechilibrate la nivel de structură şi corectarea acestora printr-un procedeu iterativ adecvat. În timpul procesului de încărcare secţiunile de capăt ale elementului de bară spaţial se vor roti în spaţiu. Orientarea acestor secţiuni poate fi definită pe baza unui sistem triversor ataşat, şi a căror orientare în spaţiu este determinată de deplasările şi rotirile globale nodale înregistrate în timpul procesului de încărcare, conform cu figura 2.36:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_I &= [\mathbf{n}_{I1} \quad \mathbf{n}_{I2} \quad \mathbf{n}_{I3}] \\ \mathbf{n}_J &= [\mathbf{n}_{J1} \quad \mathbf{n}_{J2} \quad \mathbf{n}_{J3}] \end{aligned} \quad (2.200)$$

Pentru configurația inițială (nedeformată) sistemul de versori de mai sus sunt echivalenți cu sistemul de versori ce definesc sistemul local de axe al elementului în configurația nedeformată:

$$\mathbf{n}_{I0} = \mathbf{n}_{J0} = \mathbf{r} \quad (2.201)$$

Întrucât versorul λ_x definește orientarea axei elementului componentele \mathbf{n}_{I1} și \mathbf{n}_{J1} ai sistemului de versori atașați capetelor elementului de bară vor fi definiți ca tangenți axei deformată a elementului de bară, fig. 2.36, componentele 2 și 3 definesc orientarea sistemului de axe local (y,z) de la capetele elementului în configurația rotită.

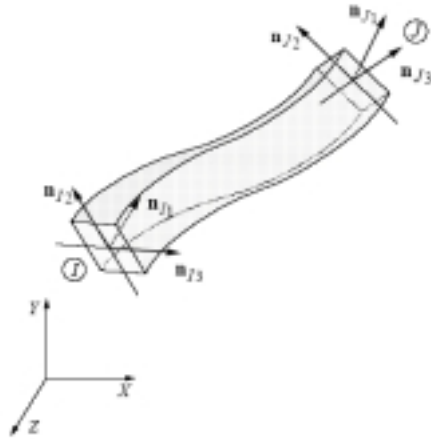


Fig. 2.36. Sistemul triversor asociat secțiunilor de capăt ale elementului de bară.

Definind în continuare, pentru fiecare nod al elementului, vectorul de rotație $\boldsymbol{\theta}$ care are ca și componente rotirile nodale globale, $\boldsymbol{\theta} = [\theta_x \quad \theta_y \quad \theta_z]$, reactualizarea sistemului de versori \mathbf{n}_I și \mathbf{n}_J poate fi realizată prin rotirea triedrului \mathbf{r} cu vectorii de rotație nodali definiți mai sus astfel:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_I &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_I) \mathbf{n}_{I0} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_I) \mathbf{r} \\ \mathbf{n}_J &= \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_J) \mathbf{n}_{J0} = \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_J) \mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.202)$$

În relațiile de mai sus s-a considerat ca și configurație de referință configurația inițială nedeformată. În cazul în care se consideră ultima configurație de echilibru, notată cu $k-1$ ca și configurație de referință relațiile pe baza cărora se reactualizează sistemul de versori \mathbf{n}_I și \mathbf{n}_J în configurația k sunt:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{I,k} &= \mathbf{R}(\Delta\boldsymbol{\theta}_I) \mathbf{n}_{I,k-1} \\ \mathbf{n}_{J,k} &= \mathbf{R}(\Delta\boldsymbol{\theta}_J) \mathbf{n}_{J,k-1} \end{aligned} \quad (2.203)$$

unde cu $\Delta\theta$ s-a notat incrementul de rotire iar \mathbf{R} reprezintă matricea de rotație construită pe baza formulei lui Rodrigues.

O bară, element constitutiv al unei structuri, este raportată la trei sisteme de coordonate: sistemul coordonatelor de bază ale elementului, fig. 2.37, corespunzător deformațiilor și forțelor:

$${}^c \mathbf{u} = [\alpha_{ay} \quad \alpha_{az} \quad \alpha_{by} \quad \alpha_{bz} \quad \Delta \quad \theta_T] \quad (2.204)$$

$${}^c \mathbf{f} = [m_{ay} \quad m_{az} \quad m_{by} \quad m_{bz} \quad f_x \quad m_T]$$

sistemul coordonatelor de element (locale) corespunzător deplasărilor și rotirilor nodale:

$${}^i \mathbf{u} = [u_a \quad v_a \quad w_a \quad \theta_{ax} \quad \theta_{ay} \quad \theta_{az} \quad u_b \quad v_b \quad w_b \quad \theta_{bx} \quad \theta_{by} \quad \theta_{bz}]$$

și sistemul coordonatelor de sistem (globale), fig. 2.37, corespunzător deplasărilor și forțelor pe direcțiile coordonatelor globale ale sistemului de referință:

$${}^g \mathbf{u} = [U_a \quad V_a \quad W_a \quad \Theta_{ax} \quad \Theta_{ay} \quad \Theta_{az} \quad U_b \quad V_b \quad W_b \quad \Theta_{bx} \quad \Theta_{by} \quad \Theta_{bz}]$$

$${}^g \mathbf{f} = [F_{ax} \quad F_{ay} \quad F_{az} \quad M_{ax} \quad M_{ay} \quad M_{az} \quad F_{bx} \quad F_{by} \quad F_{bz} \quad M_{bx} \quad M_{by} \quad M_{bz}] \quad (2.205)$$

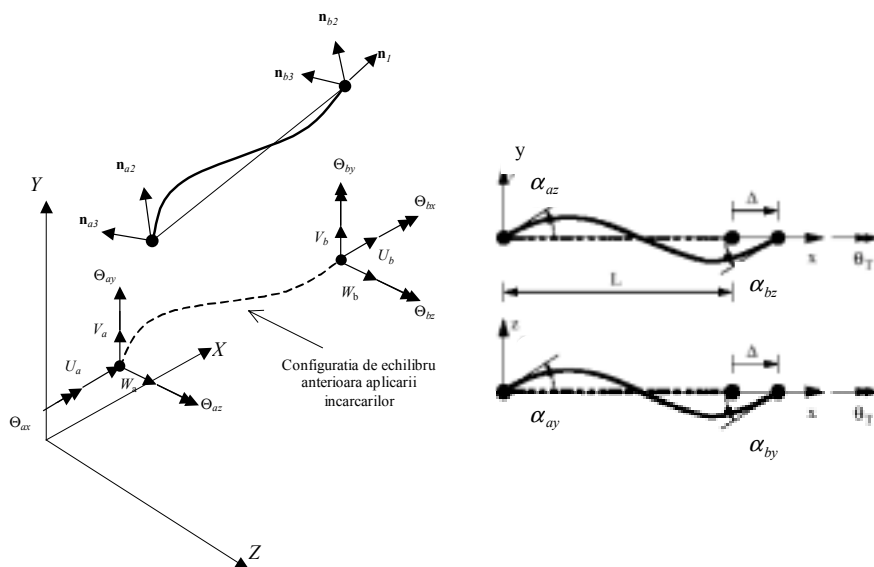


Fig. 2.37. Sisteme de coordonate pentru element de bară spațial. (a) Sistemul global; (b) Sistemul coordonatelor de bază.

În formularea procedeelor de obținere a răspunsului neliniar al structurilor în cadre cu deplasări și rotații finite trebuie făcută distincție între sistemul de referință global, în raport cu care se face verificarea condițiilor de echilibru prin compatibilitatea deformatei și echilibrul static al nodurilor, și sistemul

coordonatelor de bază ale elementului, utilizat pentru cuantificarea energiei potențiale de deformare înmagazinate:

$${}^c \mathbf{f} = {}^c \mathbf{k} {}^c \mathbf{u} \quad (2.206)$$

unde cu ${}^c \mathbf{k}$ s-a notat matricea de rigiditate tangentă de dimensiuni (6x6) a elementului în sistemul coordonatelor de bază. Trebuie specificat faptul că în cazul deplasărilor și rotirilor finite, relațiile de transformare dintre coordonatele de bază și coordonatele locale rezultă neliniare (Izzudin&Smith, 1996):

$${}^c \mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}({}^l \mathbf{u}) \quad (2.207)$$

Procedeul descris în continuare este unul incremental considerându-se ca sistem de referință ultima configurație de echilibru a elementului. Deplasările nodale globale (totale-acumulate până la pasul curent de încărcare) definesc orientarea axei elementelor la pasul curent de încărcare, \mathbf{n}_1 , în timp ce rotirile nodale globale incrementale ($\Theta_x, \Theta_y, \Theta_z$) definesc un vector unic $\boldsymbol{\Theta}$ utilizat ca și argument în matricea de rotație \mathbf{R} pentru reactualizarea sistemului de axe local (yz) de la capetele elementului de bară (Izzudin, 2001):

$$\begin{aligned} {}^k \mathbf{n}_{a2,i} &= \sum_{j=1}^3 \left(\mathbf{R}_{a,i,j} {}^{k-1} \mathbf{n}_{a2,j} \right) \\ {}^k \mathbf{n}_{a3,i} &= \sum_{j=1}^3 \left(\mathbf{R}_{a,i,j} {}^{k-1} \mathbf{n}_{a3,j} \right) \\ {}^k \mathbf{n}_{b2,i} &= \sum_{j=1}^3 \left(\mathbf{R}_{b,i,j} {}^{k-1} \mathbf{n}_{b2,j} \right) \\ {}^k \mathbf{n}_{b3,i} &= \sum_{j=1}^3 \left(\mathbf{R}_{b,i,j} {}^{k-1} \mathbf{n}_{b3,j} \right) \\ {}^k \mathbf{n}_{23,i} &= \sum_{j=1}^3 \left(\mathbf{R}_{b,i,j} {}^{k-1} \mathbf{n}_{a2,i} \right) \end{aligned} \quad (2.208)$$

unde $\mathbf{R}_a = \mathbf{R}(\boldsymbol{\Theta}_a)$, $\mathbf{R}_b = \mathbf{R}(\boldsymbol{\Theta}_b)$ sunt matricele de rotație asociate nodurilor a respectiv b având următoarele expresii:

$$\mathbf{R}(\boldsymbol{\Theta}_a) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\Theta_{ay}^2 + \Theta_{az}^2}{2} & -\Theta_{az} + \frac{\Theta_{ax}\Theta_{ay}}{2} & \Theta_{ay} + \frac{\Theta_{ax}\Theta_{az}}{2} \\ \Theta_{az} + \frac{\Theta_{ax}\Theta_{ay}}{2} & 1 - \frac{\Theta_{ax}^2 + \Theta_{az}^2}{2} & -\Theta_{ax} + \frac{\Theta_{ay}\Theta_{az}}{2} \\ -\Theta_{ay} + \frac{\Theta_{ax}\Theta_{az}}{2} & \Theta_{ax} + \frac{\Theta_{ay}\Theta_{az}}{2} & 1 - \frac{\Theta_{ax}^2 + \Theta_{ay}^2}{2} \end{bmatrix} \quad (2.209)$$

$$\mathbf{R}(\Theta_b) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\Theta_{by}^2 + \Theta_{bz}^2}{2} & -\Theta_{bz} + \frac{\Theta_{bx}\Theta_{by}}{2} & \Theta_{by} + \frac{\Theta_{bx}\Theta_{bz}}{2} \\ \Theta_{bz} + \frac{\Theta_{bx}\Theta_{by}}{2} & 1 - \frac{\Theta_{bx}^2 + \Theta_{bz}^2}{2} & -\Theta_{bx} + \frac{\Theta_{by}\Theta_{bz}}{2} \\ -\Theta_{by} + \frac{\Theta_{bx}\Theta_{bz}}{2} & \Theta_{bx} + \frac{\Theta_{by}\Theta_{bz}}{2} & 1 - \frac{\Theta_{bx}^2 + \Theta_{by}^2}{2} \end{bmatrix} \quad (2.210)$$

iar ${}^{k-1}\mathbf{n}_{a2}$, ${}^{k-1}\mathbf{n}_{a3}$, ${}^{k-1}\mathbf{n}_{b2}$, ${}^{k-1}\mathbf{n}_{b3}$ reprezintă vectorii de orientare ai sistemului de axe local (yz) de la capetele a respectiv b a elementului, corespunzători configurației de echilibru $k-1$, ortogonali axei elementului definită de vectorul ${}^{k-1}\mathbf{n}_1$. Vectorul ${}^k\mathbf{n}_{23}$ este determinat în scopul evaluării rotirii elementului în jurul axei proprii. În relațiile de mai sus se poate observa că din expresia completă a matricii de rotație dată de relația (23) sau reținut doar primii trei termeni. Având în vedere natura incrementală a componentelor rotiri utilizate în relațiile de mai sus, erorile induse prin această trunchiere pot fi minimizate prin simpla reducere a numărului de incremente de încărcare considerate. Având cunoscute deplasările nodale globale și vectorii de orientare a sistemului local de axe stabiliți pe baza relațiilor incrementale de deformații în sistemul coordonatelor de bază ale elementelor se pot obține pe baza următoarelor relații:

$${}^k\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} \frac{{}^kX_b - {}^kX_a}{L} & \frac{{}^kY_b - {}^kY_a}{L} & \frac{{}^kZ_b - {}^kZ_a}{L} \end{bmatrix} \quad (2.211)$$

$$\begin{aligned} \delta\alpha_{ay} &= -\sum_{i=1}^3 ({}^k\mathbf{n}_{1,i} \cdot {}^k\mathbf{n}_{a2,i}) \\ \delta\alpha_{az} &= -\sum_{i=1}^3 ({}^k\mathbf{n}_{1,i} \cdot {}^k\mathbf{n}_{a3,i}) \\ \delta\alpha_{by} &= -\sum_{i=1}^3 ({}^k\mathbf{n}_{1,i} \cdot {}^k\mathbf{n}_{b2,i}) \\ \delta\alpha_{bz} &= -\sum_{i=1}^3 ({}^k\mathbf{n}_{1,i} \cdot {}^k\mathbf{n}_{b3,i}) \\ \delta\Delta &= {}^kL - {}^{k-1}L \\ \delta\theta_T &= \sum_{i=1}^3 ({}^k\mathbf{n}_{a3,i} \cdot {}^k\mathbf{n}_{23,i}) \end{aligned} \quad (2.212)$$

Diferențiind relațiile de mai sus, relațiile cinematice incrementale ce se pot stabili între vectorul deformațiilor în sistemul de bază al elementului ${}_c\mathbf{u}$ cu vectorul deplasărilor globale în sistemul coordonatelor de sistem ${}_g\mathbf{u}$ rezultă de următoarea formă:

$$\delta_c \mathbf{u} = \frac{\partial_c \mathbf{u}_j}{\partial_g \mathbf{u}_k} \delta_g \mathbf{u} = \mathbf{T}_{cg} \delta_g \mathbf{u}, j=1, \dots, 6, k=1, \dots, 12 \quad (2.213)$$

unde \mathbf{T}_{cg} este matricea de transformare de dimensiuni 12x6, iar vectorii $_c \mathbf{u}$ și $_g \mathbf{u}$ sunt dați de relațiile 2.207 respectiv 2.205. Pe considerente de echilibru, vectorii forțelor în cele două sisteme sunt relaționate astfel:

$$_g \mathbf{f} = \mathbf{T}_{cg}^T {}_c \mathbf{f} \quad (2.214)$$

Derivând în continuare ambii membri ai relației de mai sus obținem:

$$\delta_g \mathbf{f} = \mathbf{T}_{cg}^T \delta_c \mathbf{f} + \delta \mathbf{T}_{cg}^T {}_c \mathbf{f} \quad (2.215)$$

și care mai poate fi scrisă:

$$\delta_g \mathbf{f} = \mathbf{T}_{cg}^T \mathbf{k} \mathbf{T}_{cg} \delta_g \mathbf{u} + \delta \mathbf{T}_{cg}^T {}_c \mathbf{f} \quad (2.216)$$

Matricea \mathbf{T}_{cg}^T din relația de mai sus poate fi evaluată astfel:

$$\delta \mathbf{T}_{cg}^T = \frac{\partial \mathbf{T}_{cg}^T}{\partial_g \mathbf{u}_k} \delta_g \mathbf{u}_k = \left[\frac{\partial^2 {}_c \mathbf{u}_i}{\partial_g \mathbf{u}_j \partial_g \mathbf{u}_k} \right]^T \delta_g \mathbf{u}_k \quad (2.217)$$

Înlocuind relația (2.17) în relația (2.16) rezultă următoarea expresie pentru vectorul forțelor în sistemul global de referință:

$$\delta_g \mathbf{f} = \left(\mathbf{T}_{cg}^T \mathbf{k} \mathbf{T}_{cg} + \sum_{k=1}^6 \mathbf{g}_{k c} \mathbf{f}_k \right) \delta_g \mathbf{u} \quad (2.218)$$

unde $\mathbf{g}_{i,j,k} = \frac{\partial^2 {}_c \mathbf{u}_i}{\partial_g \mathbf{u}_j \partial_g \mathbf{u}_k}$, ($i,j=1, \dots, 12$; $k=1, \dots, 6$) iar

$\mathbf{k}_T = \mathbf{T}_{cg}^T \mathbf{k} \mathbf{T}_{cg} + \sum_{k=1}^6 \mathbf{g}_{k c} \mathbf{f}_k$ reprezintă matricea de rigiditate tangentă în sistemul global de referință al structurii.

În cazul particular al structurilor plane, se pot utiliza următoarele relații neliniare între vectorul deformațiilor în coordonatele de bază ale elementelor și vectorul deplasărilor în sistemul global de referință (Chen&Toma, 1994), Fig. 2.38:

$$\begin{aligned} \alpha_{az} &= \alpha_0 + \Theta_{az} - \arctan \frac{y_0 + V_b - V_a}{x_0 + U_b - U_a} \\ \alpha_{bz} &= \alpha_0 + \Theta_{bz} - \arctan \frac{y_0 + V_b - V_a}{x_0 + U_b - U_a} \\ \Delta &= \frac{(2x_0 + U_b - U_a)(U_b - U_a) + (2y_0 + V_b - V_a)(V_b - V_a)}{L_f + L} \end{aligned} \quad (2.219)$$

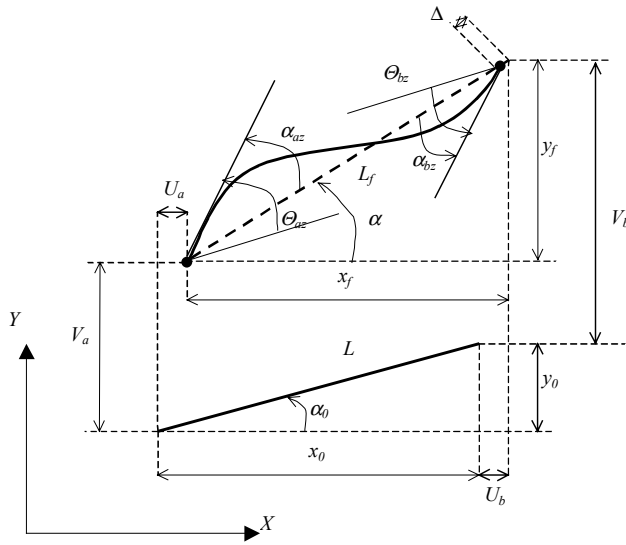


Fig. 2.38. Transformări de coordonate neliniare. Cazul plan.

În acest caz relația incrementală între vectorul forțelor și cel al deplasărilor în coordonate globale se scrie:

$$\delta_g \mathbf{f} = (\mathbf{T}_{cg}^T \mathbf{k} \mathbf{T}_{cg} + \mathbf{g}_1 m_{za} + \mathbf{g}_2 m_{zb} + \mathbf{g}_3 f_x) \delta_g \mathbf{u} \quad (2.220)$$

unde matricele de transformare \mathbf{T}_{cg} și \mathbf{g}_i ($i=1,2,3$) se pot obține ușor prin particularizarea relațiilor 2.217 și 2.218:

$$\mathbf{T}_{cg} = \begin{bmatrix} -s/L & c/L & 1 & s/L & -c/L & 0 \\ -s/L & c/L & 0 & s/L & -c/L & 1 \\ -c & -s & 0 & c & s & 0 \end{bmatrix} \quad (2.221)$$

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{g}_2 = \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} -2sc & c^2 - s^2 & 0 & 2sc & -(c^2 - s^2) & 0 \\ & 2cs & 0 & -(c^2 - s^2) & -2sc & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & -2sc & c^2 - s^2 & 0 \\ & \text{simetric} & & & 2sc & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.222)$$

$$\mathbf{g}_3 = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} s^2 & -sc & 0 & -s^2 & sc & 0 \\ & c^2 & 0 & sc & -c^2 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & s^2 & -sc & 0 \\ & \textit{simetric} & & & c^2 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2.223)$$

unde s-a notat cu $s=\sin(\alpha)$, $c=\cos(\alpha)$, Fig. 2.38.

2.4.4 Etapele analizei incremental-iterative

Pentru structurile cu comportare neliniară caracteristicile de rigiditate și deformabilitate ale elementelor structurii nu sunt cunoscute inițial pentru o anumită mărime totală a vectorului forțelor nodale, astfel încât soluția răspunsului neliniar al structurii nu se poate obține direct. La rezolvarea problemelor neliniare se aplică în mod obișnuit unul dintre următoarele tipuri de procedee de calcul: (1) procedee simplu incrementale; (2) procedee iterative având la bază metoda Newton de rezolvare a sistemelor de ecuații neliniare; și (3) procedee mixte sau incremental-iterative în care soluția problemei este obținută prin combinarea celor două procedee, adică la fiecare ciclu de calcul (treaptă de încărcare) forțele neechilibrate se corectează aplicând un procedeu iterativ. În cadrul procedeelelor din prima categorie comportarea neliniară a structurii pe parcursul ciclurilor de calcul este înlocuită printr-o succesiune de intervale cu comportare liniarizată care se îndepărtează progresiv de curba reală de comportare neliniară. Astfel deși mai simplu de implementat din punct de vedere numeric aceste metode nu asigură echilibrul static al nodurilor și pentru structuri cu deplasări și rotații mari erorile se pot acumula foarte mult în timpul ciclurilor de încărcare conducând la soluții incompatibile cu soluția reală. Pe de altă parte în cadrul procedeelelor iterative pot apărea dificultăți de convergență în stabilirea corectă a configurației de echilibru, în locul unei configurații de echilibru stabil, convergența poate indica o altă configurație de echilibru nestabilă, ceea ce constituie un rezultat eronat. Din acest motiv, pentru rezolvarea structurilor cu un pronunțat caracter neliniar, se preferă aplicarea procedeelelor incremental-iterative în cadrul cărora soluția este obținută prin aplicarea unor trepte de încărcare sau deplasări și corectarea rezultatelor în cadrul procedeelelor iterative aplicate în interiorul fiecărui ciclu de calcul. În acest caz, dacă procesul este convergent, atunci în final vor fi satisfăcute pentru creșterea de sarcină sau deplasare aleasă atât ecuațiile neliniare de compatibilitate cât și cele de echilibru static. În cadrul procedeelelor incremental-iterative configurația finală de echilibru este obținută după un număr oarecare de pași cu aplicarea unor corecții de echilibru în interiorul acestor pași de calcul. Analiza se poate face alegând un pas constant fie pentru încărcare și în acest caz controlul soluției se definește prin

mărimea forțelor incrementale aplicate sau se poate alege un pas constant pentru deplasări și în acest caz soluția este controlată de deplasările incrementale considerate. Există și alte metode îmbunătățite de alegere a pasului, cum ar fi cele mixte sau cele bazate pe “lungimea de arc” (v. cap.3). După fiecare asemenea pas, sau după câțiva pași, se calculează dezechilibrul dintre forțele/deplasările aplicate și cele necesare pentru menținerea configurației deformate obținută în acel moment. Corecția găsită se aplică sistemului astfel încât să se revină pe curba reală de echilibru.

Fiecare ciclu de calcul din cadrul acestor procedee incremental-iterative, presupune parcurgerea următoarelor etape de calcul. Într-o primă etapă, numită *etapa predictor*, se determină predicția deplasărilor incrementale, prin rezolvarea sistemului ecuațiilor de condiție asamblat la nivelul întregii structuri:

$$\mathbf{K}_T \mathbf{U} = {}^2\mathbf{P} - {}^1\mathbf{P}$$

unde matricea de rigiditate incrementală sau tangentă, \mathbf{K}_T , se obține prin însumarea matricelor de rigiditate transformate în coordonatele de sistem, corespunzătoare fiecărui element constitutiv al structurii, \mathbf{U} reprezintă vectorul deplasărilor incrementale globale corespunzător configurației deformate C_2 necunoscute din configurația C_1 cunoscută, iar vectorii ${}^2\mathbf{P}$ și ${}^1\mathbf{P}$ reprezintă vectorii forțelor exterioare nodale globale ce acționează asupra structurii în configurațiile C_1 respectiv C_2 . Această etapă este aplicată la nivelul structurii.

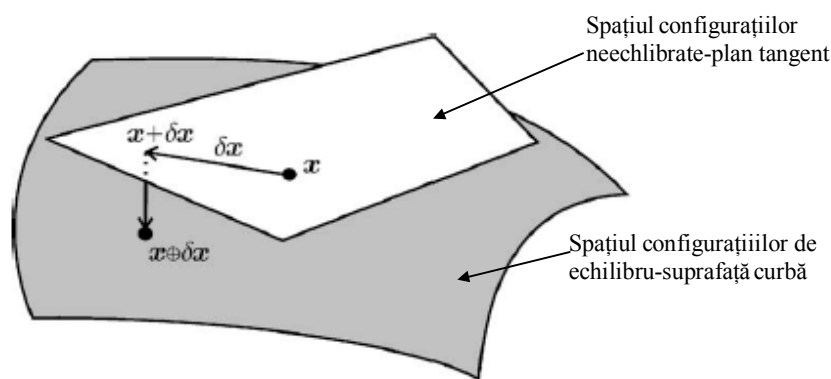


Fig. 2.39. Metode de tip predictor-corector.

Matricea de rigiditate \mathbf{K}_T este utilizată la determinarea variației vectorului soluție δx considerat ca și un element din spațiul liniar al configurațiilor neechilibrate (iterative) figurat simbolic în Fig.2.39 ca un plan tangent la spațiul configurațiilor neliniare de echilibru în punctul x . Trebuie menționat faptul că, în principiu, în această etapă, nu este necesară determinarea matricei de rigiditate incrementală \mathbf{K}_T cu maximă acuratețe întrucât aceasta nu influențează exactitatea soluției finale ci doar viteza de convergență și direcția de căutare în spațiul deplasărilor (Fig.2.39). Referindu-ne la Fig.2.39 o nouă aproximație a vectorului soluție x se obține prin

determinarea unei corecții, punctul $x+\delta x$ în planul tangent, și proiecția acesteia în spațiul neliniar al configurațiilor de echilibru. Cu toate acestea în cazul unor structuri cu deplasări și rotații mari utilizarea unei matrici de rigiditate tangente capabile să surprindă efectele deplasărilor de corp rigid ale elementelor structurii din configurația C_1 în configurația C_2 este esențială pentru asigurarea convergenței (Yang, s.al., 2003). Referindu-ne la formularea Lagrangeana actualizată, adoptată la deducerea relațiilor incrementale de echilibru, este de preferat introducerea matricii de rigiditate geometrică în expresia matricii de rigiditate tangentă cu care se face predicția deplasărilor și care intruneste aceste caracteristici (*rigid body qualified*):

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g$$

unde s-a notat cu \mathbf{K}_e matricia de rigiditate tangentă corespunzătoare deformațiilor de element iar \mathbf{K}_g reprezintă matricia de rigiditate geometrică corespunzătoare eforturilor inițiale, ambele raportate la ultima configurație de echilibru cunoscută.

Neliniaritatea problemei implică totuși ca pentru creșterile determinate ale deplasărilor, creșterea obținută pentru eforturile interne ale structurii să nu fie în general în echilibru cu forțele exterioare aplicate. Având o primă estimare a deplasărilor incrementale globale \mathbf{U} pot fi calculate deplasările incrementale la nivel de element \mathbf{u} , raportate la sistemul de referință local corespunzător configurației C_1 și de asemenea forțele locale din noduri. Aceasta reprezintă cea de a doua etapă în cadrul procesului incremental-iterativ numită *etapa corector*. Această etapă este condusă la nivel de element și constă în reactualizarea eforturilor nodale pentru fiecare element al structurii pe baza deplasărilor incrementale locale \mathbf{u} . Acuratețea cu care se determină aceste forțe este esențială în determinarea răspunsului final al structurii. Motivul pentru care acestei etape trebuie să i se acorde o atenție deosebită rezidă în faptul că generarea unor forțe eronate atrage după sine forțe nodale neechilibrate eronate, eliminarea acestora în cadrul unui procedeu iterativ chiar convergent putând indica o configurație de echilibru eronată. În cadrul acestei etape tratarea adecvată a deplasărilor și rotirilor de corp rigid al elementelor este de maximă importanță, întrucât aceste deplasări afectează atât calcularea forțelor incrementale cât și reactulaizarea eforturilor inițiale pentru fiecare element. Astfel, la reactulaizare forțelor interne trebuie să se țină seama de următoarea regulă cu privire la tratarea deplasărilor și rotirilor de corp rigid (Yang, s.al., 2003): *pentru un element de bară care execută o mișcare de corp rigid forțele inițiale care acționează asupra elementului trebuie să se rotească urmărind rotirile de corp rigid în timp ce magnitudinea lor rămâne nemodificată*. Această regulă este ilustrată în Fig.2.40 pentru cazul unui element de bară plan. În acest fel, este menținut echilibrul în poziția deformată și prin urmare, în cadrul unui ciclu de calcul, eforturile incrementale provin doar datorită deformațiilor interne elementului \mathbf{u}_n obținute prin eliminarea deplasărilor și rotirilor de corp rigid din vectorul deplasărilor incrementale nodale \mathbf{u} :

$${}^2\mathbf{f} = {}^1\mathbf{f} + (\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g)\mathbf{u}_n \quad (2.224)$$

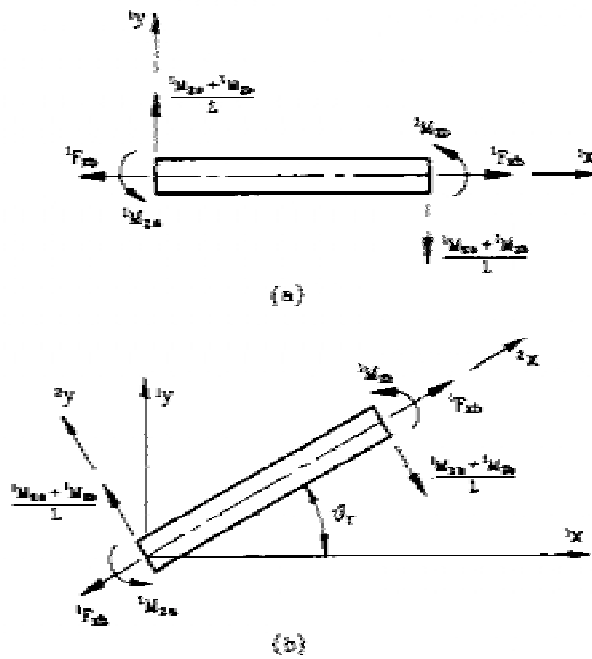


Fig.2.40. Element plan: (a) înainte (b) după rotirea de corp rigid.

unde ${}^2\mathbf{f}$ și ${}^1\mathbf{f}$ reprezintă vectorul forțelor nodale interne corespunzătoare configurațiilor C_2 respectiv C_1 , \mathbf{k}_e matricea de rigiditate elastică, \mathbf{k}_g matricea de rigiditate geometrică.

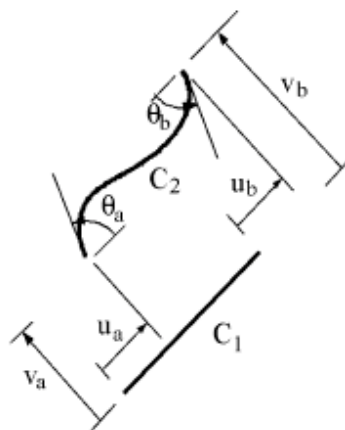


Fig. 2.41. Vectorul deplasărilor incrementale raportat la configurația C_1 în formularea UL.

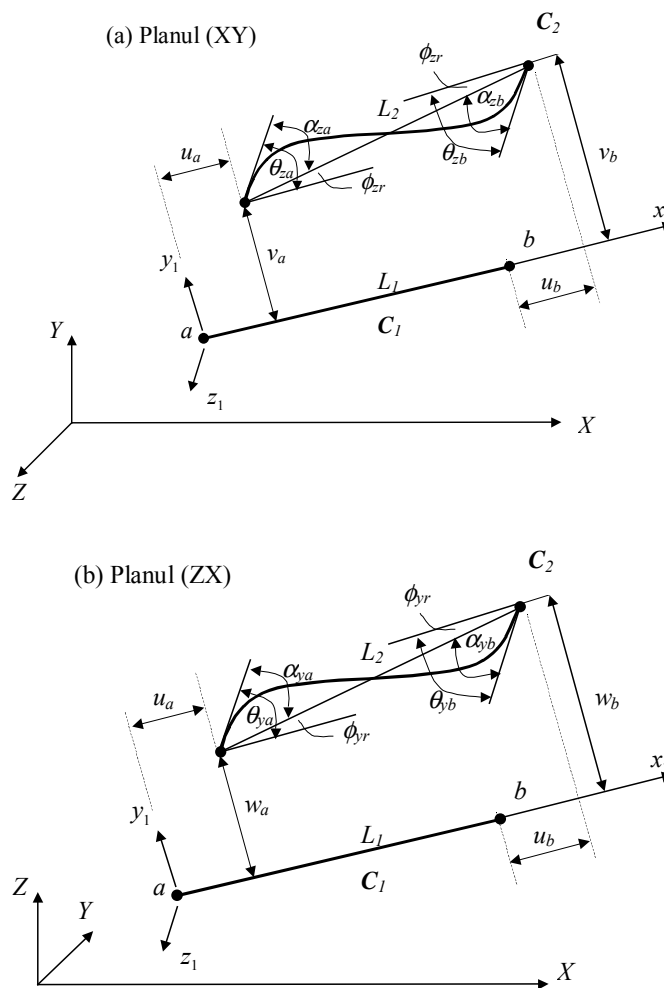


Fig. 2.42. Deformațiile de bază ale elementului în planurile (XY) și (ZX)

Notând cu $\mathbf{u} = [u_a \ v_a \ w_a \ \theta_{xa} \ \theta_{ya} \ \theta_{za} \ u_b \ v_b \ w_b \ \theta_{xb} \ \theta_{yb} \ \theta_{zb}]^T$ vectorul deplasărilor incrementale raportate la sistemul de referință asociat configurației de echilibru C_1 , Fig.2.41, vectorul deformațiilor de bază ale elementului se poate scrie:

$$\mathbf{u}_n = [0 \ 0 \ 0 \ \alpha_{xa} \ \alpha_{ya} \ \alpha_{za} \ \Delta x \ 0 \ 0 \ \alpha_{xb} \ \alpha_{yb} \ \alpha_{zb}]^T \quad (2.225)$$

unde:

$$\begin{aligned}
\alpha_{xa} &= \theta_{xa} - \phi_{xr} \\
\alpha_{ya} &= \theta_{ya} + \phi_{yr} \\
\alpha_{za} &= \theta_{za} - \phi_{zr} \\
\alpha_{xb} &= \theta_{xb} - \phi_{xr} \\
\alpha_{yb} &= \theta_{yb} + \phi_{yr} \\
\alpha_{zb} &= \theta_{zb} - \phi_{zr} \\
\Delta_x &= L_2 - L_1
\end{aligned}
\tag{2.226}$$

L_2, L_1 reprezentând lungimile elementului corespunzător configurațiilor C_2 respectiv C_1 iar cu $\phi_{xr}, \phi_{yr}, \phi_{zr}$ s-au notat rotirile de corp rigid ale elementului de bară. Acestea pot fi exprimate în funcție de deplasările relative ale elementului de bară raportate la configurația de referință C_1 astfel (Fig.2.42):

$$\begin{aligned}
\phi_{xr} &= \frac{1}{2}(\theta_{xa} + \theta_{xb}) \\
\phi_{yr} &= \arctan \frac{w_b - w_a}{\left[(L_1 + u_b - u_a)^2 + (v_b - v_a)^2 \right]^{1/2}} \\
\phi_{zr} &= \arctan \frac{v_b - v_a}{\left[(L_1 + u_b - u_a)^2 + (w_b - w_a)^2 \right]^{1/2}}
\end{aligned}
\tag{2.227}$$

Având determinate deplasările incrementale, reactualizarea geometriei structurii poate fi efectuată prin recalcularea coordonatelor nodale și a matricelor de rotație ale elementelor componente ale structurii aplicând unul din procedeele descrise în cadrul paragrafului 2.43. Această etapă numită *reactualizarea geometriei* structurii împreună cu etapa corector descrisă mai sus permite determinarea forțelor nodale interne structurii care de regulă nu se află în echilibru cu cele exterioare date. *Verificarea echilibrului* reprezintă ultima etapă din cadrul procedeelelor incremental-iterative și constă în insumarea tuturor forțelor interne nodale, transformarea acestora în sistemul global de referință și compararea acestora cu forțele exterioare date. În cadrul procesului iterativ aceste forțe neechilibrate sunt aplicate succesiv pe structura până când diferența dintre forțele exterioare și interne devine neglijabilă în limitele unei toleranțe de calcul impuse. Pentru exemplificarea modului de aplicare concretă a formulărilor precedente la determinarea răpsunsului neliniar al structurilor cu deplasări și rotiri mari, în continuare, sunt prezentate etapele descrise mai sus într-o formă succintă. Algoritmul de conducere a analizei are la baza metoda pașilor controlați de “lucrul mecanic” (Yang, s.al., 1985) care asigură ajustarea automată a mărimii incrementelor de încărcare în funcție de nivelul de degradare a rigidității structurii și aplicarea metodei Newton-Raphson în interiorul fiecărui ciclu. Metode de conducere a analizei capabile să determine

răspunsul neliniar și în domeniul post-critic vor fi prezentate în detaliu în cadrul capitolului 3. De asemenea se consideră cazul în care forțele au un caracter conservativ și aplicate proporțional pe structură-toate forțele cresc funcție de un singur parametru. Cazul aplicării neproporționale ale forțelor poate fi tratat în mod similar grupând aceste forțe în secvențe de încărcare separate și aplicate succesiv pe structură.

Se presupune că poziția C_1 a structurii, în echilibru static cu forțele exterioare ${}^1\mathbf{P}$, a fost determinată; se aplică o nouă creștere de sarcină $\Delta\lambda\Delta\mathbf{P}$ a cărei intensitate, pe parcursul fiecărui increment de încărcare, este controlată de condiția de lucru mecanic constant ($\Delta W = \text{const}$) (Fig.2.43), încărcarea totală corespunzătoare pasului curent fiind ${}^2\mathbf{P}$:

$$\Delta\mathbf{P} = \frac{1}{n} \mathbf{P}$$

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta W}{\Delta\mathbf{P} \Delta\mathbf{u}_g} \quad (2.228)$$

$${}^2\mathbf{P} = {}^1\mathbf{P} + \Delta\lambda \cdot \Delta\mathbf{P}$$

și unde cu $\Delta\mathbf{P}$ s-a notat incrementul forțelor exterioare de referință obținut prin divizarea vectorului forțelor totale \mathbf{P} cu parametrul n .

Pasul 1: La începutul fiecărui increment de încărcare sunt alcătuite matricele de rigiditate elastică și geometrică pentru fiecare element component al structurii.

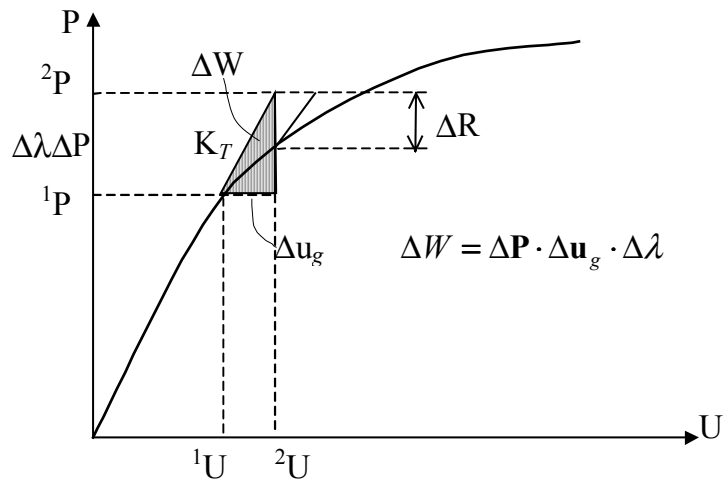


Fig. 2.43. Conducerea analizei cu control în lucru mecanic ($\Delta W = \text{constant}$).

Aceste matrici sunt alcătuite în sistemul de coordonate local elementelor. Pentru fiecare element este formată matricea de rigiditate incrementală (tangentă) prin însumarea matricelor elastice și geometrice. Această matrice este transformată din

sistemul local al elementelor în sistemul global de referință al structurii și asamblată în matricea de rigiditate globală a structurii prin însumarea tuturor matricelor de rigiditate ale elementelor. Matricea de rigiditate tangentă globală este factorizată și sunt determinate în continuare deplasările generalizate raportate la sistemul global de referință numite în continuare deplasări globale. Matematic procedura descrisă mai sus poate fi sumarizată astfel:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{Te} &= \mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g \\ \mathbf{k}_{Tg} &= {}^1\mathbf{R}_e^T \mathbf{k}_{Te} {}^1\mathbf{R}_e \\ \mathbf{K}_T &= \sum_{i=1}^m \mathbf{k}_{Tg} \\ \Delta\mathbf{P} &= \mathbf{K}_T \Delta\mathbf{u}_g^r \end{aligned} \quad (2.229)$$

unde cu ${}^1\mathbf{R}_e$ s-a notat matricea de transformare (rotație) de la componentele din sistemul global la componentele în sistemul local corespunzător configurației C_1 , iar m reprezintă numărul de bare al structurii analizate. Vectorul deplasărilor incrementale de referință $\Delta\mathbf{u}_g^r$ este scalat cu factorul $\Delta\lambda$ rezultând vectorul deplasărilor globale generalizate corespunzător nivelului de încărcare curent:

$$\Delta\mathbf{u}_g = \Delta\lambda \Delta\mathbf{u}_g^r \quad (2.230)$$

Pasul 2: Pentru fiecare element, deplasările globale incrementale sunt utilizate pentru reactualizarea coordonatelor nodurilor și recalcularea lungimilor elementelor:

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{U} &= {}^1\mathbf{U} + \Delta\mathbf{u}_g \\ {}^2\mathbf{X} &= {}^1\mathbf{X} + \Delta\mathbf{u}_g^t \end{aligned} \quad (2.231)$$

unde în vectorul \mathbf{X} sunt colectate coordonatele nodurilor structurii, \mathbf{U} conține deplasările totale ale nodurilor structurii, iar vectorul $\Delta\mathbf{u}_g^t$ conține deplasările incrementale globale corepunzătoare gradelor de libertate asociate translațiilor. Pentru fiecare element deplasările incrementale globale sunt raportate la sistemul local de referință corespunzător ultimei configurații de echilibru C_1 fiind atunci numite deplasări locale:

$$\Delta\mathbf{u}_l = {}^1\mathbf{R}_e \Delta\mathbf{u}_g \quad (2.232)$$

Având determinat vectorul deplasărilor locale și lungimile reactualizate ale fiecărui element se estimează incrementul forțelor interne locale din noduri în echilibru cu deformațiile interne $\Delta\mathbf{u}_n$:

$$\Delta\mathbf{f}_e = (\mathbf{k}_{Te} + \mathbf{k}_{Tg}) \Delta\mathbf{u}_n \quad (2.233)$$

unde $\Delta\mathbf{u}_n$ reprezintă vectorul deformațiilor interne elementului obținut prin eliminarea deplasărilor și rotirilor de corp rigid din vectorul deplasărilor locale. Vectorul forțelor incrementale interne este adăugat la vectorul forțelor nodale existente în configurația de echilibru precedentă (C_1) obținându-se vectorul forțelor nodale totale corespunzătoare configurației C_2 :

$${}^2\mathbf{f}_e = {}^1\mathbf{f}_e + \Delta\mathbf{f}_e \quad (2.234)$$

Pasul 3: Pentru fiecare element, deplasările incrementale locale sunt utilizate pentru reactualizarea sistemelor de axe locale și deci recalcularea matricei de rotație ${}^2\mathbf{R}_e$ corepunzătoare noii configurații C_2 .

Pasul 4: Pentru fiecare element forțele nodale interne, raportate la sistemul de axe corespunzător configurației C_2 , sunt exprimate în funcție de sistemul general de referință și însumate rezultând vectorul forțelor nodale interne totale la nivel de structură:

$$\begin{aligned} {}^2\mathbf{F}_e &= {}^2\mathbf{R}_e {}^2\mathbf{f}_e \\ {}^2\mathbf{F} &= \sum_{i=1}^m {}^2\mathbf{F}_e \end{aligned} \quad (2.235)$$

Pasul 5: Diferența dintre sarcinile aplicate ${}^2\mathbf{P}$ și forțele nodale determinate ${}^2\mathbf{F}$ se notează cu $\Delta\mathbf{R}$. Corecția deplasărilor corespunzând acestui dezechilibru se estimează prin ecuația:

$$\Delta\mathbf{R} = \mathbf{K}_T \Delta\mathbf{u}_g \quad (2.236)$$

unde \mathbf{K}_T este matricea de rigiditate tangentă globală a structurii a carei valoare poate fi modificată la încheierea fiecărei iterații sau menținută constantă pe parcursul procesului iterativ. Determinarea pentru fiecare ciclu al iterației, a matricei de rigiditate și refactorizarea acesteia pentru determinarea deplasărilor conduce la un efort de calcul costisitor, astfel încât deseori se preferă menținerea matricei de rigiditate constantă pe parcursul procesului iterativ, fiind însă necesar un număr sporit de iterații. Cu corecția deplasărilor astfel determinată, procesul complet se repetă începând cu pasul 2. Procesul iterativ se continuă până când dezechilibrul devine neglijabil. Verificarea echilibrului se face considerând o valoare prestabilită pentru toleranța (ε) de închidere a iterațiilor și aplicarea unui criteriu de convergență, cel mai adesea fiind aplicată norma Euclidiană asupra forțelor reziduale ($\Delta\mathbf{R}$):

$$\|\Delta\mathbf{R}\| = \sqrt{\Delta\mathbf{R}^T \Delta\mathbf{R}} \leq \varepsilon \quad (2.237)$$

În aplicarea acestui criteriu, componentele forță și moment încovoietor sunt tratate ca și grupuri separate iar convergența se consideră realizată când (2.237) este satisfăcută simultan și independent pentru fiecare grup.