2.1 Sfera

Definitia 1.1 *Se numeşte sferă mulţimea tuturor punctelor din spaţiu pentru care distanţa la u punct fix numit centrul sferei este egală cu un număr numit raza sferei.*

Fie centrul sferei $C(a, b, c)$ şi raza sferei R.

Teorema 1.1 *Punctul $M(x, y, z)$ aparţine sferei dacă şi numai dacă coordonatele sale verifică ecuaţia:*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \tag{2.1.1}$$

Demonstraţie: diatanţa de la M la C este egală cu $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ care egalată cu R este echivalentă cu (2.1.1).□

Dacă în ecuaţia de mai sus se fac calculele şi se reduc termenii asemenea obţinem:

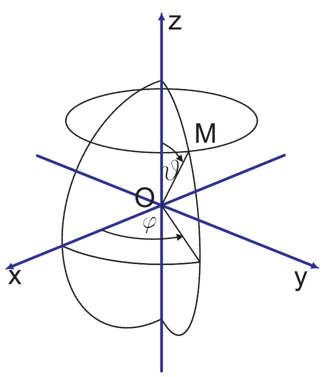
$$x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0 \tag{EGS}$$

ecuaţie care poartă denumirea de ecuaţia generală a sferei. (EGS) reprezintă o sferă cu centrul în punctul $C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, -\frac{p}{2}\right)$ şi de rază $R = \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ dacă expresia de sub radical este pozitivă.

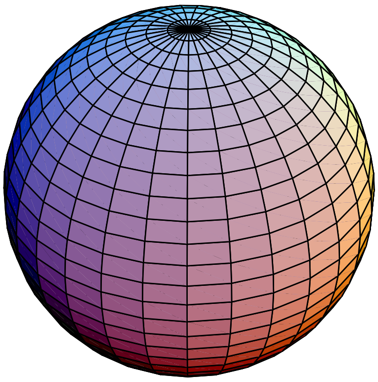
Remarca 1.1 Sfera se mai poate da şi folosind ecuatiile parametrice:

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\vartheta + a \\ y = R\sin\varphi\sin\vartheta + b \\ z = R\cos\vartheta + c \end{cases}, \qquad \varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, \pi] \tag{EPS}$$

unde parametrii sunt unghiurile φ, ϑ din figura de mai jos:



pentru φ constant se obţin pe sferă jumătăţi de cecuri mari ("meridiane"), iar pentru ϑ constant se obţin pe sferă cercuri ("paralele").



Legat de sferă ne propunem să determinăm ecuaţia unui plan tangent la sferă într-un punct de pe sferă. Fie $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ un punct pe sferă.

Teorema 1.2 *Ecuaţia planului tangent la sferă în punctul M_0 este:*

$$\left(x-a\right)\left(x_0-a\right)+\left(y-b\right)\left(y_0-b\right)+\left(z-c\right)\left(z_0-c\right)=R^2 \qquad \text{(EPTS)}$$

Demonstraţie: Planul tangent la sferă în M_0 este determinat de M_0 şi normala $\overrightarrow{CM_0}$ (planul este perpendicular pe rază), deci ecuaţia sa este:

$$\left(x-x_0\right)\left(x_0-a\right)+\left(y-y_0\right)\left(y_0-b\right)+\left(z-z_0\right)\left(z_0-c\right)=0$$

Dar $x-x_0=\left(x-a\right)-\left(x_0-a\right),..$ care înlocuite în ecuaţia de mai sus dau:

$$\left(x-a\right)\left(x_0-a\right)+\left(y-b\right)\left(y_0-b\right)+\left(z-c\right)\left(z_0-c\right)-\left(\left(x_0-a\right)^2+\left(y_0-b\right)^2+\left(z_0-c\right)^2\right)=0$$

Ţinând cont de faptul că coordonatele lui M_0 verifică ecauţia sferei, rezultă (EPTS).□

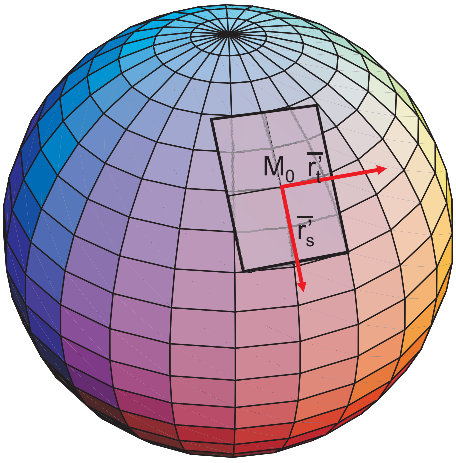
Remarca 1.2 Ecuatia planului tangent la sferă se obţine din (EGS) prin dedublare :

$$\left(x-a\right)^2=\left(x-a\right)\left(x-a\right)\to\left(x-a\right)\left(x_0-a\right),...$$

Remarca 1.3 Dacă sfera este dată sub formă generală atunci ecuatia planului tangent în punctul M_0 de pe sferă este:

$$xx_0+yy_0+zz_0+m\frac{x+x_0}{2}+n\frac{y+y_0}{2}+p\frac{z+z_0}{2}+q=0$$

dedublarea fiind: $x^2=xx\to xx_0$, $x=\frac{x+x}{2}\to\frac{x+x_0}{2}$.



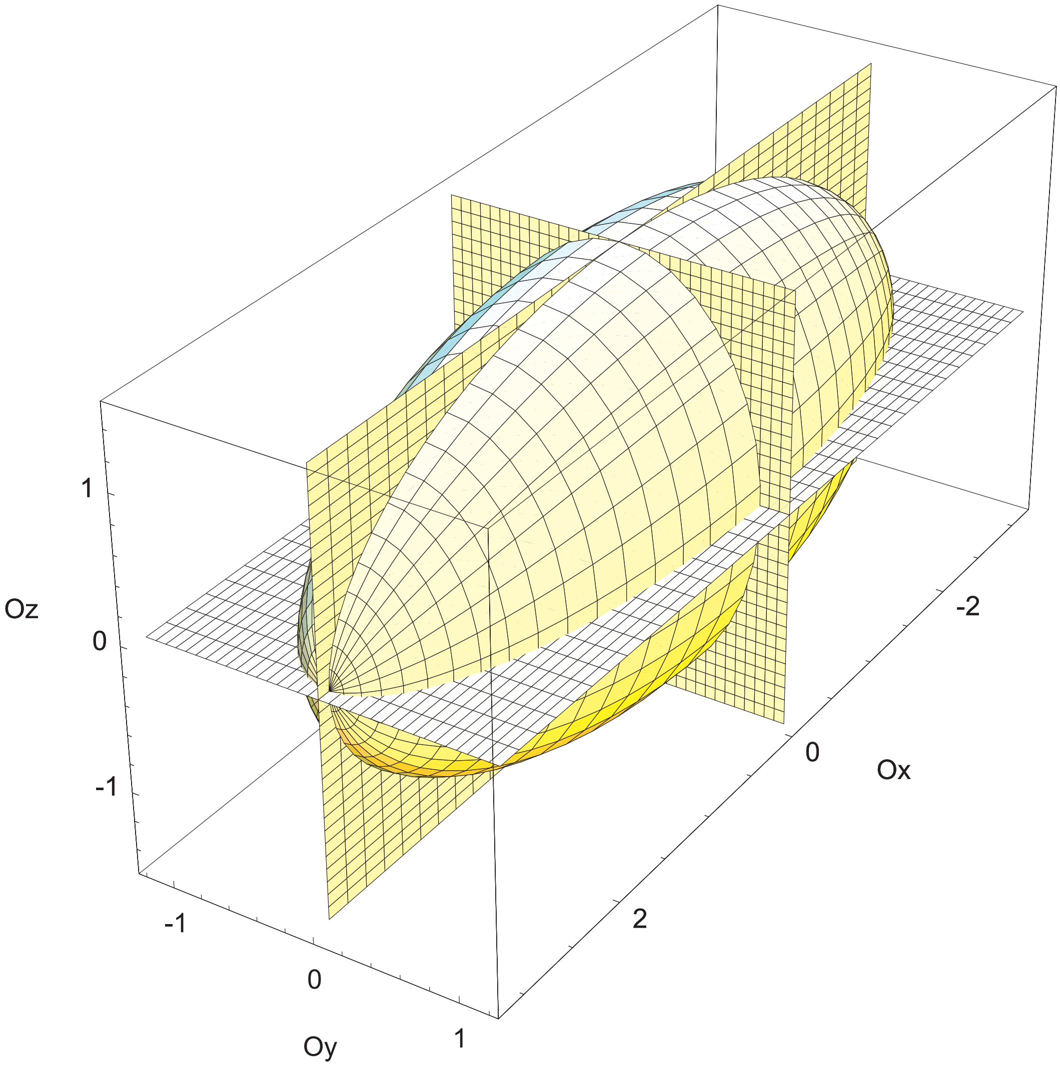
Remarca 1.4 In general un plan este tangent la sferă dacă distanţa de la centrul sferei la plan este egală cu raza.

2.2 Cuadrice pe ecuaţii reduse

2.2.1 Elipsoid

Definitia 2.1 *Se numeşte elipsoid mulţimea punctelor din spaţiu care într-un sistem de coordonate bine ales verifică ecuaţia:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{Elips}$$



Pentru a studia suprafaţa dată vom afla intersecţiile ei cu planele de coordonate şi cu plane paralele cu planele de coordonate. Un calcul simplu ne conduce la:

Teorema 2.1 *Intersecţia elipsoidului cu planul xOy este elipsa de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, iar cu plane paralele cu xOy ,$z = \gamma$, este elipsa de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\gamma^2}{c^2}$, pentru $|\gamma| < c$, un punct pentru $|\gamma| = c$ şi vidă pentru $|\gamma| > c$.*

Remarca 2.1 Este devărată o teoremă analoagă pentru intersecţia cu plane paralele cu celelate plane de coordonate.

Remarca 2.2 Axele de coordonate şi planele de coordonate sunt axe, respectiv plane de simetrie pentru elipsoid. (adic dacă un punct se află pe elipsoid şi simetricu său faz de axe, respectiv plane se află pe elipsoid (două puncte sunt simetrice fată de o dreaptă sau plan dacă mijlocul segmentului care le uneşte este pe dreapă sau plan şi acest segment este perependicular pe dreaptă, respectiv plan).

Dacă avem un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pe elisoid, atunci:

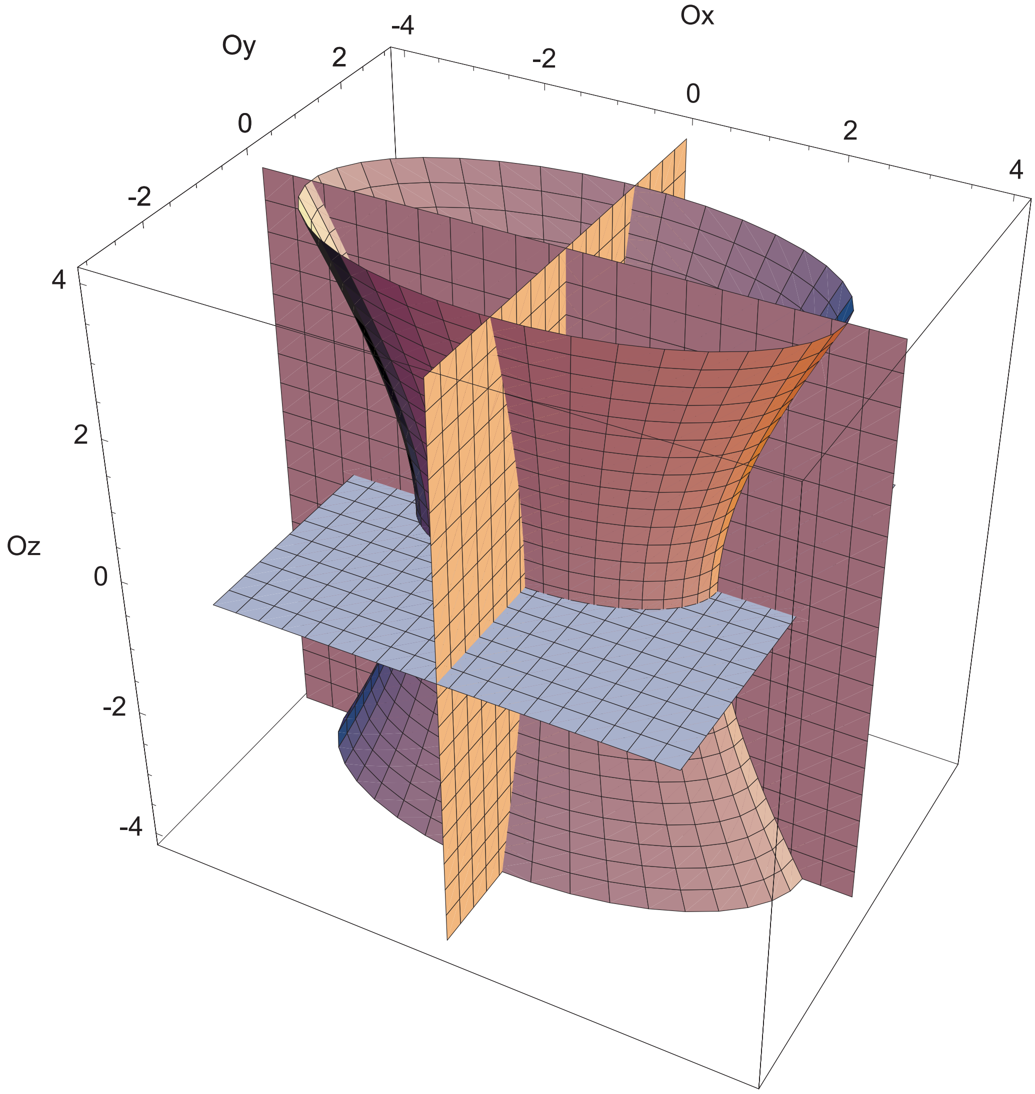
Teorema 2.2 *Ecuaţia planului tangent la elipsoid în M_0 este:*

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

2.2.2 Hiperboloidul cu o pânză

Definitia 2.2 *Se numeşte hiperboloid cu o pânză mulţimea punctelor din spaţiu care într-un sistem de coordonate bine ales verifică ecuaţia:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{HIP1}$$



Un calcul simplu ne conduce la:

Teorema 2.3 *Intersectia hiperboloidului cu o pânză cu plane paralele cu xOy , $z = \gamma$, este o familie de elipse:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\gamma^2}{c^2}.$$

Teorema 2.4 *Intersecţia hiperboloidului cu o pânză cu plane paralele cu xOz, $y = \beta$, este o familie de hiperbole:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{\beta^2}{b^2}.$$

Teorema 2.5 *Intersecţia hiperboloidului cu o pânză cu plane paralele cu yOz, $x = \alpha$, este o familie de hiperbole:*

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{a^2}.$$

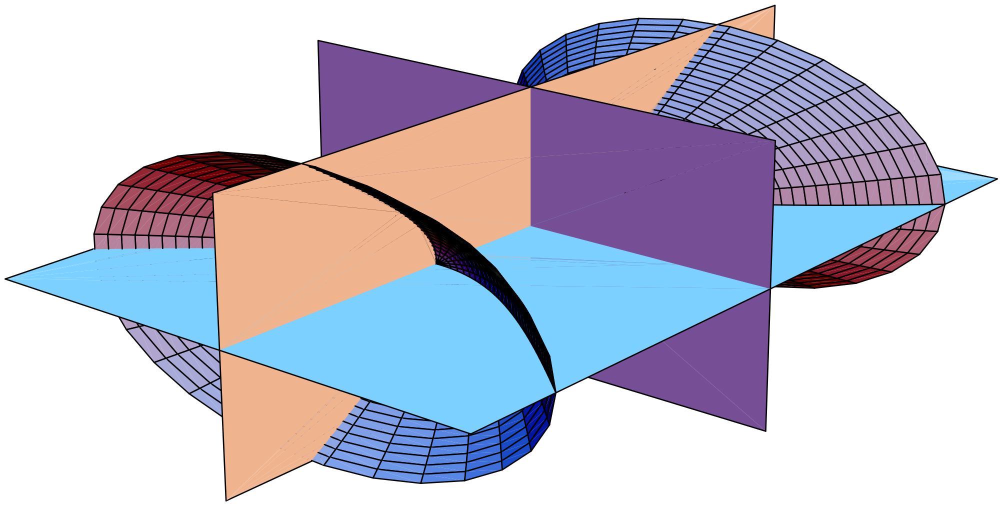


Figura 2.2.1.

Remarca 2.3 Axele şi planele e simetrie sunt aceleaşi ca la elipsoid.

2.2.3 Hiperboloidul cu două pânze

Definitia 2.3 *Se numeşte hiperboloid cu două pânze mulţimea punctelor din spaţiu care într-un sistem de coordonate bine ales verifică ecuaţia:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{HIP2}$$

Un calcul simplu ne conduce la:

Teorema 2.6 *Intersectia hiperboloidului cu o pânză cu plane paralele cu xOy , $z = \gamma$, este o familie de hiperbole:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\gamma^2}{c^2}.$$

Teorema 2.7 *Intersecţia hiperboloidului cu o pânză cu plane paralele cu xOz, $y = \beta$, este o familie de hiperbole:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{\beta^2}{b^2}.$$

Teorema 2.8 *Intersecţia hiperboloidului cu o pânză cu plane paralele cu yOz, $x = \alpha$, (pentru $|\alpha| > a$)este o familie de elipse:*

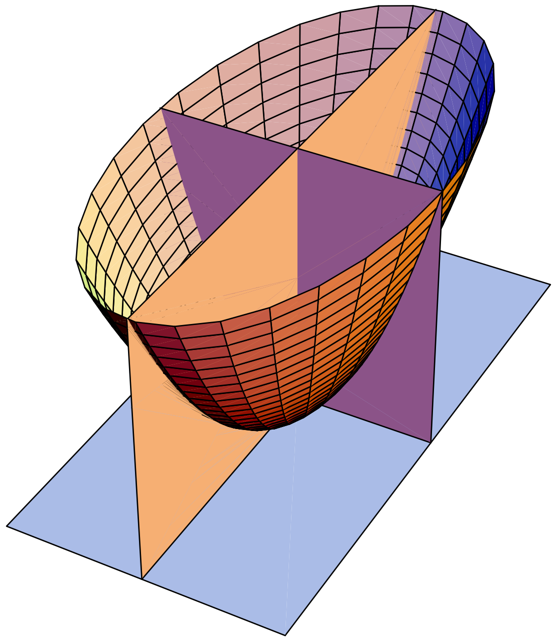
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{\alpha^2}{a^2} - 1.$$

Remarca 2.4 Axele şi planele e simetrie sunt aceleaşi ca la elipsoid.

2.2.4 Paraboloidul eliptic

Definitia 2.4 *Se numeşte parabiloid eliptic mulţimea punctelor a căror coordonate, într-un sistem bine ales, verifică ecuaţia:*

$$2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \tag{PE}$$



UN calcul simplu ne conduce la:

Teorema 2.9 *Intersecţia parabolidului eliptic cu plane paralele cu xOy, $z = \gamma > 0$, este o familie de elipse:*

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 2\gamma \\ z &= \gamma \end{aligned}$$

Teorema 2.10 *Intersecţia paraboloidului eliptic cu plane paralele cu xOz, $y = \beta$, este o familie de parabole:*

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} &= 2z \\ y &= \beta. \end{aligned}$$

Teorema 2.11 *Intersecţia paraboloidului eliptic cu plane paralele cu yOz, $x = \alpha$, este o familie de parabole:*

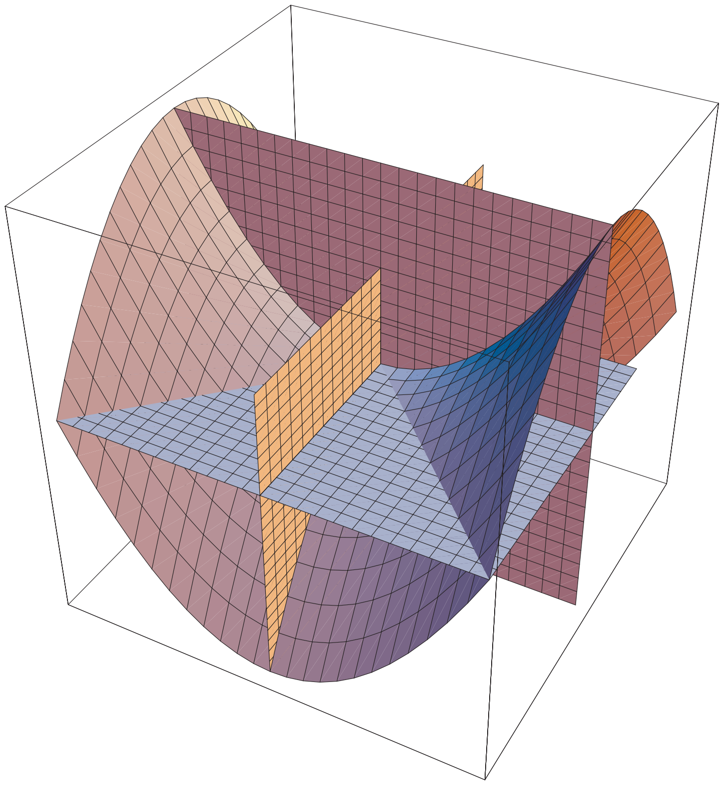
$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 2z \\ x &= \alpha. \end{aligned}$$

Remarca 2.5 Axa de simetrie e doar Oz, iar plane de simetrie xOz, yOz.

2.2.5 Paraboloidul hiperbolic

Definitia 2.5 *Se numeşte parabiloid hiperbolic mulţimea punctelor a căror coordonate, într-un sistem bine ales, verifică ecuaţia:*

$$2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \tag{PH}$$



Un calcul simplu ne conduce la:

Teorema 2.12 *Intersecţia paraboloidului hiperbolic cu plane paralele cu* xOy , $z = \gamma$,*este formată din hiperbole:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2\gamma.$$

Teorema 2.13 *Intersecţia paraboloidului hiperbolic cu plane paralele cu* xOz , $y = \beta$,*este formată din parabole:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 2z.$$

Teorema 2.14 *Intersecţia paraboloidului hiperbolic cu plane paralele cu* yOz , $x = \alpha$,*este formată din parabole:*

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Remarca 2.6 Axa de simetrie e doar Oz, iar plane de simetrie xOz, yOz.