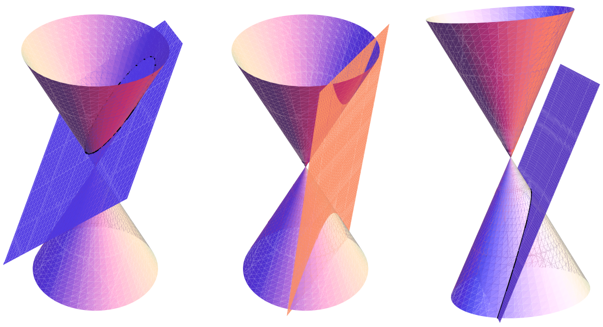
Conice

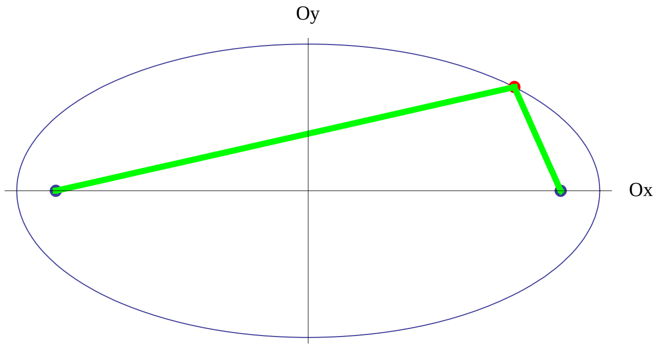
O.M.G.

Capitolul 1. Geometrie analitică plană

1.1 Conice



Definitie: *Se numeşte elipsă locul geometric al punctelor din plan pt. care suma distanţelor la doua puncte fixe numite focare este constantă.*



Notăm focarele cu $F_1\left(-c,0\right), F_2(c,0)$ şi punctul de pe elipsă cu $M\left(x,y\right)$. Cf. def.:

$$MF_1 + MF_2 = 2a > 2c$$

adică:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2 + (y-0)^2 =$$

$$= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + (x-c)^2 + (y-0)^2$$

rezultă:

$$2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - 2cx$$

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2ca^2x + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$\left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

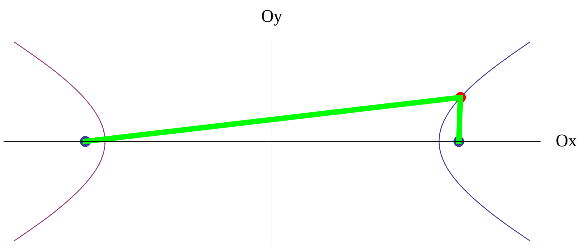
(1)
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

unde $b^2 = a^2 - c^2$.

Obs. SE pot folosi şi ecuaţiile parametrice ale elipsei:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

Definiţie: *Se numeşte* hiperbolă *locul geometric al punctelor din plan pt. care valoarea absolută a diferenţei distanţelor la doua puncte fixe numite focare este constantă.*



Notăm focarele cu $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ şi punctul de pe hiperbolă cu $M(x, y)$. Cf. def.:

$$|MF_1 - MF_2| = 2a$$

unde $a < c$.

Făcând calculele rezultă:

(2)
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

unde $b^2 = c^2 - a^2$.

Obs.: se pot folosi şi ec. parametrice ale hiperbolei:

$$\begin{cases} x = \pm a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

unde

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \operatorname{ch} t$$
$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

relaţia de bază:

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \text{ pentru } \forall t \in \mathbb{R}$$

Definiţie: *Se numeşte* parabolă *locul geometric al punctelor din plan pt. care distanţele la un punct fix numit focar şi o dreaptă fixă numită directoare sunt egale.*

Fie focarul $F(p/2, 0)$ şi directoarea de ecuaţie $x = -p/2$ iar $M(x, y)$ un punct pe parabolă, Cond. din def. se scrie:

$$(x - p/2)^2 + y^2 = (x + p/2)^2$$

rezultă ec. parabolei:

(3) $$y^2 = 2px$$

Obs. Conicele se pot defini unitar:

Definiţie: *Se numeşte conica o curba pentru care raportul distantelor de la un punct de pe curba la un punct fix numit focar si o dreapta fixa numita directoare este constant* e. (e este excentricitatea conicei).

1.1.0.1 Ecuaţia tangentei la elipsă într-un punct de pe elipsă: Fie elipsa:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

şi un punct $M_0(x_0, y_0)$ pe elipsă, adică:

(4) $$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1.$$

Se ştie că tangenta la elipsă este o dreaptă care intersectează elipsa într-un singur punct.

Ec. unei drepte care trece prin M_0 este:

(5) $$y - y_0 = m(x - x_0).$$

intersectând cu elipsa:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}$$

rezultă:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y_0 + m(x - x_0))^2}{b^2} = 1$$

$$b^2x^2 + a^2\left(y_0^2 + 2my_0\left(x - x_0\right) + m^2\left(x - x_0\right)^2\right) - a^2b^2 = 0$$

$$\left(a^2m^2 + b^2\right)x^2 + a^2\left(2my_0 - 2m^2x_0\right)x + \left(a^2\left(m^2x_0^2 - 2mx_0y_0 + y_0^2\right) - a^2b^2\right) = 0$$

ec. e de forma $Ax^2 + Bx + c = 0$ are sol. unică dacă $B^2 - 4AC = 0$.

$A = \left(a^2m^2 + b^2\right); B = 2a^2m\left(y_0 - mx_0\right)$

$C = a^2\left(m^2x_0^2 - 2mx_0y_0 + y_0^2 - b^2\right)$.

Deoarece B are factor comun pe 2 calculăm discriminantul ecuaţiei cu formula redusă: $\Delta' = \left(\frac{B}{2}\right)^2 - AC,:$

$$\begin{aligned}
\Delta' &= a^4m^2\left(y_0 - mx_0\right)^2 - a^2\left(a^2m^2 + b^2\right)\left(m^2x_0^2 - 2mx_0y_0 + y_0^2 - b^2\right) = \\
&= a^2\left(\begin{array}{c} \overbrace{a^2m^2y_0^2} - 2\widetilde{a^2m^3y_0}x_0 + \underbrace{a^2m^4x_0^2} - \underbrace{a^2m^4x_0^2} + 2m^3\widetilde{a^2x_0}y_0 - \\ - \overbrace{a^2m^2y_0^2} + a^2m^2b^2 - b^2m^2x_0^2 + 2mb^2x_0y_0 - b^2y_0^2 + b^4 \end{array}\right) = \\
&= a^2b^2\left(\left(a^2 - x_0^2\right)m^2 + 2mx_0y_0 + b^2 - y_0^2\right).
\end{aligned}$$

Punând condiţia ca ecuaţia $\Delta' = 0$ rezultă:

$$\begin{aligned}
m_{1,2} &= \frac{-x_0y_0 \pm \sqrt{x_0^2y_0^2 - \left(a^2 - x_0^2\right)\left(b^2 - y_0^2\right)}}{a^2 - x_0^2} = \\
&= \frac{-x_0y_0 \pm \sqrt{x_0^2y_0^2 - a^2b^2 + a^2y_0^2 + b^2x_0^2 - x_0^2y_0^2}}{a^2 - x_0^2}
\end{aligned} \tag{6}$$

Dar din ecuaţia () rezultă. $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$ care înlocuită în () dă:

$$m_{1,2} = \frac{-x_0y_0}{a^2 - x_0^2} = -\frac{x_0y_0}{a^2\frac{y_0^2}{b^2}} = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

Înlocuind valoarea lui m în ecuaţia dreptei () rezultă ecuaţia tangentei:

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\left(x - x_0\right)$$

sau ţinând cont de faptul că M_0 este pe elipsă, deci coordonatele sale verifică ecuaţia () rezultă ecuaţia tangentei la elipsă într-un punct M_0 de pe elipsă:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Analog se obţine ecuaţia tangentei la hiperbola de ecuaţie () într-un punct de coordonate (x_0, y_0) de pe hiperbolă:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

iar ec. tangentei la parabolă într-un punct de pe parabolă:

$$yy_0 = p\,(x + x_0)\,.$$