SCURT CURS DE ALGEBRĂ LINIARĂ, GEOMETRIE ANALITICĂ ŞI DIFERENŢIALĂ

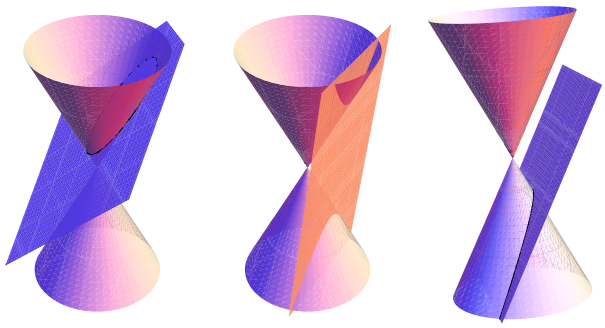
tinut de

Octavian Mircia Gurzău

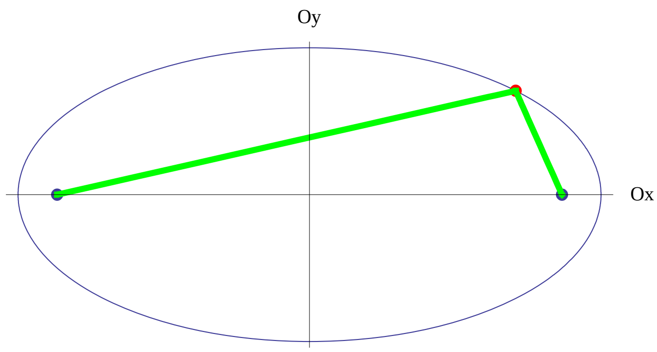
Capitolul 1

Geometrie analitică plană

1.1 Conice



Definitie: *Se numeşte elipsă locul geometric al punctelor din plan pt. care suma distanţelor la doua puncte fixe numite focare este constantă.*



Notăm focarele cu $F_1\left(-c,0\right), F_2(c,0)$ şi punctul de pe elipsă cu $M\left(x,y\right)$. Cf. def.:

$$MF_1 + MF_2 = 2a > 2c$$

adică:

$$\sqrt{\left(x+c\right)^2 + \left(y-0\right)^2} + \sqrt{\left(x-c\right)^2 + \left(y-0\right)^2} = 2a$$

$$\left(\sqrt{\left(x+c\right)^2 + \left(y-0\right)^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{\left(x-c\right)^2 + \left(y-0\right)^2}\right)^2$$

$$\left(x+c\right)^2 + \left(y-0\right)^2 =$$

$$= 4a^2 - 4a\sqrt{\left(x-c\right)^2 + \left(y-0\right)^2} + \left(x-c\right)^2 + \left(y-0\right)^2$$

rezultă:

$$2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{\left(x-c\right)^2 + \left(y-0\right)^2} - 2cx$$

$$cx - a^2 = -a\sqrt{\left(x-c\right)^2 + \left(y-0\right)^2}$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2ca^2x + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$\left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

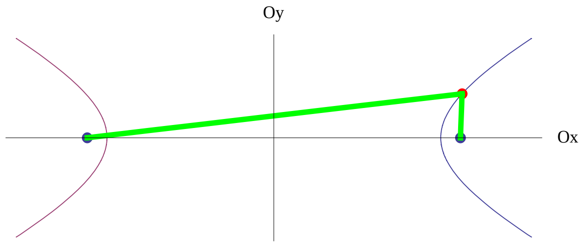
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1.1.1)$$

unde $b^2 = a^2 - c^2$.

Obs. SE pot folosi şi ecuaţiile parametrice ale elipsei:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

Definiţie: *Se numeşte* **hiperbolă** *locul geometric al punctelor din plan pt. care valoarea absolută a diferenţei distanţelor la doua puncte fixe numite focare este constantă.*



Notăm focarele cu $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ şi punctul de pe hiperbolă cu $M(x, y)$. Cf. def.:

$$|MF_1 - MF_2| = 2a$$

unde $a < c$.

Făcând calculele rezultă:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1.1.2)$$

unde $b^2 = c^2 - a^2$.

Obs.: se pot folosi şi ec. parametrice ale hiperbolei:

$$\begin{cases} x = \pm a\cosh t \\ y = b\sinh t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

unde

$$\begin{aligned} \cosh t &= \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \operatorname{ch} t \\ \sinh t &= \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{aligned}$$

relaţia de bază:

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \text{ pentru } \forall t \in \mathbb{R}$$

Definiţie: *Se numeşte* **parabolă** *locul geometric al punctelor din plan pt. care distanţele la un punct fix numit focar şi o dreaptă fixă numită directoare sunt egale.*

Fie focarul $F(p/2, 0)$ şi directoarea de ecuaţie $x = -p/2$ iar $M(x, y)$ un punct pe parabolă, Cond. din def. se scrie:

$$(x - p/2)^2 + y^2 = (x + p/2)^2$$

rezultă ec. parabolei:

$$y^2 = 2px \qquad (1.1.3)$$

Obs. Conicele se pot defini unitar:

Definiţie: *Se numeşte conica o curba pentru care raportul distantelor de la un punct de pe curba la un punct fix numit focar si o dreapta fixa numita directoare este constant e.* (e este excentricitatea conicei).

Ecuaţia tangentei la elipsă într-un punct de pe elipsă:

Fie elipsa:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

şi un punct $M_0(x_0, y_0)$ pe elipsă, adică:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \tag{1.1.4}$$

Se ştie că tangenta la elipsă este o dreaptă care intersectează elipsa într-un singur punct.

Ec. unei drepte care trece prin M_0 este:

$$y - y_0 = m(x - x_0). \tag{1.1.5}$$

intersectând cu elipsa:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}$$

rezultă:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y_0 + m(x - x_0))^2}{b^2} = 1$$

$$b^2x^2 + a^2\left(y_0^2 + 2my_0(x - x_0) + m^2(x - x_0)^2\right) - a^2b^2 = 0$$

$$\left(a^2m^2 + b^2\right)x^2 + a^2\left(2my_0 - 2m^2x_0\right)x + \left(a^2\left(m^2x_0^2 - 2mx_0y_0 + y_0^2\right) - a^2b^2\right) = 0$$

ec. e de forma $Ax^2 + Bx + c = 0$ are sol. unică dacă $B^2 - 4AC = 0$.

$A = \left(a^2m^2 + b^2\right); B = 2a^2m(y_0 - mx_0)$

$C = a^2\left(m^2x_0^2 - 2mx_0y_0 + y_0^2 - b^2\right).$

Deoarece B are factor comun pe 2 calculăm discriminantul ecuaţiei cu formula redusă: $\Delta' = \left(\frac{B}{2}\right)^2 - AC$, :

$$\begin{aligned}
\Delta' &= a^4m^2(y_0 - mx_0)^2 - a^2\left(a^2m^2 + b^2\right)\left(m^2x_0^2 - 2mx_0y_0 + y_0^2 - b^2\right) = \\
&= a^2\left(\begin{array}{c} \overbrace{a^2m^2y_0^2} - 2a^2\widetilde{m^3y_0}x_0 + \underbrace{a^2m^4x_0^2} - \underbrace{a^2m^4x_0^2} + 2\widetilde{m^3a^2}x_0y_0 - \\ - \overbrace{a^2m^2y_0^2} + a^2m^2b^2 - b^2m^2x_0^2 + 2mb^2x_0y_0 - b^2y_0^2 + b^4 \end{array}\right) = \\
&= a^2b^2\left(\left(a^2 - x_0^2\right)m^2 + 2mx_0y_0 + b^2 - y_0^2\right).
\end{aligned}$$

Punând condiţia ca ecuaţia $\Delta' = 0$ rezultă:

$$\begin{aligned}
m_{1,2} &= \frac{-x_0y_0 \pm \sqrt{x_0^2y_0^2 - \left(a^2 - x_0^2\right)\left(b^2 - y_0^2\right)}}{a^2 - x_0^2} = \\
&= \frac{-x_0y_0 \pm \sqrt{x_0^2y_0^2 - a^2b^2 + a^2y_0^2 + b^2x_0^2 - x_0^2y_0^2}}{a^2 - x_0^2}
\end{aligned} \tag{1.1.6}$$

Dar din ecuaţia (1.1.4) rezultă. $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$ care înlocuită în (1.1.6) dă:

$$m_{1,2} = \frac{-x_0y_0}{a^2 - x_0^2} = -\frac{x_0y_0}{a^2\frac{y_0^2}{b^2}} = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

Înlocuind valoarea lui m în ecuaţia dreptei (1.1.5) rezultă ecuaţia tangentei:

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0)$$

sau ţinând cont de faptul că M_0 este pe elipsă, deci coordonatele sale verifică ecuaţia (1.1.4) rezultă ecuaţia tangentei la elipsă într-un punct M_0 de pe elipsă:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Analog se obţine ecuaţia tangentei la hiperbola de ecuaţie (1.1.2) într-un punt de coordonate (x_0, y_0) de pe hiperbolă:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

iar ec. tangentei la parabolă într-un punct de pe parabolă:

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Capitolul 2

Algebră liniară I

2.1 Recapitulare cunoştiinţe de algebră din clasa XI-a

În clasa a XI s-a studiat la algebră problema existenţei soluţiei[1] şi calculării soluţiei sistemelor liniare[2] (adică sisteme care conţin doar ecuaţii de grad întâi) de forma:

$$AX = B, \tag{2.1.1}$$

unde A este o matrice cu m linii şi n coloane (conform notaţiilor de la începutul cursului: $A = [a_{ij}]_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}} \in \mathfrak{M}_{m,n}$), X o matrice cu n linii şi o coloană ($X = [x_i]_{i=\overline{1,n}} \in \mathfrak{M}_{n,1}$), iar B este o matrice cu m linii şi o coloană. ($B = [b_j]_{j=\overline{1,m}} \in \mathfrak{M}_{m,1}$). Se ştie că folosind operaţiile cu matrice sistemul 4.2.10 este scrierea prescurtată pentru sistemul (vezi notaţiile de la începutul cursului):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \tag{2.1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i = b_j, j = \overline{1,m}$$

Pentru a da răspuns la cele două probleme s-a introdus în clasa XI-a noţiunea de determinant a unei matricei pătratice de ordin n. Reamintim aci această definiţie:

Definitia 2.1.1 *Se numeşte determinantul matricei $A \in \mathfrak{M}_n$ un număr real notat cu $\det(A)$ (sau $|a_{ij}|_{i,j=\overline{1,n}}$)dat de formula:*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \cdot ... \cdot a_{n\sigma(n)}, \tag{2.1.3}$$

unde prin S_n s-a notat mulţimea tuturor permutărilor mulţimii $\{1, 2, ..., n\}$[3], iar prin $sgn(\sigma)$ semnul permutării σ.(vezi [1]).

Remarca 2.1.1 Calculul unui determinant nu se face cu formula 2.1.3 decât pentru $n = 2$ ($\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$) sau $n = 3$ (regula lui Sarrus sau regula triunghiului), pentru $n > 3$ calculul determinanţilor făcându-se prin utilizarea proprietăţilor lor (dezvoltarea după elementele unei linii (coloane), adunarea elementelor unei linii (coloane) înmulţite cu un număr la elementele corespunzătoare altei linii (coloane) în scopul obţinerii de cât mai multe elemente nule,...).

Fie $A \in \mathfrak{M}_{m,n}$.

Definitia 2.1.2 *Se numeşte minor de ordin k ($k \leq \min\{m, n\}$) al matricei A determinantul unei matrice pătratice de ordin k obţinute din matricea A alegând doar k linii $i_1 < i_2 < ... < i_k$ din liniile matricei A şi k coloane $j_1 < j_2 < ... < j_k$ din coloanele matricei A.*

---

[1] adică există, pentru matrcele A şi B date, o matrice X care verifică 4.2.10.

[2] cum se pot afla toate matricele X care verifică sistemul 4.2.10 (adică toate soluţiile).

[3] adică toate funcţiile bijective $\sigma : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$.

Remarca 2.1.2 Un minor de ordin k al matricei A este deci de forma:

$$\left|a_{i_p j_q}\right|_{p.q=\overline{1,k}}\ , \qquad (2.1.4)$$
$$1 \ \leq \ i_1 < i_2 < ... < i_k \leq m\,,\ 1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_k \leq n$$

Cu ajutorul noţiunii de minor de ordin k al unei matrice A se defineşte în [1] noţiunea de rang al unei matrice:

Definitia 2.1.3 *Se numeşte rang al unei matrice $A \in \mathfrak{M}_{m,n}$ un număr natural k (notat $\mathrm{rang}\,(A)$) cu proprietăţile:*
1) există un minor de ordin k al matricei A nenul;
2) toţi minorii de ordin mai mare decât k ai matricei A sunt nuli.

Dacă notăm cu $\bar{A}$ matricea extinsă a sistemului 4.2.10 (adică matricea formată din adăugarea la matricea A a unei coloane formate din elementele matricei B) atunci problema existenţei soluţiei sistemelui 4.2.10 este dată de următoarea teoremă:

Teorema 2.1.1 ***(Kronecker-Capeli)*** *Sistemul 4.2.10 este compatibil*[4] *dacă şi numai dacă rangul matricei A este egal cu rangul matricei $\bar{A}$.*

Pentru rezolvarea sistemelor liniare e necesar să se introducă noţiunea de inversă a unei matrice. Conform manualului [1] vom numi matrice unitate de ordin n matricea notată cu I_n care are elementele de pe diagonală egale cu 1 iar celelalte nule. Folosind simbolul lui Kronecker definit de:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1,\ i = j \\ 0,\ i \neq j \end{cases}, \qquad (2.1.5)$$

matricea unitate I_n se poate defini astfel:

$$I_n = [\delta_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}\,. \qquad (2.1.6)$$

Principala proprietate a matricii unitate (de ordin n) este dată de:

Proposition 2.1.2 *Oricare ar fi matricea $A \in \mathfrak{M}_{m,n}$ şi oricare ar fi matricea $C \in \mathfrak{M}_{n,m}$ sunt verificate egalităţile:*

$$AI_n = A\,,\ I_nC = C. \qquad (2.1.7)$$

Remarca 2.1.3 Formulele 2.1.7 justifică denumirea de matrice unitate pentru I_n.

Fie acum $A \in \mathfrak{M}_n$.

Definitia 2.1.4 *Matricea A se numeşte inversabilă dacă există o matrice notată A^{-1} astfel încât:*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n, \qquad (2.1.8)$$

iar matricea A^{-1} care verifică relaţia de mai sus se numeşte inversa matricei A.

Existenţa şi modul de calcul al matrcei A^{-1} sunt date de:

Teorema 2.1.3 *A^{-1} există dacă şi numai dacă det$(A) \neq 0$ şi în acest caz:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det{(A)}} A^*, \qquad (2.1.9)$$

unde A^* este adjuncta matricei A, şi se defineşte astfel:

$$A^* = [A_{ij}]_{j,i=\overline{1,n}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & .. & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{bmatrix}, \qquad (2.1.10)$$

---

[4] adică are cel puţin o soluţie $X \in \mathfrak{M}_{n,1}$.

în 2.1.10 $A_{ij} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}$ (numit complementul algebric al elementului a_{ij}), iar Δ_{ij} este minorul de indice i şi j (corespunzător elementului a_{ij}) al matricei A care este determinantul matricei de ordin $n-1$ care se obţine din matricea A eliminând linia i şi coloana j.

Folosind inversa unei matrice soluţia sistemului 4.2.10 în cazul $m = n$ este dată de:

Teorema 2.1.4 ***(Regula lui Cramer)*** *Dacă $\det(A) \neq 0$ atunci sistemul 4.2.10 are soluţie unică dată de:*

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{2.1.11}$$

Remarca 2.1.4 Ţinând cont de regula de înmulţire a două matrice, de formula 2.1.9, şi de dezvoltarea unui detreminant după elementele unei linii, formula 2.1.11 este echivalentă cu formulele:

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\det(A)},\ i = \overline{1,n}, \tag{2.1.12}$$

unde Δ_{x_i} sunt determinaţii matricei obţinute din matricea A prin înlocuirea coloanei cu numărul i cu coloana termenilor liberi (elementele matricei B) din sistemul 4.2.10.

Teoremele 2.1.1 şi 2.1.4 rezolvă (teoretic) problemele existenţei şi calculului soluţiilor sistemului 4.2.10, căci pe baza lor rezolvarea sistemului 4.2.10 se face în următorii paşi:

1. *Se calculează $k = \operatorname{rang}(A)$ şi $k_1 = \operatorname{rang}\left(\bar{A}\right)$.*
2. *Se verifică dacă $k = k_1$; în cazul egalităţii se trece la pasul următor, în cazul neegalităţii se menţionează că sistemul 4.2.10 este incompatibil şi se opresc calculele.*
3. *Minorul de ordin k nenul se notează cu Δ_{princ} şi se numeşte minorul principal al sistemului. Necunoscutele care au coeficienţi în Δ_{princ} se numesc necunoscute principale, iar celelalte necunoscute secundare*[5]*, ecuaţiile care au coeficienţi în Δ_{princ} se numesc ecuaţii principale, iar celelalte ecuaţii secundare. Se formează un sistem numai din ecuaţiile principale ale 2.1.2, în care termenii care conţin necunoscute secundare se trec în partea dreaptă.*
4. *Se rezolvă conform regulii lui Cramer sistemul astfel obţinut, necunoscutele secundare luând valori arbitrare.*

În legătură cu cele de mai sus, recomandăm rezolvarea următoarelor exerciţii:

Exercitiul 2.1.1 Să se calculeze determinantul Vandermonde:

$$V(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & ... & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & ... & x_3^{n-1} \\ . & . & . & ... & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

.

Exercitiul 2.1.2 Să se demonstreze că soluţia generală a sistemului omogen (rangul matricei sistemului fiind 2):

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \end{aligned}$$

se poate scrie sub forma: $x = \lambda \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, y = \lambda \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}, z = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$

[5] dacă nu există necunoscute secundare ($k = n$) sistemul 4.2.10 se numeşte compatibil determinat, dacă există necunoscute secundare ($n > k$) atunci sistemul se numeşte nedeterminat (simplu nedeterminat pentru $n - k = 1$, dublu.nedeterminat pentru $n - k = 2$,...)

2.2 Algoritmul lui Gauss

În acest paragraf vom studia aşa numitul algoritm al lui Gauss care, în esenţă nu este altceva decât metoda reducerii. Paşii algorimului constau din reducerea (eliminarea) primei necunoscute din ecuaţiile de la a doua în jos , eliminarea necunoscutei a doua din ecuaţiile de la a treia începând,... obţinându-se în final un sistem a cărui matrice are elementele de sub diagonala principală nule şi acest sistem se rezolva prin metoda substituţiei începând de la ultima ecuaţie şi ultima necunoscută. Mai precis având scris sistemul 4.2.10 sub forma 2.1.2 la primul pas se fac zerouri pe coloana întâi a matricei A, înmulţind prima ecuaţie a sistemului 2.1.2 cu numere convenabile şi adunând-o la celelalte ecuaţii:

Pasul 1 Dacă:

$$a_{11} \neq 0 \tag{2.2.1}$$

atunci se înmulţeste ecuaţia întâi a sistemului 2.1.2 cu $\mu_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ şi se adună la ecuaţia cu numarul i, (pentru $i = \overline{2,n}$) obţinând sistemul:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & a_{m3}^{(1)} & \dots & a_{mn}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ . \\ b_m^{(1)} \end{bmatrix} \tag{2.2.2}$$

unde $a_{1j}^{(1)} = a_{1j}$, pentru $j = \overline{1,n}$, $b_1^{(1)} = b_1$ şi $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} + \mu_{i1}a_{1j}$, $b_i^{(1)} = b_i + \mu_{i1}b_1$ pentru $i = \overline{2,m}$, $j = \overline{2,n}$.

Pasul 2 Presupunând acum că:

$$a_{22}^{(1)} \neq 0 \tag{2.2.3}$$

se fac zerouri pe coloana a doua a matricei A înmulţind ecuaţia a doua a sistemului 2.2.2 cu $\mu_{i2} = -\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ şi adunând-o la ecuaţia cu numărul i, obţinând sistemul:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & a_{m3}^{(2)} & \dots & a_{mn}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(2)} \\ . \\ b_m^{(2)} \end{bmatrix} \tag{2.2.4}$$

unde $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)}$ pentru $i = \overline{1,2}$ $j = \overline{1,n}$ şi $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} + \mu_{i2}a_{2j}^{(1)}$, $b_i^{(2)} = b_i^{(1)} + \mu_{i2}b_2^{(1)}$pentru $i = \overline{3,m}$, $j = \overline{3,n}$.

Procedând analog la sfârşitul pasului k obţinem sistemul :

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{13}^{(k)} & \dots & a_{1k}^{(k)} & a_{1k+1}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & a_{23}^{(k)} & \dots & a_{2k}^{(k)} & a_{2k+1}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(k)} & \dots & a_{3k}^{(k)} & a_{3k+1}^{(k)} & \dots & a_{3n}^{(k)} \\ . & . & . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk}^{(k)} & a_{kk+1}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1k+1}^{(k)} & \dots & a_{k+1n}^{(k)} \\ . & . & . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{mk+1}^{(k)} & \dots & a_{mn}^{(k)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(k)} \\ b_2^{(k)} \\ b_3^{(k)} \\ . \\ b_m^{(k)} \end{bmatrix} \tag{2.2.5}$$

Pasul k+1. Dacă:

$$a_{k+1k+1}^{(k)} \neq 0 \tag{2.2.6}$$

atunci înmulţim ecuaţia cu numărul $k+1$ cu $\mu_{i,k+1} = -\frac{a_{i,k+1}^{(k)}}{a_{k+1k+1}^{(k)}}$ şi o adunăm la ecuaţia cu numărul i (pentru $i = \overline{k+2,m}$) obţinând sistemul:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(k+1)} & a_{12}^{(k+1)} & a_{13}^{(k+1)} & ... & a_{1k}^{(k+1)} & a_{1k+1}^{(k+1)} & ... & a_{1n}^{(k+1)} \\ 0 & a_{22}^{(k+1)} & a_{23}^{(k+1)} & ... & a_{2k}^{(k+1)} & a_{2k+1}^{(k+1)} & ... & a_{2n}^{(k+1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(k+1)} & ... & a_{3k}^{(k+1)} & a_{3k+1}^{(k+1)} & ... & a_{3n}^{(k+1)} \\ . & . & . & ... & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{kk}^{(k+1)} & a_{kk+1}^{(k+1)} & ... & a_{kn}^{(k+1)} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a_{k+1k+1}^{(k+1)} & ... & a_{k+1n}^{(k+1)} \\ . & . & . & ... & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & a_{mn}^{(k+1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(k+1)} \\ b_2^{(k+1)} \\ b_3^{(k+1)} \\ . \\ b_m^{(k+1)} \end{bmatrix} \qquad (2.2.7)$$

unde $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)}$, $b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)}$ pentru $i = \overline{1,k+1}$, $j = \overline{1,n}$ şi $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} + \mu_{i,k+1} a_{k+1,j}^{(k)}$ $b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} + \mu_{i,k+1} b_{k+1}^{(k)}$ pentru $i = \overline{k+2,m}$, $j = \overline{k+1,n}$.

Remarca 2.2.1 În cazul în care se utilizează calculatorul, pentru a micşora erorile de rotunjire la împărţire e preferabil ca la fiecare pas k să se schimbe întâi linia k cu linia care conţine pe coloana k sub diagonală cel mai mare număr în valoare absolută, adică să se efectueze mai întâi următorele operaţii :

1) se determină indicele l cel mai mic astfel încât: $\left|a_{lk}^{(k-1)}\right| = \max\limits_{k \le i \le m} \left|a_{ik}^{(k-1)}\right|$.

2) se schimbă linia l cu linia k a matricelor $A^{(k)}$ şi $B^{(k)}$.

Remarca 2.2.2 Dacă condiţia 2.2.6 nu e verificată, atunci se verifică dacă există elemente nenule pe coloana $k+1$ începând cu linia $k+2$ în matricea $A^{(k)}$ şi dacă există se schimbă linia $k+1$ a matricelor $A^{(k)}$ şi $B^{(k)}$ cu linia care conţine elementul nenul. Dacă toate elementele coloanei $k+1$ începând de la linia $k+2$ sunt nule atunci sistemul este sau incompatibil, sau compatibil nedeterminat cu necunoscuta x_k ca necunoscută secundară şi pentru rezolvarea lui e preferabil să se aplice algoritmul de mai sus cu mici modificări (vezi cele ce urmează după teorema 2.2.1).

Din modul cum am obţinut sistemul 2.2.7 din sistemul iniţial 2.1.2 se poate demonstra următoarea teoremă:

Teorema 2.2.1 *Sistemele 2.1.2 şi 2.2.7 sunt echivalente*[6].

Se pune în mod natural problema care este numărul maxim de paşi posibili la algoritmul lui Gauss şi cum se rezolvă apoi sistemul obţinut. Din teorema precedentă şi 2.1.1, rezultă că numărul maxim de paşi este egal cu rangul matricei A. Dacă rangul matricei A este k atunci la sfârşitul pasului k sistemul 2.2.5 devine:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{13}^{(k)} & ... & a_{1k}^{(k)} & a_{1k+1}^{(k)} & ... & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & a_{23}^{(k)} & ... & a_{2k}^{(k)} & a_{2k+1}^{(k)} & ... & a_{2n}^{(k)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(k)} & ... & a_{3k}^{(k)} & a_{3k+1}^{(k)} & ... & a_{3n}^{(k)} \\ . & . & . & ... & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{kk}^{(k)} & a_{kk+1}^{(k)} & ... & a_{kn}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(k)} \\ b_2^{(k)} \\ b_3^{(k)} \\ . \\ b_m^{(k)} \end{bmatrix} \qquad (2.2.8)$$

Acest sistem este (evident) incompatibil dacă există $b_j^{(k)} \neq 0$, cu $j > k$. Dacă pentru $j > k$ $b_j^{(k)} = 0$ atunci sistemul este compatibil, determinat pentru $k = n$ şi nedeterminat pentru $k < n$. Soluţia lui se

[6] adică sau sunt ambele incompatibile, sau dacă sunt compatibile au aceleaşi soluţii.

află prin rezolvarea (în raport cu necunoscutele principale) a ecuaţiilor începând de la ultima şi înlocuind necunoscutele deja aflate în ecuaţiile precedente, conform formulelor:

$$\begin{array}{l} x_k = \dfrac{b_k^{(k)} - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j}{a_{kk}^{(k)}} \\ x_i = \dfrac{b_i^{(k)} - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_{ij}^{(k)} x_j - \sum\limits_{l=i+1}^{k} a_{il}^{(k)} x_l}{a_{ii}^{(k)}}, i = \overline{k-1,1} \end{array} . \tag{2.2.9}$$

Remarca 2.2.3 Acest algoritm se poate aplica şi la calculul inversei unei matrice, aplicând paşii matricei formată din matricea A şi matricea unitate I_n scrisă alături, obţinând în final în stânga I_n iar în dreapta A^{-1}: $[A\,|I_n] \Rightarrow \left[I_n\,\middle|A^{-1}\right]$, deoarece aflarea coloanei cu nr. k a matricei inverse se reduce la rezolvarea unui sistem având ca matrice matricea A iar ca termen liber coloana cu nr. k a matricei unitate de ordin corespunzător.

Remarca 2.2.4 Acest algoritm permite şi determinarea rangului unei matrice A , rangul matricei fiind egal cu numărul maxim de paşi din alogoritm (matricea B nu se mai ia în calcul în acest caz).

Capitolul 3

Geometrie analitică

3.1 Vectori

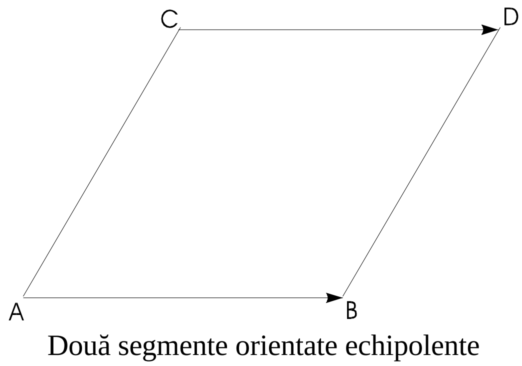
3.1.1 Definirea noţiunii de vector

Se presupune cunoscută noţiunea de segment orientat[7]. Vom nota un segment orientat cu două litere mari, cu săgeată deasupra, prima literă indicând originea iar cea de a doua extremitatea segmentului orientat (de exemplu $\overrightarrow{AB}$, A fiind originea iar B fiind extremitatea segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$). Pe mulţimea segmentelor orientate, pe care o vom nota cu $\mathfrak{S}$, introducem următoarea relaţie:

Definitia 3.1.1 *Segmentele $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sunt echipolente (şi vom nota acest lucru cu $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$) dacă şi numai dacă sunt verificate următoarele condiţii:*

1. *au aceeaşi lungime ($AB = CD$);*
2. *dreptele AB şi CD sunt paralele sau coincid ($AB \| CD$);*
3. *$\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ au acelaşi sens (dacă AB şi CD sunt paralele atunci $AC \cap BD = \emptyset$, iar dacă dreptele AB şi CD coincid atunci $[AC] \cap [BD]$ este sau mulţimea vidă, sau se reduce la un punct sau este egală cu $[AD]$ sau este egală cu $[BC]$)[8].*

Remarca 3.1.1 Condiţiile din definiţia 3.1.1 sunt echivalente, în cazul în care punctele A, B, C, D nu sunt coliniare cu faptul că $ABDC$ (punctele fiind luate în această ordine) este paralelogram, conform figurii de mai jos:



Două segmente orientate echipolente

Principalele proprietăţi ale relaţiei de echipolenţă dată de definiţia 3.1.1 sunt date de:

Teorema 3.1.1 *Relaţia de echipolenţă este:*

1. *reflexivă: pentru orice $\overrightarrow{AB} \in \mathfrak{S}$:$\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$;*
2. *simetrică: dacă $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ atunci şi $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$;*

[7] un segement orientat este un segment $\overline{AB}$ pe care s-a stabilit un sens de parcurgere de la A la B.

[8] sau, cum se exprimă o variantă de manual de geometrie de clasa a IX-a, segmentele AD şi BC au acelaşi mijloc.

3. tranzitivă: dacă $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ şi $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$ atunci $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$.

Demonstraţie. Demonstraţia acestor proprietăţi este imediată, ţinând cont de faptul că relaţia de egalitate între numere (care apare în condiţia 1. din definiţia 3.1.1) şi relaţia de paralelism între drepte (care apare în condiţia 2.) din aceeaşi definiţie au proprietăţile de reflexivitate, simetrie şi tranzitivitate. ■

Definitia 3.1.2 *Pentru un segment orientat $\overrightarrow{AB}$ vom numi clasă de echipolenţă corespunzătoare lui mulţimea tuturor segmentelor orientate echipolente cu el, mulţime notată cu $\left\{\overrightarrow{AB}\right\}$.*

Remarca 3.1.2 Cu simboluri matematice defînţia de mai sus se scrie:

$$\left\{\overrightarrow{AB}\right\} \stackrel{def}{=} \left\{\overrightarrow{CD} \in \mathfrak{S} \middle| \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}\right\}.$$

În legătură cu clasele de echipolenţă este adevărată următoarea teoremă:

Teorema 3.1.2 *Orice clasă de echipolenţă este nevidă şi două clase de echipolenţă sunt sau disjuncte sau coincid.*

Demonstraţie. Fie clasa de echipolenţă $\left\{\overrightarrow{AB}\right\}$.Conform cu 1. din teorema 4.2.1 $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$ şi deci $\overrightarrow{AB} \in \left\{\overrightarrow{AB}\right\} \neq \emptyset$. Fie acum două clase de echipolenţă $\left\{\overrightarrow{AB}\right\}$ şi $\left\{\overrightarrow{CD}\right\}$. Dacă ele sunt disjuncte teorema este demonstrată. Dacă există un segment orientat $\overrightarrow{EF} \in \left\{\overrightarrow{AB}\right\} \cap \left\{\overrightarrow{CD}\right\}$ să demonstrăm că ele sunt egale. Fiind vorba de două mulţimi, arătăm că fiecare este inclusă în cealaltă. Să considerăm un element $\overrightarrow{A_1B_1} \in \left\{\overrightarrow{AB}\right\}$. Atunci, conform definiţiei 3.1.2 $\overrightarrow{A_1B_1} \sim \overrightarrow{AB}$. Dar din $\overrightarrow{EF} \in \left\{\overrightarrow{AB}\right\}$ rezultă că $\overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{AB}$. Aplicând proprietăţile de simetrie şi tranzitivitate ale relaţiei de echipolenţă rezultă că $\overrightarrow{A_1B_1} \sim \overrightarrow{EF}$. Din $\overrightarrow{EF} \in \left\{\overrightarrow{CD}\right\}$ rezultă $\overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{CD}$. Din $\overrightarrow{A_1B_1} \sim \overrightarrow{EF}$ şi $\overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{CD}$ rezultă (tranzitivitatea relaţiei de echipolenţă) că $\overrightarrow{A_1B_1} \sim \overrightarrow{CD}$, adică conform aceleeaşi definiţii 3.1.2, $\overrightarrow{A_1B_1} \in \left\{\overrightarrow{CD}\right\}$, deci $\left\{\overrightarrow{AB}\right\} \subseteq \left\{\overrightarrow{CD}\right\}$. Reluând raţionamentul de mai sus de la coadă la cap, va rezulta şi incluziunea $\left\{\overrightarrow{AB}\right\} \supseteq \left\{\overrightarrow{CD}\right\}$, c.c.t.d. ■

Pe baza teoremei de mai sus suntem în măsură să dă următoarea definiţie:

Definitia 3.1.3 *Se numeşte vector o clasă de echipolenţă de segmente orientate. Pentru un vector dat un segment orientat din clasa respectivă de echipolenţă se numeşte reprezentant al său.*

Definitia 3.1.4 *Se numeşte lungimea unui vector lungimea oricărui reprezentant al său.*

Remarca 3.1.3 Vom nota vectorii cu litere mici din alfabetul latin cu bară deasupra ($\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{v}$, ..), şi dacă $\overrightarrow{AB} \in \overline{a}$ spunem că $\overrightarrow{AB}$ este un reprezentant al vectorului $\overline{a}$. Dacă nu este pericol de confuzie vom spune vectorul $\overrightarrow{AB}$, în loc de $\overrightarrow{AB}$ este un reprezentant al vectorului $\overline{a}$. Vom nota cu $\mathfrak{V}_3$ mulţimea tuturor vectorilor din spaţiu. Pentru vectorul $\overline{a}$ vom nota cu a sau cu $|\overline{a}|$ lungimea sa.

Remarca 3.1.4 Noţiunea de vector definită mai sus este ceea ce în fizică şi mecanică se numeşte **vector liber**, caracterizat prin mărime (lungimea vectorului respectiv), direcţie (toate dreptele paralele cu un reprezentant al său) şi sens. Dacă condiţia 2. din definiţia 3.1.1 se înlocuieşte cu "dreptele AB şi CD coincid" se obţine noţiunea de **vector alunecător** iar noţiunea de segment orientat coincide cu cea de **vector legat.**

Remarca 3.1.5 Se poate demonstra că fiind dat un punct O din spaţiu şi un vector $\overline{a}$ există un singur punct A astfel încât $\overrightarrow{OA} \in \overline{a}$.

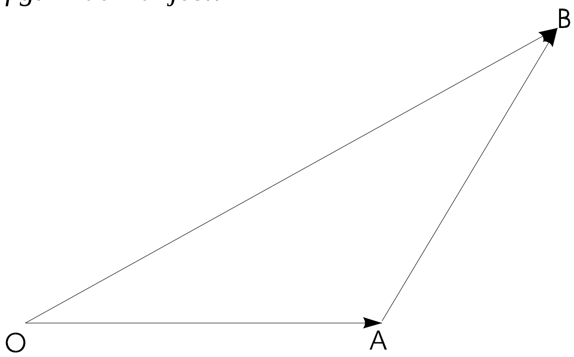
Remarca 3.1.6 În mulţimea vectorilor un rol important (ca "etaloane" pentru măsurarea lungimilor) îl joacă versorii, definiţi ca vectori de lungime 1.

3.1.2 Operaţii cu vectori

Suma a doi vectori şi înmulţirea unui vector cu un scalar

Fiind daţi doi vectori, suma lor se defineşte ajutorul reprezentanţilor astfel:

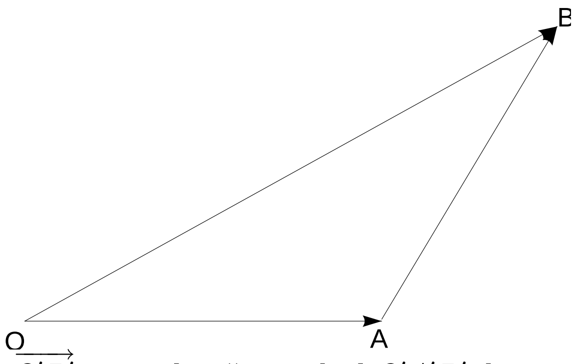
Definitia 3.1.5 *Dacă $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt doi vectori având reprezentanţii $\overrightarrow{OA}$ respectiv $\overrightarrow{AB}$ atunci suma $\overline{a}+\overline{b}$ are reprezentantul $\overrightarrow{OB}$, conform figurii de mai jos:.*



În legătură cu definiţia de mai sus se pune întrebarea dacă nu cumva suma a doi vectori nu depinde de reprezentanţii aleşi (adică, conform remarcii 3.1.5 de punctul O). Răspunsul la această întrebare este negativ, după cum rezultă din următoarea teoremă:

Teorema 3.1.3 *Suma a doi vectori $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ nu depinde de reprezentanţi.*

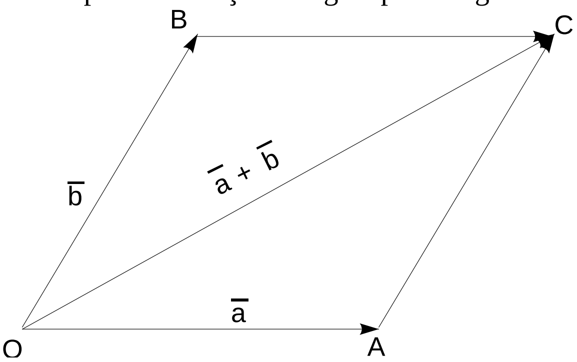
Demonstraţie[9]**.** Fie un alt punct O'. Conform remarcii 3.1.5 există un singur punct A' astfel încât $\overrightarrow{O'A'} \in \overline{a}$, şi un singur punct B' astfel încât $\overrightarrow{A'B'} \in \overline{b}$. Atunci, conform definiţiei 3.1.5 $\overrightarrow{O'B'} \in \overline{a}+\overline{b}$. Enunţul teoremei spune că trebuie să avem $\overrightarrow{O'B'} \sim \overrightarrow{OB}$. Făcând construcţia punctelor O', A', B' obţinem figura:



Din $\overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{O'A'}$ şi $\overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{O'B'}$ va rezulta că triunghiul $O'A'B'$ din această figură este congruent cu triunghiul OAB din figura 1., de unde va rezulta că $\overrightarrow{O'B'} \sim \overrightarrow{OB}$. ■

[9] doar ideea demonstraţiei, demonstraţia (geometrică) riguroasă fiind lăsată pe seama cititorului.

Remarca 3.1.7 Dacă punctele O, A, B nu sunt coliniare (adică vom spune că vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ nu sunt coliniari) atunci adunarea vectorilor se poate defini şi cu "regula paralelogramului" conform figurii de mai jos:



unde vectorul sumă este diagonala paralelogramului având ca laturi vectorii daţi.

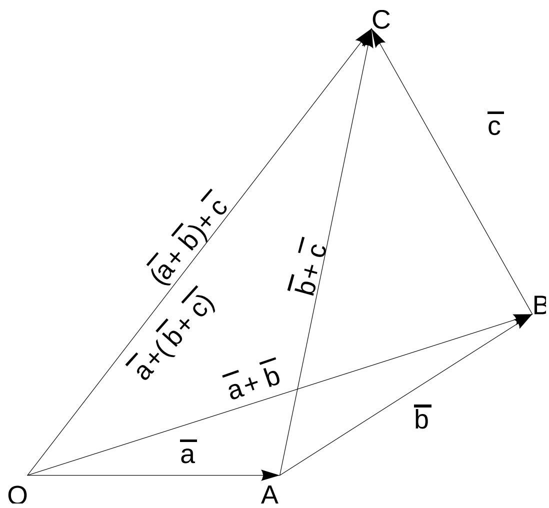
Principalele proprietăţi ale sumei sunt date de următoarea teoremă:

Teorema 3.1.4 $(\mathfrak{V}_3, +)$ *(mulţimea vectorilor înzestrată cu operaţia de adunare) formează un grup abelian.*

Demonstraţie:

1.Asociativitatea: rezultă urmărind cu atenţie următoarea figură şi scriind următoarele egalităţi:

$$\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$$



2.Comutativitatea: Dacă vectorii nu sunt coliniari rezultă din regula paralelogramului (vezi figura de la remarca 3.1.7), iar în caz de coliniaritate lăsăm demonstraţia pe seama cititorului.

3.Existenţa elementului neutru: definim vectorul nul $\overline{0} = \left\{\overrightarrow{AA}\right\}$.În acest caz (vezi de exemplu pe figura de mai sus:

$$\underbrace{\overrightarrow{OA}}_{\overline{a}} + \underbrace{\overrightarrow{AA}}_{\overline{0}} = \underbrace{\overrightarrow{OA}}_{\overline{a}} .$$

4.Existenţa elementului simetric: dacă $\overline{a} = \left\{\overrightarrow{OA}\right\}$ atunci definim $-\overline{a} \overset{def}{=} \left\{\overrightarrow{AO}\right\}$. Conform definiţiei 3.1.5 avem egalităţile:

$$\underbrace{\overrightarrow{OA}}_{\overline{a}} + \underbrace{\overrightarrow{AO}}_{(-\overline{a})} = \underbrace{\overrightarrow{OO}}_{\overline{0}} ,$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

O altă operaţie (care se numeşte lege de compoziţie externă) este înmulţirea unui vector cu un scalar. Pentru a defini această operaţie precizăm că prin scalar vom înţelege un număr real, şi pentru a evita orice confuzie vom nota în cele ce urmează scalarii cu litere din alfabetul grecesc: $\alpha, \beta, \gamma, ... \in \mathbb{R}$.

Definitia 3.1.6 *Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $\overline{v} \in \mathfrak{V}_3$ atunci vom numi produsul dintre scalarul α şi vectorul $\overline{v}$ vectorul notat cu $\alpha\overline{v}$ definit astfel: dacă $\overrightarrow{OA} \in \overline{v}$ atunci $\overrightarrow{OA_1} \in \alpha\overline{v}$ verifică condiţiile:*

1. $OA_1 = |\alpha|\ OA$;
2. dacă $\alpha > 0$ atunci O este în exteriorul segmentului $[AA_1]$, iar dacă $\alpha < 0$ atunci O este între A şi A_1.

Remarca 3.1.8 Dacă avem daţi doi vectori $\overline{v}$ şi $\overline{w}$ atunci faptul că există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{w} = \alpha\overline{v}$ este echivalent cu afirmaţia ”$\overline{v}$ şi $\overline{w}$ sunt doi vectori coliniari (paraleli)” (vezi şi remarca 3.1.7).

Remarca 3.1.9 $\alpha\overline{v} = \overline{0}$ dacă şi numai dacă $\alpha = 0$ sau $\overline{v} = \overline{0}$.

Următoarea teoremă arată legătura care există între înmulţirea unui vector cu un scalar şi operaţiile de adunare a vectorilor, respectiv de adunare şi înmulţire a scalarilor:

Teorema 3.1.5 *Pentru orice vectori $\overline{v}, \overline{v}_1, \overline{v}_2 \in \mathfrak{V}_3$ şi pentru orice scalari $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ sunt adevărate egalităţile:*

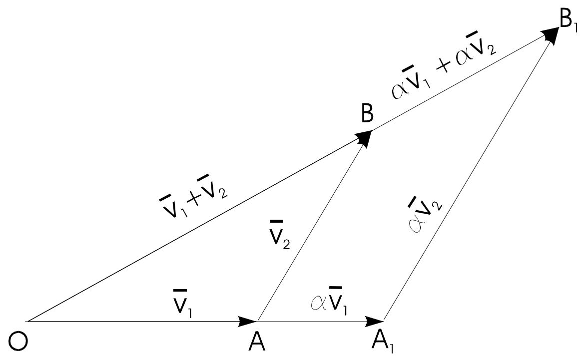
$$(\alpha_1 + \alpha_2)\,\overline{v} = (\alpha_1\overline{v}) + (\alpha_2\overline{v}) \tag{3.1.1}$$

$$\alpha\,(\overline{v}_1 + \overline{v}_2) = \alpha\overline{v}_1 + \alpha\overline{v}_2 \tag{3.1.2}$$

$$(\alpha_1\alpha_2)\,\overline{v} = \alpha_1\,(\alpha_2\overline{v}) \tag{3.1.3}$$

$$1\overline{v} = \overline{v} \tag{3.1.4}$$

Demonstraţie. Demonstraţiile egalităţilor (3.1.1), (3.1.3), (3.1.4) se reduc la distributivitatea înmulţirii faţă de adunare în $\mathbb{R}$, iar demonstraţia egalităţii (3.1.2) rezultă din asemănarea triunghiurilor OAB şi OA_1B_1 din figura de mai jos:



($\overrightarrow{OB_1} = \alpha\,\overrightarrow{OB}$ şi deci $\alpha\overline{v}_1 + \alpha\overline{v}_2 = \alpha\,(\overline{v}_1 + \overline{v}_2)$). ■

Remarca 3.1.10 Teoremele 3.1.4 şi 3.1.5 se puteau enunţa într-o singură teoremă, folosind noţiunea de spaţiu vectorial (vezi manualul [2]) astfel: ”Mulţimea vectorilor din spaţiu împreună cu operaţia de adunare şi cea de înmulţire cu un scalar formează un spaţiu vectorial real”.

Cu ajutorul operaţiei de înmulţire cu un scalar putem defini acum noţiunea de versor al unui vector:

Definitia 3.1.7 *Se numeşte versor al unui vector $\overline{v}$ vectorul obţinut prin înmulţirea vectorului $\overline{v}$ cu inversul lungimii sale (adică vectorul $\frac{\overline{v}}{v}$, care este un versor conform remarcii 3.1.6).*

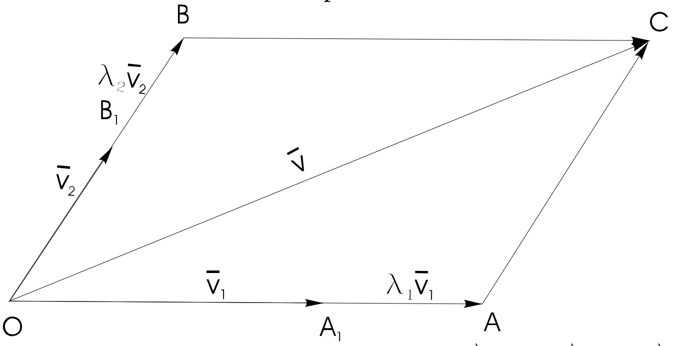
O problemă care apare frecvent în aplicaţiile vectorilor este „descompunerea unui vectori după direcţiile a doi (sau trei) vectori“. Posibilitatea unei astfel de descompuneri este dată de următoarele două teoreme. Pentru aceasta e necesar să precizăm noţiunea de vectori coplanari:

Definitia 3.1.8 *Trei vectori $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ se numesc vectori coplanari dacă reprezentanţii lor care au originea în acelaşi punct*[10] *sunt coplanari (adică pentru orice punct O dacă $\overrightarrow{OA_1} \in \overline{v}_1$, $\overrightarrow{OA_2} \in \overline{v}_2$, $\overrightarrow{OA_3} \in \overline{v}_3$ atunci punctele O, A_1, A_2, A_3. sunt coplanare).*

Teorema 3.1.6 *Dacă vectorii $\overline{v}, \overline{v}_1, \overline{v}_2$ sunt coplanari şi vectorii $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ nu sunt coliniari (vezi remarca 3.1.8) atunci există în mod unic doi scalari λ_1, λ_2 astfel încât:*

$$\overline{v} = \lambda_1 \overline{v}_1 + \lambda_2 \overline{v}_2. \tag{3.1.5}$$

Demonstraţie. Fie un punct O fixat şi reprezentanţii (vezi figura de mai jos): $\overrightarrow{OC} \in \overline{v}$, $\overrightarrow{OA_1} \in \overline{v}_1$, $\overrightarrow{OB_1} \in \overline{v}_1$. Prin C ducem paralela CB la OA_1 care intersectează (deoarece $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ nu sunt coliniari) pe OB_1 în B şi paralela CA la OB_1 care intersectează pe OA_1 în A.



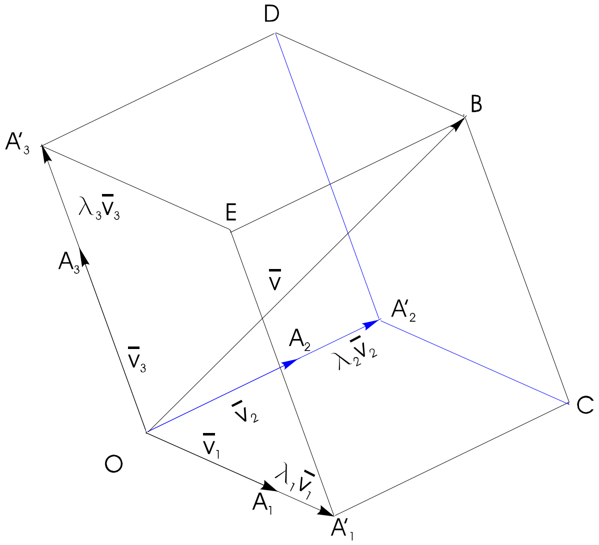
Conform regulii paralelogramului de adunare a doi vectori, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Dar, conform definiţiei 3.1.6, există scalarii λ_1, λ_2 astfel încât $\overrightarrow{OA} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB} = \lambda_2 \overrightarrow{OA_2}$. Din ultimele trei egalităţi rezultă că $\overrightarrow{OC} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2}$, adică tocmai egalitatea (3.1.5) scrisă cu ajutorul reprezentanţilor. Să demonstrăm acum unicitatea formulei (3.1.5). Presupunem că există şi scalarii λ_1', λ_2' (cu $\lambda_1' \neq \lambda_1$ sau $\lambda_2' \neq \lambda_2$) astfel încât $\overline{v} = \lambda_1' \overline{v}_1 + \lambda_2' \overline{v}_2$. Scăzând această egalitate din (3.1.5) rezultă $\left(\lambda_1 - \lambda_1'\right) \overline{v}_1 + \left(\lambda_2 - \lambda_2'\right) \overline{v}_2 = \overline{0}$. Dacă $\lambda_1' \neq \lambda_1$ împărţind ultima egalitate cu $\lambda_1 - \lambda_1'$ rezultă $\overline{v}_1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_2'}{\lambda_1 - \lambda_1'} \overline{v}_2$, deci, conform remarcii 3.1.8 vectorii $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ sunt coliniari, contradicţie. ■

Teorema 3.1.7 *(descompunerea unui vector după trei direcţii date) Dacă vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ nu sunt coplanari atunci pentru orice vector $\overline{v} \in \mathfrak{V}_3$ există unic constantele $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ astfel încât:*

$$\overline{v} = \lambda_1 \overline{v}_1 + \lambda_2 \overline{v}_2 + \lambda_3 \overline{v}_3.$$

Demonstraţie. Este analoagă cu demonstraţia teoremei precedente (ca idee), după cum se constată urmărind figura de mai jos, în care s-a construit un paralelipiped cu diagonala $\overrightarrow{OB} \in \overline{v}$, cu laturile paralele cu $\overrightarrow{OA_1} \in \overline{v}_1, \overrightarrow{OA_2} \in \overline{v}_2, \overrightarrow{OA_3} \in \overline{v}_3$.

[10] conform remarcii 3.1.5 aceşti reprezentanţi există.



Scrierea egalităţilor corespunzătoare acestei figuri se lasă pe seama cititorului. ■

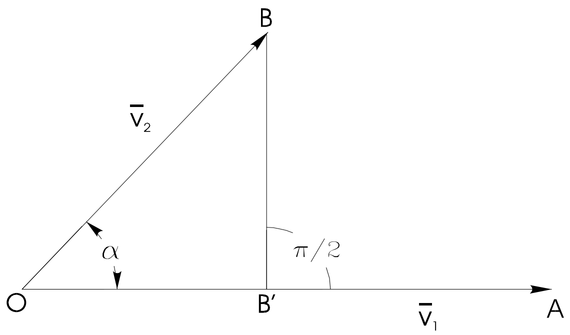
Produse de doi vectori

Fie doi vectori $\overline{v}_1, \overline{v}_2$.

Definitia 3.1.9 *Se numeşte produsul scalar al vectorilor $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ numărul (scalarul) notat cu $\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2$ definit prin:*

$$\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = v_1 v_2 \cos\alpha \tag{3.1.6}$$

unde α este unghiul (mai mic decât π) dintre cei doi vectori (vezi şi figura de mai jos, unde $\overrightarrow{OA} \in \overline{v}_1, \overrightarrow{OB} \in \overline{v}_2, OB' \perp OA$).



Remarca 3.1.11 Produsul scalar a doi vectori este egal cu produsul dintre lungimea unuia din vectori, lungimea proiecţiei celui de al doilea vector pe primul, şi $+1$ dacă unghiul dintre cei doi vectori este mai mic decât $\frac{\pi}{2}$ respectiv -1 dacă unghiul dintre cei doi vectori este obtuz. (pe figura de mai sus produsul scalar dintre $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ este egal cu $OA \cdot OB'$). Dacă nu este pericol de confuzie produsul scalar al vectorilor $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ se notează şi $\overline{v}_1\overline{v}_2$.

Remarca 3.1.12 Din definiţia produsului scalar rezultă că lungimea unui vector (vezi, pentru notaţie remarca 4.2.2) se poate calcula cu formula: $v = \sqrt{\overline{v} \cdot \overline{v}}$ (de aceea în cazul în care se calculează produsul scalar al unui vector cu el însuşi se poate renunţa la bara de deasupra vectorului, adică $\overline{v} \cdot \overline{v} = vv$).

Remarca 3.1.13 Produsul scalar a doi vectori este nul dacă şi numai dacă unul din vectori este vectorul nul sau vectorii sunt perpendiculari, după cum rezultă din formula de definiţie 3.1.6. Cu formule matematice aceasta se poate scrie:

$$\overline{v}_1\overline{v}_2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \text{ sau} \\ v_2 = 0 \text{ sau} \\ \overline{v}_1 \perp \overline{v}_2 (\cos\alpha = 0) \end{cases} \tag{3.1.7}$$

INTERPRETARE MECANICĂ: Produsul scalar dintre vectorii $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_1$ este egal cu lucrul mecanic produs de o forţă egală cu $\overline{v}_2$ la deplasarea $\overline{v}_1$.

Principalele proprietăţi ale produsului scalar sunt date de următoarea teoremă:

Teorema 3.1.8 *Oricare sunt vectorii $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_3$ şi oricare ar fi scalarul $\lambda \in \mathbb{R}$ sunt adevărate egalităţile:*

$$\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = \overline{v}_2 \cdot \overline{v}_1 \text{ (comutativitate)} \tag{3.1.8}$$

$$\overline{v}_1 \cdot (\overline{v}_2 + \overline{v}_3) = \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 + \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_3 \text{ (distributivitate faţă de adunarea vectorilor)} \tag{3.1.9}$$

$$(\lambda\overline{v}_1) \cdot \overline{v}_2 = \overline{v}_1 \cdot (\lambda\overline{v}_2) = \lambda(\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2). \tag{3.1.10}$$

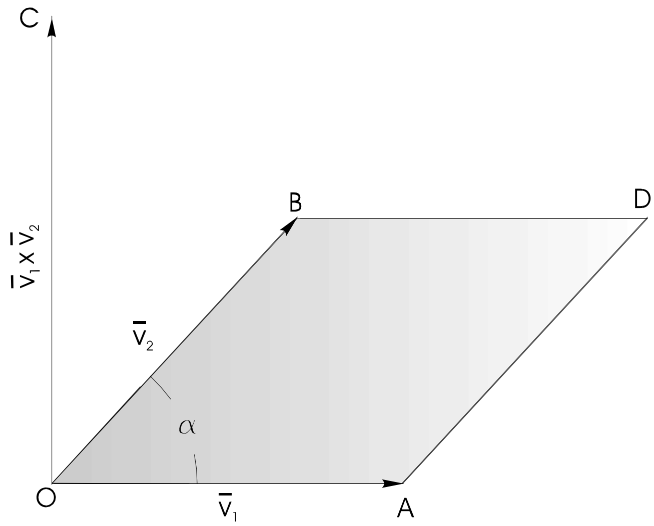
Demonstraţie. Egalitatea 3.1.8, respectiv 3.1.10 rezultă imediat din formula 3.1.6 care defineşte produsul scalar, ţinând cont de comutativitatea, respectiv asociativitatea înmulţirii numerelor reale. Egalitatea 3.1.9 se demonstrează pe baza remarcii 3.1.11 şi a faptului că „proiecţia sumei este egală cu suma proiecţiilor“[11]. ■

Fie acum vectorii $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$, cu unghiul dintre ei (mai mic decât π) notat cu α.

Definitia 3.1.10 *Se numeşte produsul vectorial al vectorilor $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$* ***vectorul*** *notat $\overline{v}_1 \times \overline{v}_2$ definit astfel:*

1. *lungimea produsului vectorial se calculează conform formulei:*
$$|\overline{v}_1 \times \overline{v}_2| = v_1 v_2 \sin\alpha; \tag{3.1.11}$$
2. *$\overline{v}_1 \times \overline{v}_2$ este perpendicular atât pe $\overline{v}_1$ cât şi pe $\overline{v}_2$;*
3. *sensul lui $\overline{v}_1 \times \overline{v}_2$ este dat de regula burghiului drept: sensul în care înaintează un burghiu când rotim $\overline{v}_1$ spre $\overline{v}_2$ sub un unghi minim (mai mic decât π).*

Remarca 3.1.14 Produsul vectorial a doi vectori este **un vector, a cărui lungime se calculează cu formula 3.1.11,** direcţia şi sensul său fiind precizate de celelalte două condiţii din definiţia de mai sus. Formula 3.1.11 defineşte lungimea vectorului produs vectorial ca fiind egală cu aria paralelogramului construit pe cei doi factori, după cum se observă şi în figura de mai jos, în care $\overrightarrow{OC} \in \overline{v}_1 \times \overline{v}_2$, $\overrightarrow{OA} \in \overline{v}_1$, $\overrightarrow{OB} \in \overline{v}_2$, $AD \parallel OB$, $BD \parallel OA$, iar aria paralelogramului $OADB$ este egală cu $OA \cdot OB \cdot \sin\alpha$:



[11] exprimare nu prea riguroasă.

Remarca 3.1.15 Produsul vectorial a doi vectori este vectorul nul dacă şi numai dacă unul din vectori este vectorul nul sau vectorii sunt coliniari (paraleli), după cum rezultă din formula 3.1.11. Cu formule matematice aceasta se poate scrie:

$$\overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = \overline{0} \Longleftrightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \text{ sau} \\ v_2 = 0 \text{ sau} \\ \overline{v}_1 \parallel \overline{v}_2 (\sin\alpha = 0) \end{cases} \tag{3.1.12}$$

INTERPRETARE MECANICĂ: Produsul vectorial dintre vectorii $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_1$ este egal cu momentul forţei $\overline{v}_2$ având braţul forţei $\overline{v}_1$, momentul având originea în originea braţului forţei, (vezi figura precedentă, forţa fiind $\overrightarrow{AD}$ iar braţul forţei $\overrightarrow{OA}$.

Principalele proprietăţi ale produsului vectorial sunt date de următoarea teoremă:

Teorema 3.1.9 *Oricare sunt vectorii $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_3$şi oricare ar fi scalarul $\alpha \in \mathbb{R}$ sunt adevărate egalităţile:*

$$\overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = -\overline{v}_2 \times \overline{v}_1 \textit{ (anticomutativitate)} \tag{3.1.13}$$

$$\overline{v}_1 \times (\overline{v}_2 + \overline{v}_3) = \overline{v}_1 \times \overline{v}_2 + \overline{v}_1 \times \overline{v}_3 \textit{ (distributivitate faţă de adunarea vectorilor)} \tag{3.1.14}$$

$$(\alpha\overline{v}_1) \times \overline{v}_2 = \overline{v}_1 \times (\alpha\overline{v}_2) = \alpha(\overline{v}_1 \times \overline{v}_2). \tag{3.1.15}$$

Demonstraţie. Formulele (3.1.13) şi (3.1.15) sunt evidente pe baza definiţiei produsului vectorial, iar demonstraţia formulei (3.1.14) este o demonstraţie geometrică destul de laborioasă pe care nu o reproducem aci (pentru cei intertesaţi ea se poate găsi în [4]). ■

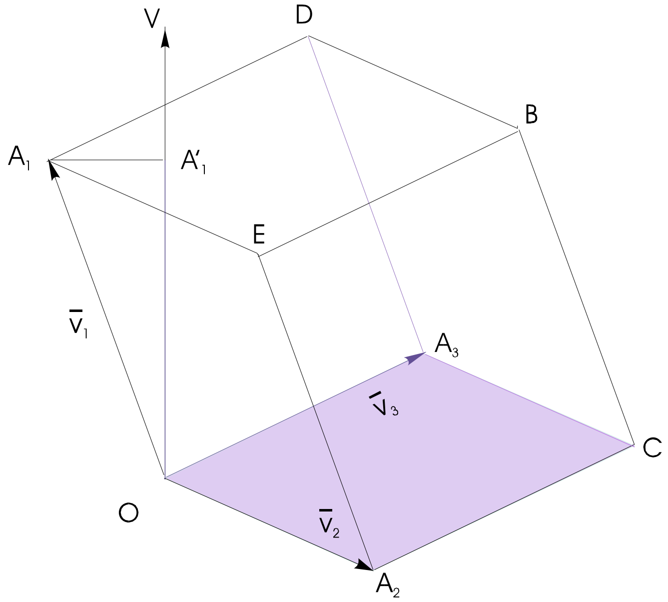
Produse de trei vectori

Fie acum trei vectori $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$.

Definitia 3.1.11 *Se numeşte produsul mixt al vectorilor $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ scalarul notat cu $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3)$ definit de formula:*

$$(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3) = \overline{v}_1 \cdot (\overline{v}_2 \times \overline{v}_3). \tag{3.1.16}$$

INTERPRETARE GEOMETRICĂ: Produsul mixt a trei vectori este egal cu ±volumului paralelipipedului construit pe cei trei vectori, după cum se constată pe figura **??** de mai jos (în care $\overrightarrow{OV} = \overline{v}_2 \times \overline{v}_3$, înălţimea paralelipipedului $OA_2CA_3A_1EBD$ fiind egală cu OA_1', care este proiecţia pe $\overrightarrow{OV}$ a vectorului $\overline{v}_1$, şi deci produsul scalar $\overline{v}_1 \cdot \overrightarrow{OV}$ este chiar volumul paralelipipedului, abstracţie făcând de semn):



Interpretare geometrică a produsului mixt.

Remarca 3.1.16 Dacă vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ sunt nenuli, atunci produsul lor mixt este egal cu 0 dacă sau produsul vectorial $\overline{v}_2 \times \overline{v}_3$ este nul (adică, conform remarcii 3.1.12 $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_3$ sunt coliniari) sau vectorul $\overline{v}_1$ este perpendicular pe $\overline{v}_2 \times \overline{v}_3$, adică $\overline{v}_1$ este coplanar cu $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_3$. În ambele cazuri constatăm că $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3) = 0$ este echivalent cu faptul că cei trei vectori sunt coplanari.

Principalele proprietăţi ale produsului mixt sunt date de următoarea teoremă:

Teorema 3.1.10 *Produsul mixt este invariant la o permutare circulară*[12] *a factorilor, iar dacă se schimbă ordinea a doi factori se schimbă semnul produsului.*

Demonstraţie. Din interpretarea geometrică a produsului mixt rezultă că produsul mixt a trei vectori poate lua doar două valori. Care sunt permutările vectorilor pentru care produsul mixt ia fiecare din cele două valori va rezulta mai simplu din paragraful următor, pe baza formulei (3.2.7) din teorema 3.2.4. ■

Pentru aceiaşi trei vectori ca mai sus putem defini încă un produs:

Definitia 3.1.12 *Se numeşte* ***dublul produs vectorial*** *al vectorilor $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ vectorul $\overline{v}_1 \times (\overline{v}_2 \times \overline{v}_3)$.*

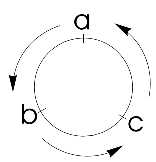
În legătură cu acest produs menţionăm următoarea teoremă:

Teorema 3.1.11 *Oricare sunt vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ este adevărată următoarea formulă (cunoscută sub numele de formula lui Gibs):*

$$\overline{v}_1 \times (\overline{v}_2 \times \overline{v}_3) = (\overline{v}_1 \overline{v}_3)\, \overline{v}_2 - (\overline{v}_1 \overline{v}_2)\, \overline{v}_3. \tag{3.1.17}$$

Demonstraţie. Să observăm că $\overline{v}_1 \times (\overline{v}_2 \times \overline{v}_3)$ este un vector perpendicular pe $\overline{v}_2 \times \overline{v}_3$ şi deoarece $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_3$ sunt la rândul lor perpendiculari pe $\overline{v}_2 \times \overline{v}_3$ (vezi definiţia produsului vectorial) rezultă că vectorii

[12] prin permutare circulară a trei numere a, b, c se înţelege o permutare în care fiecare element este înlocuit cu următorul, iar ultimul cu primul, conform schemei:



$\overline{v}_1 \times (\overline{v}_2 \times \overline{v}_3)$, $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_3$ sunt coplanari, ceea ce implică (vezi teorema 3.1.6) existenţa scalarilor λ şi μ astfel încât:

$$\overline{v}_1 \times (\overline{v}_2 \times \overline{v}_3) = \lambda \overline{v}_2 + \mu \overline{v}_3. \tag{3.1.18}$$

Să înmulţim acum scalar această egalitate cu vectorul $\overline{v}_1$. Pe baza proprietăţilor produsului scalar va rezulta: $0 = \lambda (\overline{v}_1 \overline{v}_2) + \mu (\overline{v}_1 \overline{v}_3)$. Din această egalitate rezultă $-\frac{\mu}{(\overline{v}_1\overline{v}_2)} = \frac{\lambda}{(\overline{v}_1\overline{v}_3)}$. Notând valoarea comună a acestor rapoarte cu κ şi înlocuind pe λ şi μ în (3.1.18) rezultă:

$$\overline{v}_1 \times (\overline{v}_2 \times \overline{v}_3) = \kappa \left((\overline{v}_1 \overline{v}_3) \overline{v}_2 - (\overline{v}_1 \overline{v}_2) \overline{v}_3 \right).$$

Lăsăm pe seama cititorului să demonstreze egalitatea $\kappa = 1$. ■

3.2 Bază, coordonate, exprimarea operaţiilor cu vectori folosind coordonatele

3.2.1 Bază şi coordonate

În acest paragraf vom generaliza noţiunea de vectori coliniari şi vectori coplanari, pornind de la remarca 3.1.8 şi teorema 3.1.6:

Definitia 3.2.1 *Vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n$ se numesc liniar dependenţi dacă există n scalari $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, nu toţi nuli (adică $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \neq 0$) astfel încât:*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \overline{v}_k = \overline{0}, \tag{3.2.1}$$

şi liniar independenţi în caz contrar.

Remarca 3.2.1 Doi vectori coliniari sunt liniari dependenţi, căci conform remarcii mai sus amintite dacă $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ sunt coliniari atunci există un scalar α astfel încât $\overline{v}_1 = \alpha \overline{v}_2$ sau $\overline{v}_2 = \alpha \overline{v}_1$ deci este verificată (3.2.1) cu $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\alpha$ sau $\lambda_1 = -\alpha, \lambda_2 = 1$. Invers, dacă doi vectori sunt liniar dependenţi atunci ei sunt coliniari, deoarece din $\lambda_1 \overline{v}_1 + \lambda_2 \overline{v}_2 = \overline{0}$ dacă $\lambda_1 \neq 0$ rezultă $\overline{v}_1 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} \overline{v}_2$, iar dacă $\lambda_2 \neq 0$ rezultă $\overline{v}_2 = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2} \overline{v}_1$. Analog se arată (folosind teorema 3.1.6) că trei vectori coplanari sunt liniari dependenţi şi reciproc, trei vectori liniar dependenţi sunt coplanari.

Remarca 3.2.2 Suma din mebrul stâng al egalităţii (3.2.1) se numeşte combinaţie liniară a vectorilor $\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n$, iar liniar independenţa lor este echivalentă cu afirmatia: ”dacă o combinaţie liniară a vectorilor este egală cu vectorul nul, atunci toţi scalarii din combinaţia liniară sunt nuli”.

Remarca 3.2.3 Dacă unul din vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n$ este vectorul nul atunci ei sunt liniar independenţi, deoarece putem lua scalarul corespunzător vectorului nul egal cu 1 iar ceilalţi scalari egali cu 0 şi egalitatea (3.2.1) este adevărată.

Folosind noţiunea de liniar dependenţă teorema 3.1.7 se reenunţă astfel:

Teorema 3.2.1 *Orice patru vectori din $\mathfrak{V}_3$ sunt liniar dependenţi.*

Demonstraţie. Fie vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4$. Dacă $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ sunt coplanari atunci, conform remarcii 3.2.1 ei sunt liniari dependenţi, de unde rezultă că (vezi remarca precedentă) $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4$ sunt liniari dependenţi. Dacă $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ nu sunt coplanari, atunci conform teoremei 3.1.7, există scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ astfel încât:

$$\overline{v}_4 = \lambda_1 \overline{v}_1 + \lambda_2 \overline{v}_2 + \lambda_3 \overline{v}_3, \tag{3.2.2}$$

de unde rezultă $\lambda_1\overline{v}_1+\lambda_2\overline{v}_2+\lambda_3\overline{v}_3-1\cdot\overline{v}_4=0$, deci $\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3,\overline{v}_4$ sunt liniari dependenţi ($\lambda_4=-1\neq 0$). ■

Folosind noţiunile de liniar dependenţă şi liniar dependenţă suntem în măsură să definim noţiunea de bază:

Definitia 3.2.2 *O mulţime de vectori $\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,...,\overline{v}_n\}\subset\mathfrak{V}_3$ se numeşte* **bază** *dacă verifică următoarele condiţii:*

1. *Vectorii $\overline{v}_1,\overline{v}_2,...,\overline{v}_n$ sunt liniar independenţi.*
2. *Oricare ar fi vectorul $\overline{v}\in\mathfrak{V}_3$ vectorii $\overline{v},\overline{v}_1,\overline{v}_2,...,\overline{v}_n$ sunt liniar dependenţi.*

Bineînţeles că se pune probleme dacă în $\mathfrak{V}_3$ există o bază şi dacă existe mai multe baze, prin ce se aseamănă ele. Răspunsul la aceste probleme este dat de următoarea teoremă:

Teorema 3.2.2 *Orice mulţime formată din trei vectori necoplanari formează o bază în $\mathfrak{V}_3$.*

Demonstraţie. Fie $\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3$ trei vectori necoplanari. Repetând raţionamentul de la demonstraţia teoremei precedente rezultă că pentru orice vector $\overline{v}_4$există scalarii $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ astfel încât egalitatea (3.2.2) să fie adevărată, deci $\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3,\overline{v}_4$ sunt liniari dependenţi. ■

Remarca 3.2.4 Teorema precedentă precizează că există baze în $\mathfrak{V}_3$ şi că orice bază are exact trei elemente.

În legătură cu formula (3.2.2), este adevărată următoarea teoremă:

Teorema 3.2.3 *Dacă $\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3\}$ este o bază în $\mathfrak{V}_3$ atunci pentru orice $\overline{v}_4\in\mathfrak{V}_3$ scalarii care apar în (3.2.2) sunt unici.*

Demonstraţie. Presupunem că există scalarii $\lambda_1',\lambda_2',\lambda_3'$ astfel încât $\overline{v}_4=\lambda_1'\overline{v}_1+\lambda_2'\overline{v}_2+\lambda_3'\overline{v}_3$. Scăzând din această egalitate egalitatea 3.2.2 rezultă $\left(\lambda_1'-\lambda_1\right)\overline{v}_1+\left(\lambda_2'-\lambda_2\right)\overline{v}_2+\left(\lambda_3'-\lambda_3\right)\overline{v}_3=\overline{0}$. Din liniar independenţa vectorilor $\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3$ rezultă (vezi remarca 3.2.2) că $\lambda_1'-\lambda_1=0,\lambda_2'-\lambda_2=0,\lambda_3'-\lambda_3=0$, deci $\lambda_1'=\lambda_1,\lambda_2'=\lambda_2,\lambda_3'=\lambda_3$. ■

Teorema precedentă ne permite să dăm următoarea definiţie:

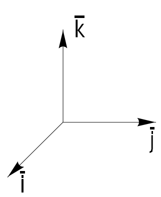
Definitia 3.2.3 *Dacă $\mathcal{B}=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3\}$ este o bază în mulţimea $\mathfrak{V}_3$ atunci pentru un vector $\overline{v}_4$ scalarii $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ din formula (3.2.2) se numesc coordonatele vectorului $\overline{v}_4$ în baza $\mathcal{B}$.*

Dacă asupra vectorilor care formează baza punem condiţii suplimentare, obţinem baze cu diferite denumiri, conform definiţiei de mai jos:

Definitia 3.2.4 *O bază $\mathcal{B}=\{\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3\}$ se numeşte:*

1. *ortogonală dacă fiecare dintre vectorii $\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3$ este perpendicular pe ceilalţi;*
2. *ortonormată dacă este ortogonală şi vectorii care o formează sunt versori;*
3. *ortonormată direct orientată dacă este ortonormată şi $\overline{v}_3=\overline{v}_1\times\overline{v}_2$.*

Vectorii care formează o bază ortonormată direct orientată îi vom nota cu $\overline{i},\overline{j},\overline{k}$, ca şi în figura de mai jos:



şi în acest caz vom nota coordonatele unui vector $\overline{v}$ cu literele x,y,z (adică $\overline{v}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$).

Exprimarea operaţiilor cu vectori folosind coordonatele

Deoarece legătura dintre operaţiile cu vectori şi operaţiile cu coordonatele lor într-o bază arbitrară nu este chiar atât de simplă în cazul produselor, vom utiliza în cele ce urmează doar baze ortonormate direct orientate. În acest caz este adevărată următoarea teoremă:

Teorema 3.2.4 *Dacă $\left\{\overline{i},\overline{j},\overline{k}\right\}$ este o bază ortonormată direct orientată şi vectorii $\overline{v}_l, l=\overline{1,3}$ au coordonatele (x_l, y_l, z_l) atunci sunt adevărate următoarele egalităţi:*

$$\overline{v}_1+\overline{v}_2=(x_1+x_2)\,\overline{i}+(y_1+y_2)\,\overline{j}+(z_1+z_2)\,\overline{k}; \tag{3.2.3}$$

$$\alpha\overline{v}_1=(\alpha x_1)\,\overline{i}+(\alpha y_1)\,\overline{j}+(\alpha z_1)\,\overline{k}; \tag{3.2.4}$$

$$\overline{v}_1\cdot\overline{v}_2=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2; \tag{3.2.5}$$

$$\overline{v}_1\times\overline{v}_2=(y_1z_2-y_2z_1)\,\overline{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\,\overline{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\,\overline{k}; \tag{3.2.6}$$

$$(\overline{v}_1,\overline{v}_2,\overline{v}_3)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}. \tag{3.2.7}$$

Demonstraţie. Demonstraţia egalităţilor (3.2.3) şi (3.2.4) rezultă din proprietăţile operaţiilor de adunare a doi vectori (vezi teorema 3.1.4) şi înmulţirea unui vector cu un scalar (vezi teorema 3.1.5), precum şi din unicitatea coordonatelor unui vector într-o bază dată. Astfel (3.2.3) rezultă din următorul şir de egalităţi:

$$\begin{aligned}&\overline{v}_1+\overline{v}_2=\left(x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k}\right)+\left(x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k}\right)=\\&=x_1\overline{i}+x_2\overline{i}+y_1\overline{j}+y_2\overline{j}+z_1\overline{k}+z_2\overline{k}=\\&=(x_1+x_2)\,\overline{i}+(y_1+y_2)\,\overline{j}+(z_1+z_2)\,\overline{k}.\end{aligned}$$

Egalitatea (3.2.5). rezultă din proprietăţile (3.1.8), (3.1.9), (3.1.10) ale produsului scalar, precum şi din egalităţile $\overline{i}\cdot\overline{i}=\overline{j}\cdot\overline{j}=\overline{k}\cdot\overline{k}=1, \overline{i}\cdot\overline{j}=\overline{i}\cdot\overline{k}=\overline{j}\cdot\overline{k}=0$, (baza fiind ortonormată):

$$\begin{aligned}&\overline{v}_1\cdot\overline{v}_2=\left(x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k}\right)\cdot\left(x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k}\right)=\\&=x_1x_2\left(\overline{i}\cdot\overline{i}\right)+x_1y_2\left(\overline{i}\cdot\overline{j}\right)+x_1z_2\left(\overline{i}\cdot\overline{k}\right)+y_1x_2\left(\overline{j}\cdot\overline{i}\right)+y_1y_2\left(\overline{j}\cdot\overline{j}\right)+y_1z_2\left(\overline{j}\cdot\overline{k}\right)+\\&+z_1x_2\left(\overline{k}\cdot\overline{i}\right)+z_1y_2\left(\overline{k}\cdot\overline{j}\right)+z_1z_2\left(\overline{k}\cdot\overline{k}\right)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.\end{aligned}$$

Egalitatea (3.2.6). rezultă rezultă din proprietăţile (3.1.11), (3.1.14), (3.1.15) ale produsului vectorial, precum şi din egalităţile $\overline{i}\times\overline{i}=\overline{j}\times\overline{j}=\overline{k}\times\overline{k}=\overline{0}, \overline{i}\times\overline{j}=\overline{k}, \overline{i}\cdot\overline{k}=-\overline{j}, \overline{j}\times\overline{k}=\overline{i}$ (baza fiind ortonormată):

$$\begin{aligned}&\overline{v}_1\times\overline{v}_2=\left(x_1\overline{i}+y_1\overline{j}+z_1\overline{k}\right)\times\left(x_2\overline{i}+y_2\overline{j}+z_2\overline{k}\right)=\\&=x_1x_2\left(\overline{i}\times\overline{i}\right)+x_1y_2\left(\overline{i}\times\overline{j}\right)+x_1z_2\left(\overline{i}\times\overline{k}\right)+y_1x_2\left(\overline{j}\times\overline{i}\right)+y_1y_2\left(\overline{j}\times\overline{j}\right)+y_1z_2\left(\overline{j}\times\overline{k}\right)+\\&+z_1x_2\left(\overline{k}\times\overline{i}\right)+z_1y_2\left(\overline{k}\times\overline{j}\right)+z_1z_2\left(\overline{k}\times\overline{k}\right)=(y_1z_2-y_2z_1)\,\overline{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\,\overline{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\,\overline{k}.\end{aligned}$$

Ultima egalitate din teoremă rezultă din aplicarea precedentelor două şi din dezvoltarea determinatului din membrul drept după prima linie. ■

Remarca 3.2.5 Formula 4. se poate reţine mai uşor astfel:

$$\overline{v}_1\times\overline{v}_2=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}, \tag{3.2.8}$$

căci membrul drept al formulei este (formal) tocmai determinantul de mai sus dezvoltat după prima linie.

Remarca 3.2.6 Formula lui Gibs (3.1.17) rezultă şi prin calcul, aplicând pentru membrul stâng de două ori formula pentru produsul vectorial, iar pentru membrul drept formulele 3. şi 2. din teorema precedentă.

Din teorema precedentă rezultă următoarele consecinţe:

Corolarul 3.2.1 *Dacă $\overline{v}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$ atunci $x=\overline{v}\cdot\overline{i}, y=\overline{v}\cdot\overline{j}, z=\overline{v}\cdot\overline{k}$.*

Demonstraţie. Aplicând formula (3.) rezultă:
$\overline{v}\cdot\overline{i}=\left(x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}\right)\cdot\overline{i}=\left(x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}\right)\left(1\cdot\overline{i}+0\cdot\overline{j}+0\cdot\overline{k}\right)=x\cdot 1=x.$ ■

Corolarul 3.2.2 *Dacă $\overline{v}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k}$ atunci lungimea sa este:*

$$v=|\overline{v}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{3.2.9}$$

Demonstraţie. Din definiţia produsului scalar rezultă $v=\sqrt{\overline{v}\cdot\overline{v}}$, şi aplicând formula 3. din teorema precedentă rezultă egalitatea (3.2.9). ■

Corolarul 3.2.3 *Dacă $\overline{v}_l, l=\overline{1,2}$ au coordonatele x_l, y_l, z_l şi α este unghiul dintre ei atunci:*

$$\cos\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \tag{3.2.10}$$

Demonstraţie. Din definţia produsului scalar rezultă că $\cos\alpha=\frac{\overline{v}_1\cdot\overline{v}_2}{v_1v_2}$,şi se aplică formula 3. din teorema precedentă precum şi corolarul precedent.

O consecinţă a corolarului precedent este:

Corolarul 3.2.4 *Oricare ar fi numerele $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ este adevărată următoarea inegalitate:*

$$\left(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\right)^2\le\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2+z_2^2\right), \tag{3.2.11}$$

inegalitatate care este un caz particular al inegalităţii Cauchy-Buniakovski-Schwarz.

Demonstraţie. Se consideră vectorii $\overline{v}_l, l=\overline{1,2}$ care au coordonatele x_l, y_l, z_l şi notând cu α unghiul dintre ei rezultă $\cos^2\alpha\le 1$. În această inegalitate se înlocuieşte $\cos\alpha$ conform formulei (3.2.10), şi aducând la acelaşi numitor rezultă (3.2.11).

Remarca 3.2.7 Din (3.2.10) rezultă că vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ sunt perpendiculari dacă şi numai dacă:

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0. \tag{3.2.12}$$

Corolarul 3.2.5 *Oricare ar fi numerele $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ este adevărată următoarea identitate (**identitatea lui Lagrange**):*

$$\begin{aligned}&\left(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\right)^2+\left(y_1z_2-y_2z_1\right)^2+\left(z_1x_2-z_2x_1\right)^2+\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2=\\&=\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2+z_2^2\right)\end{aligned}$$

Demonstraţie. Raţionând ca şi la corolarul 4.2.8 rezultă pentru unghiul α egalitatea $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$,şi înlocuind aci $\cos\alpha$ conform (3.2.10) şi $\sin\alpha$ cu $\frac{|\overline{v}_1\times\overline{v}_2|}{v_1v_2}$, pe baza formulelor 3. şi 4. din teorema precedentă rezultă identitatea de mai sus. ■

Exemplul 3.2.1 *Se dau vectorii* $\overline{v_1} = \overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$ *şi* $\overline{v_2} = 2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}$*. Să se determine un versor* $\overline{v}$ *ortogonal pe* $\overline{v_1}$ *şi* $\overline{v_2}$*. Ideea:* $\overline{v'} = v_1 \times v_2$*,* $v = |v'|$ *.*

$$\begin{aligned} v' &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 0i - 3\vec{j} - 3\vec{k} \end{aligned}$$

$$v = \frac{0i - 3\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{0^2 + (-3)^2 + (-3)^2}} = -\frac{\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}}$$

3.3 Geometria analitică liniară în spaţiu

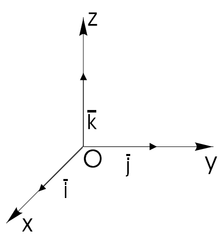
Pentru început să definim câteva noţiuni de bază în geometria analitică.

Definitia 3.3.1 *Se numeşte reper în spaţiu o mulţime formată dintr-un punct* O *(numit originea reperului) şi o bază din* $\mathfrak{V}_3$*. Dacă baza este ortonormată reperul se va numi ortonormat.*

Remarca 3.3.1 În cele ce urmează vom considera numai repere în care baza este ortonormată şi direct orientată. Un astfel de reper, conform notaţiilor din sectiunea 4.5.3 se va nota cu $\{O, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$.

Definitia 3.3.2 *Se numeşte vector de poziţie al unui punct* M *din spaţiu într-un reper vectorul care are ca reprezentant segmentul orientat* $\overrightarrow{OM}$*. Se numesc coordonatele unui punct* M *într-un reper coordonatele vectorului de poziţie al punctului* M *în baza din reper.*

Remarca 3.3.2 Dacă avem dat reperul $\{O, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$ atunci coordonatele punctului M se notează (x, y, z) şi sunt definite de egalitatea: $\overrightarrow{OM} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$. Vom scrie în continuare $M(x, y, z)$ şi vom citi ”punctul M de coordonate (x, z, y)”. Dreptele orientate determinate de O şi versorii $\overline{i}$, $\overline{j}$ respectiv $\overline{k}$ se vor nota cu Ox, Oy respectiv Oz şi se vor numi axele de coordonate, iar uneori vom folosi denumirea ”reperul $Oxyz$” în loc de reperul $\{O, \overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\}$, denumire ”justificată” şi de desenul de mai jos:



3.3.1 Planul în spaţiu

În această secţiune vom studia planul din punct de vedere al geometriei analitice, adică vom răspunde la întrebările: Dacă un punct $M(x, y, z)$ este într-un anumit plan, ce relaţii există între coordonatele sale? Cum se reflectă asupra coordonatelor punctelor din plan proprietăţi geometrice ale planului respectiv?. Pentru început vom răspunde la prima întrebare:

Diferite determinări ale planului

Vom studia ce condiţii verifică coordonatele unui punct situat într-un plan care este definit prin anumite condiţii geometrice:

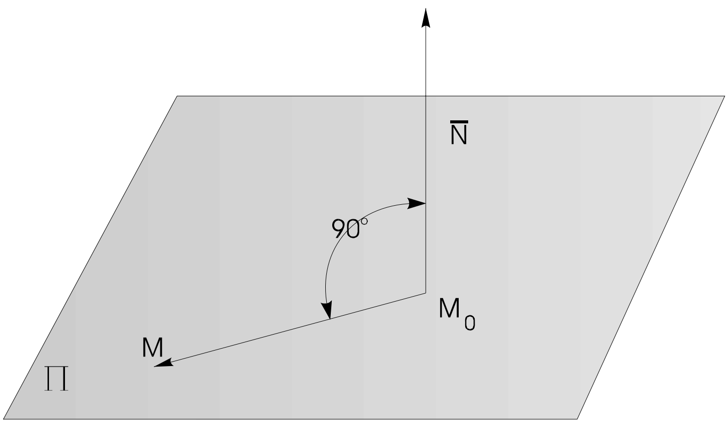
Plan determinat de un punct şi un vector perpendicular pe plan

Fie punctul M_0 şi vectorul $\overline{N}$ ($\overline{N} \neq \overline{0}$). Din geometria de liceu se ştie că există un singur plan, pe care îl vom nota cu Π care trece prin punctul M_0 şi este perpendicular pe vectorul $\overline{N}$. Fie acum un punct M arbitrar din planul Π. Este adevărată următoarea teoremă:

Teorema 3.3.1 *$M \in \Pi$ dacă şi numai dacă este adevărată următoarea egalitate:*

$$\overrightarrow{MM_0} \cdot \overline{N} = 0. \tag{3.3.1}$$

Demonstraţie. Conform figurii de mai jos (în care $M_0 \in \Pi$, $\overline{N} \perp \Pi$,sunt date, iar M este un punct arbitrar din planul Π):



punctul M aparţine planului Π dacă şi numai dacă vectorii $\overline{N}$ şi $\overrightarrow{M_0M}$ sunt perpendiculari[13], ceea ce, conform remarcii 3.1.13 este echivalent cu egalitatea (3.3.1). ■

Să transcriem acum egalitatea (3.3.1) folosind coordonatele. Pentru aceasta să notăm coordonatele punctului M_0 cu (x_0, y_0, z_0), coordonatele punctului M cu (x, y, z) şi coordonatele vectorului $\overline{N}$ cu (A, B, C). Atunci, pe baza teoremei 3.2.4 şi a definiţiei coordonatelor unui punct (definiţia 3.3.2) $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\,\overline{i} + (y - y_0)\,\overline{j} + (z - z_0)\,\overline{k}$ şi deci $\overrightarrow{M_0M} \cdot \overline{N} = (x - x_0)\,A + (y - y_0)\,B + (z - z_0)\,C$, care înlocuită în membrul stâng al egalităţii (3.3.1) ne conduce la ecuaţia:

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0 \tag{3.3.2}$$

Dacă în ecuaţia de mai sus notăm $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$ rezultă că punctul $M\,(x, y, z)$ aparţine planului Π dacă şi numai dacă coordonatele sale verifică ecuaţia:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{EGP}$$

Ecuaţia (EGP) se numeşte ecuaţia generală a planului în spaţiu (cu condiţia $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, pentru că $\overline{N} \neq \overline{0}$).

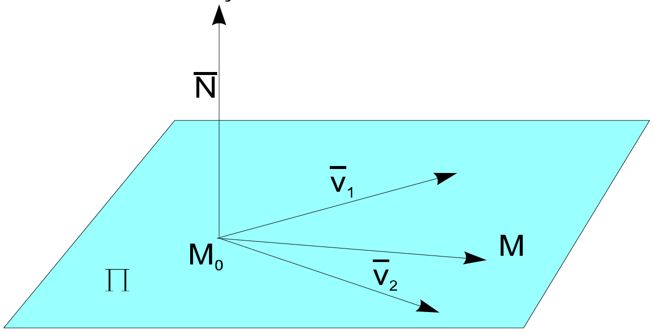
Exemplul 3.3.1 *Ne propunem să aflăm ecuaţia planului xOy. Acest plan este determinat de punctul $O\,(0,0,0)$ şi are ca vector normal versorul $\overline{k}$, deci $A = 0, B = 0, C = 1$. Înlocuind în formula (3.3.2) obţinem ecuaţia planului xOy :*

$$z = 0. \tag{3.3.3}$$

[13] conform geometriei din liceu, o dreaptă este peroendiculară pe un plan dacă şi numai dacă este perpendiculară pe orice dreaptă din plan.

Plan determinat de un punct şi doi vectori necoliniari paraleli cu planul

Fie un punct $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ şi vectorii $\bar{v}_1 = a_1\bar{i} + b_1\bar{j} + c_1\bar{k}$, $\bar{v}_2 = a_2\bar{i} + b_2\bar{j} + c_2\bar{k}$ necoliniari (adică, conform remarcii 3.1.15 $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 \neq \bar{0}$). Ne propunem să aflăm ce ecuaţie (sau ecuaţii) verifică coordonatele unui punct $M\left(x, y, z\right)$ care aparţine unui plan Π care conţine punctul M_0 şi este paralel cu vectorii $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$. Figura de mai jos ilustrează ideea demonstraţiei teoremei 3.3.2:



Analogul teoremei 3.3.1 este:

Teorema 3.3.2 *Punctul M aparţine planului Π dacă şi numai dacă este verificată ecuaţia:*

$$\left(\overrightarrow{MM_0}, \bar{v}_1, \bar{v}_2\right) = 0 \tag{3.3.4}$$

$$\overrightarrow{MM_0} \cdot \left(\bar{v}_1 \times \bar{v}_2\right) = 0 \tag{3.3.5}$$

Demonstraţie. Punctul M aparţine planului Π dacă şi numai dacă vectorii $\overrightarrow{MM_0}, \bar{v}_1, \bar{v}_2$ sunt coplanari, ceea ce este echivalent cu egalitatea (3.3.4), conform remarcii 3.1.16.

Folosind coordonatele egalitatea (3.3.4) se scrie, conform operaţiilor cu vectori (vezi formula (3.2.7)):

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0. \blacksquare \tag{3.3.6}$$

Plan determnat de trei puncte necoliniare

Fie punctele $M_i\left(x_i, y_i, z_i\right), i = \overline{1, 3}$ necoliniare (adică vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$ şi $\overrightarrow{M_1M_3}$ sunt necoliniari, sau folosind operaţii cu vectori, conform remarcii 3.1.12, $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} \neq \bar{0}$). Ecuaţia planului determinat de cele trei puncte este dată de:

Teorema 3.3.3 *Planul Π care trece prin punctele $M_i\left(x_i, y_i, z_i\right), i = \overline{1, 3}$ necoliniare are ecuaţia:*

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.3.7}$$

Demonstraţie.Varianta 1. (geometrică) Reducem problema la cazul precedent, considerând că planul Π este determinat de punctul M_1 şi vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$ şi $\overrightarrow{M_1M_3}$. Conform formulei (3.3.6) ecuaţia planului este:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ecuaţie care se poate scrie:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

adunând în determinantul de mai sus linia a doua la celelalte linii obţinem ecuaţia (3.3.7).

Varianta a 2-a. (algebrică) Ecuaţia planului Π (vezi (EGP)) este:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{3.3.8}$$

A determina ecuaţia planului Π se reduce la a determina coeficienţii A, B, C, D din ecuaţia de mai sus. Scriind că punctele M_i, $i = \overline{1,3}$ verifică această ecuaţie rezultă:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0. \end{cases} \tag{3.3.9}$$

Rezolvând acest sistem cu necunoscutele A, B, C (care are determinantul nenul din condiţia de necoliniaritate a punctelor M_1, M_2, M_3) şi înlocuind în (3.6.2) rezultă ecuaţia palnului Π . În loc să procedăm aşa, considerăm sistemul omogen (cu necunoscutele A, B, C, D) format din sistemul (3.3.9) şi ecuatia (3.6.2), sistem care are soluţie nenulă. Condiţia ca acest sistem să aibă soluţie nenulă este ca determinantul său să fie egal cu 0 , adică tocmai ecuaţia (3.3.7). ■

Poziţia relativă a două plane, unghiul a două plane

Fie planele Π_1, Π_2 de ecuaţii:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Poziţia relativă a celor două plane, determinată pe baza ecuaţiilor (3.3.10), este dată de :

Teorema 3.3.4 *Planele Π_1, Π_2 sunt paralele, dacă*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}, \tag{3.3.11}$$

coincid dacă:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \tag{3.3.12}$$

şi au o dreaptă comună dacă rangul matricei $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}$ este doi.

Demonstraţie. Dacă rangul matricei $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}$ este doi atunci sistemul (3.3.10) format din ecuaţiile celor două plane este simplu nederminat, iar soluţile sale sunt coordonatele punctelor de pe o dreaptă (va urma). Dacă rangul matricei precedente este unu, atunci sistemul (3.3.10) este incompatibil, dacă rangul matricei extinse este doi, ceea ce este echivalent cu (3.3.11), şi deci planele sunt paralele, sau sistemul (3.3.10) este compatibil cu rangul matricei extinse egal cu doi, ceea ce e echivalent cu (3.3.12), şi în acest caz cele două ecuaţii se obţin una din cealaltă prin înmulţirea cu o constantă, deci reprezintă acelaşi plan. ■

Remarca 3.3.3 Dacă se ţine cont de semnificaţia geometrică a coeficienţilor lui x, y, z din (EGP) (ei sunt coordonatele normalei la plan), atunci egalitatea primelor trei rapoarte din (3.3.11),(3.3.12) nu este altceva decât paralelismul normalelor la plane.

Unghiul a două plane se defineşte astfel:

Definitia 3.3.3 *Unghiul planelor Π_1, Π_2 date prin ecuaţiile (3.3.10) este unghiul dintre normalele la cele două plane $\overline{N_1} = A_1\overline{i} + B_1\overline{j} + C_1\overline{k}$, $\overline{N_2} = A_2\overline{i} + B_2\overline{j} + C_2\overline{k}$.*

Teorema 3.3.5 *Dacă notăm cu α unghiul celor două plane, atunci:*

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Demonstraţia formulei de mai sus este simplă, rezultând direct din definiţia precedentă şi din formula (3.2.10) care dă unghiul a doi vectori pe baza coordonatelor.

Din teorema de mai sus rezultă:

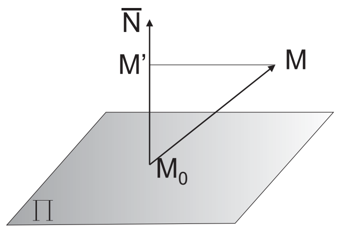
Corolarul 3.3.1 *Planele Π_1, Π_2 date prin ecuaţiile (3.3.10) sunt perpendiculare dacă şi numai dacă:*
$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Distanţa de la un punct la un plan

Fie planul Π de ecuaţie (EGP), şi punctul $M_1\left(x_1, y_1, z_1\right)$.

Teorema 3.3.6 *Distanţa de la punctul M_1 la planul Π este egală cu:*
$$dist(M_1, \Pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (3.3.13)$$

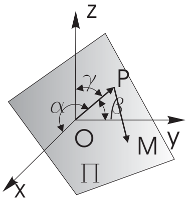
Demonstraţie. Să facem figura:



în figura de mai sus $\overline{N} = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}$ este normala la planul Π, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct din plan (deci coordonatele sale verifică ecuaţia planului), iar M' este proiecţia punctului M_1 pe normală. Conform geometriei "clasice" distanţa de la M la planul Π este egală cu lungimea segmentului M_0M'. Dar din proprietăţile produsului scalar avem:
$$\begin{aligned}
M_0M' &= \frac{\left|\overline{N}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}\right|}{N} = \\
&= \frac{\left|A\left(x_1 - x_0\right) + B\left(y_1 - y_0\right) + C\left(z_1 - z_0\right)\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\
&= \frac{\left|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - \left(Ax_0 + By_0 + Cz_0\right)\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\
&= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \blacksquare
\end{aligned}$$

Ecuaţia normală a unui plan (Hesse)

Fie Π un plan pentru care se cunoaşte distanţa de la origine la plan d şi unghiurile α, β, γ făcute de perpendiculara coborâtă din origine pe plan. Să notăm cu P piciorul perpendicularei coborâte din origine pe plan şi cu $M\left(x, y, z\right)$ un punct arbitrar din plan.



Din datele cunoscute avem $\overrightarrow{OP} = d\left(\cos\alpha\overline{i} + \cos\beta\overline{j} + \cos\gamma\overline{k}\right)$, iar condiţia ca $M \in \Pi$ este echivalentă cu $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PM} = 0$. Transcriind această egalitate în coordonate avem:
$$d\left(\cos\alpha(-d\cos\alpha + x) + \cos\beta\left(-d\cos\beta + y\right) + \cos\gamma\left(-d\cos\gamma + z\right)\right) = 0$$
sau făcând calculele şi ţinând cont că $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, rezultă că coordonatele punctului M verifică ecuaţia:
$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - d = 0 \qquad (3.3.14)$$
Ecuaţia (3.3.14) se numeşte ecuaţia normală a planului (sau forma Hesse).

Remarca 3.3.4 Din ecuaţia generală a planului se ajunge la ecuaţia normală a planului prin împărţirea ecuaţiei (EGP) cu $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, alegând semnul astfel ca în ecuaţia obţinută termenul liber să fie negativ.

Remarca 3.3.5 O altă formă a ecuaţiei planului este aşa numita "ecuaţia planului prin tăieturi" de forma:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

care se obţine din (EGP) prin împărţirea cu $-D$. Numitorii din ecuaţia de mai sus sunt tocmai coordonatele punctelor de intersecţie cu axele (adică planul intersectează axa Ox în punctul $(a,0,0)$, axa Oy în punctul $(0,b,0)$ şi axa Oz în $(0,0,c)$).

Exercitiul 3.3.1 Să se afle latura cubului care are două feţe în planele $x+2y+2z-6=0, x+2y+2z+3=0$.

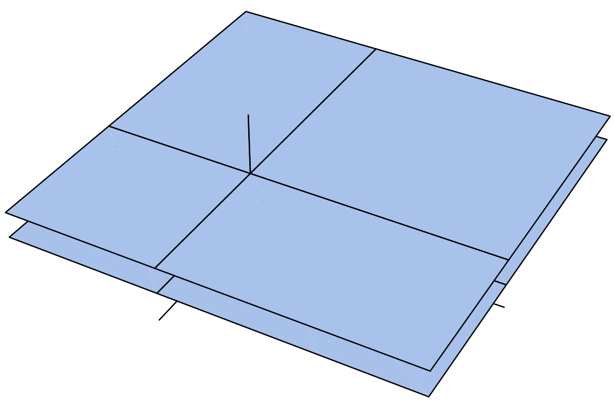
Sub forma "prin taieturi":

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1, \frac{x}{-3}+\frac{y}{-3/2}+\frac{z}{-3/2}=1$$

Sub forma Hesse cele 2 ec. devin (prin împărţire cu $\pm\sqrt{1^2+2^2+2^2}$:

$$\frac{x}{3}+\frac{2y}{3}+\frac{2z}{3}-2=0, -\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}-\frac{2z}{3}-1=0$$

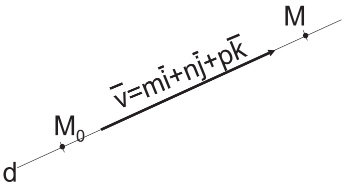
de unde $l=3$.



3.3.2 Dreapta în spaţiu

Dreapta determinată de un punct şi un vector paralel cu ea

Fie o dreaptă d determinată de un punct M_0 şi un vector $\overline{v} = m\overline{i} + n\overline{j} + p\overline{k}$ -numit vector director al dreptei-(o "direcţie") paralel cu ea, conform figurii:



Dacă M este un punct arbitrar pe dreaptă, acest lucru este echivalent cu (vezi remarca 3.2.1):

$$\overrightarrow{M_0M} = t\overline{v},\ t \in \mathbb{R}$$

Considerând că M are coordonatele (x, y, z) iar M_0 are coordonatele (x_0, y_0, z_0), egalitatea de mai sus devine:

$$(x - x_0)\,\overline{i} + (y - y_0)\,\overline{j} + (z - z_0)\,\overline{k} = t\left(m\overline{i} + n\overline{j} + p\overline{k}\right).$$

Egalând coordonatele vectorilor din egalitatea vectorială rezultă:

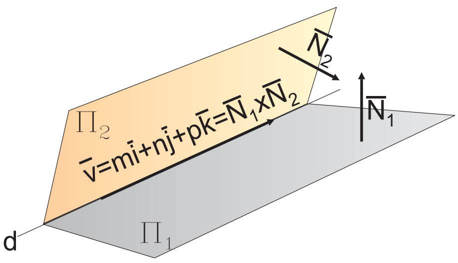
$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \qquad \text{(EPD)}$$

Ecuaţiile de mai sus poartă numele de ecuaţii parametrice ale unei drepte în spaţiu. Dacă rezolvăm fiecare ecuaţie în din (EPD) în raport cu t şi egalăm rapoartele astfel obţinute rezultă ecuaţiile canonice ale unei drepte în spaţiu:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad \text{(ECD)}$$

Remarca 3.3.6 Ecuaţiile parametrice ale unei drepte se pot interpreta ca legea de mişcare a unui punct material care pleacă din M_0 şi se deplasează cu viteza constantă $\overline{v}$.

Dreapta ca intersecţie de două plane neparalele



Fie dreapta $d = \Pi_1 \cap \Pi_2$, conform figurii de mai sus. Dacă ecuaţiile celor două plane sunt:

$$\Pi_1 \ :\quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\Pi_2 \ :\quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

atunci coordonatele oricărui punct de pe dreaptă verifică sistemul:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{(EDDP)}$$

Ne propunem să deducem din ecuaţiile de mai sus ecuaţiile canonice ale dreptei. Pentru aceasta să observăm că vector director al dreptei se poate scrie ca produsul vectorial al normalelor la cele două plane, deoarece este un vector în ambele plane, deci perpendicular pe ambele normale:

$$\overline{v} = \overline{N_1} \times \overline{N_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \overline{i} + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \overline{k}$$

(am folosit expresia analitică a produsului vecorial (3.2.8)). Punctul M_0 de pe dreaptă îl alegem ca având coordonatele o soluţie oarecare a sistemului (EDDP). Atunci ecuaţiile canonice ale dreptei determinate de două plane sunt:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Exemplul 3.3.1 *Să se scrie ecuaţiile canonice ale axei Ox ştiind că ea e intersecţia planelor xOy şi xOz. Ecuaţia planului xOy este $z = 0$ iar ecuaţia planului xOz este $y = 0$, deci ecuaţiile axei Ox sunt:*

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ecuaţile canonice ale axei Ox vor fi:

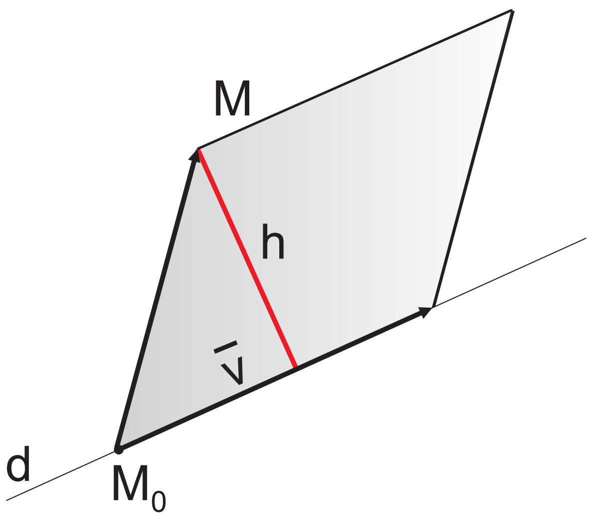
$$\frac{x - 0}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{y - 0}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{z - 0}{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

sau făcând calculele:

$$\frac{x}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}.$$

Distanţa de la un punct la o dreaptă

Fie punctul $M(x_1, y_1, z_1)$ şi dreapta d de ecuaţii canonice (ECD). Distanţa de la punctul dat la dreaptă este egală cu înălţimea h a paralelogramului construit pe vectorii $\overline{v}$ şi $\overrightarrow{M_0M}$, conform figurii de mai jos:



Folosind operaţiile cu vectori rezultă:

$$\begin{aligned} h &= \frac{\left|\overline{v} \times \overrightarrow{M_0M}\right|}{v} = \\ &= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} n & p \\ y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p & m \\ z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m & n \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \end{aligned}$$

Remarca 3.3.7

$$\overline{v} \times \overrightarrow{M_0M} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ m & n & p \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}$$

Remarca 3.3.8 Distanţa de la un punct la o dreaptă se poate afla şi ca minimul distanţelor de la punctul dat la un punct care parcurge dreapta, în acest caz folosindu-se ecuaţiile parametrice ale dreptei şi caculând minimul unei funcţii de grad 2:

$$\begin{aligned} f(t) &= (mt + x_0 - x_1)^2 + (nt + y_0 - y_1)^2 + (pt + z_0 - z_1)^2 = \\ &= at^2 + bt + c, a = m^2 + n^2 + p^2, b = ..., c = ... \end{aligned}$$

Poziţia relativă a trei plane

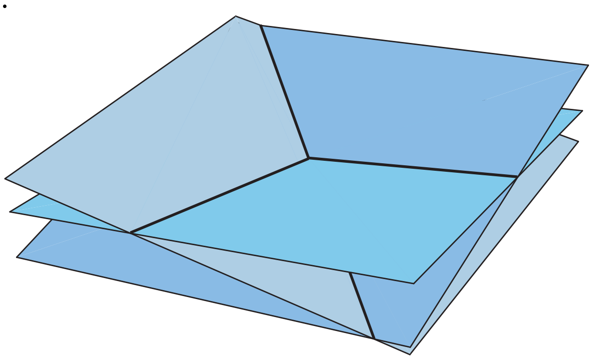
Fie planele Π_i $i = \overline{1,3}$ trei plane. A stabili poziţia lor relativă înseamnă a determina punctele comune. Din punct de vedere algebric aceasta este echivalent cu discuţia sistemului format cu ecuaţiile celor trei plane:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = -D_3 \end{cases} \tag{STrei}$$

Discuţia sistemului este următoarea:

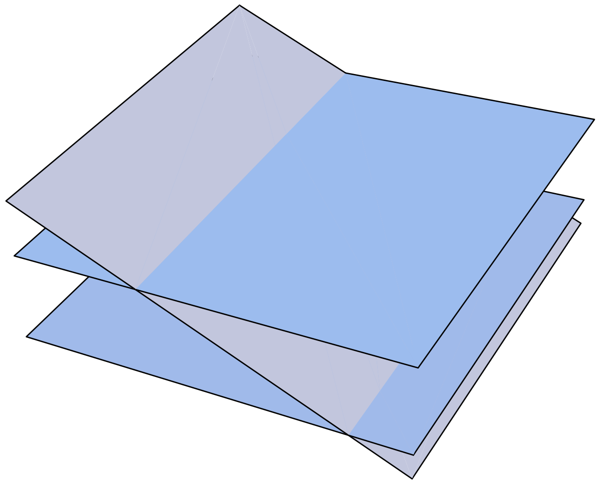
1. *Sistemul (STrei) are soluţie unică, dacă determinantul* $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \left(\overline{N}_1, \overline{N}_2, \overline{N}_3\right)$ *este nenul.*

   Geometric înseamnă că cele trei plane au un singur punct comun (normalele la plane nu sunt în acelaşi plan), vezi figura următoare:

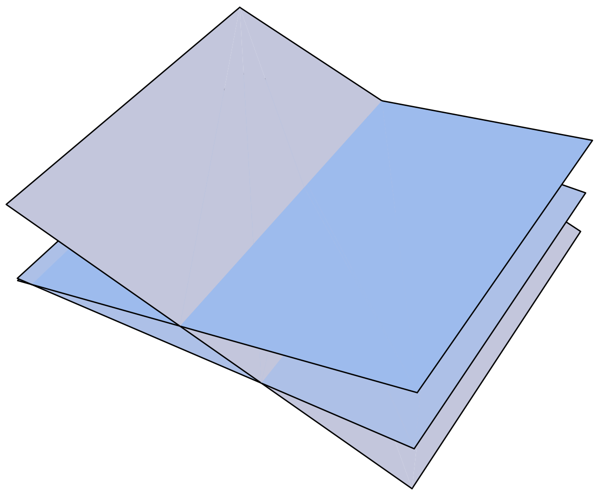


Rangul matricei $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}$ *este doi, iar sistemul este incompatibil, În acest caz sunt două subcazuri:*

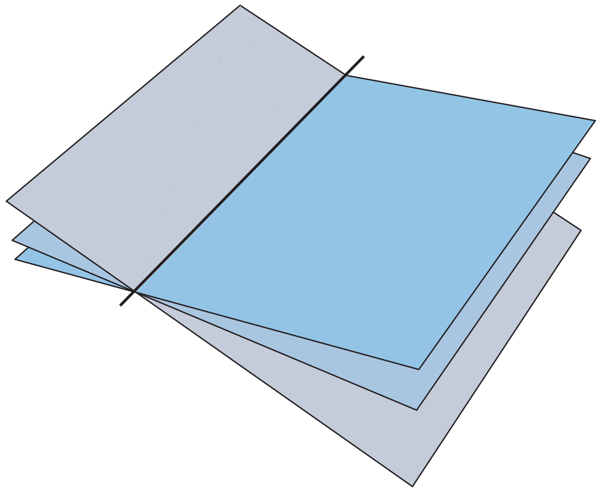
(a) Două linii din matricea de mai sus sunt proporţionale. Atunci două plane sunt paralele, şi sunt intersectate fiecare de cel de al treilea plan, conform figurii:



b) Matricea de mai sus nu are linii proporţionale. Atunci planele se intersectează două câte două după drepte paralele:



2. *Rangul matricei* $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}$ *este doi, iar sistemul (STrei) este compatibil nederminat. Cele trei plane au o dreaptă comună:*



3. Rangul matricei $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}$ *este unu.*

(a) Dacă sistemul (STrei) este compatibil atunci cele trei plane coincid.

(b) Dacă sistemul (STrei) este incompatibil, atunci planele sunt paralele.

Fascicol de plane

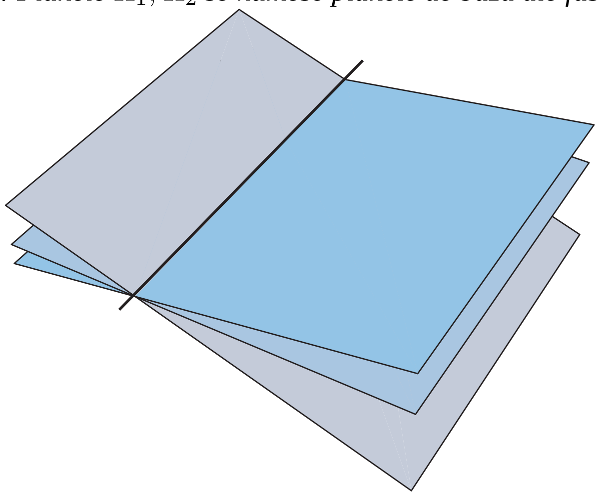
Fie planele Π_1, Π_2 de ecuaţii

$$\begin{array}{lcl} \Pi_1 & : & A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \Pi_2 & : & A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{array}$$

Definitia 3.3.4 *Se numeşte fascicol de plane mulţimea planelor care au ecuaţia:*

$$\lambda\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) + \mu\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0 \qquad \text{(fasc)}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$. *Planele* Π_1, Π_2 *se numesc planele de bază ale fascicolului.*



Remarca 3.3.9 Dacă planele nu sunt paralele, atunci pentru λ, μ luând toate valorile reale obţinem toate planele care trec prin dreapta de intersecţie, iar dacă sunt paralele, toate planele paralele cu ele.

Exercitiul 3.3.2 Să se afle ecuaţia planului care tece prin dreapta de ecuaţii

$$-3(x-1) = 2(y+2), 2(y+2) = -3(z-2)$$

şi care este perpendicular pe planul de ecuaţie $3x+2y-z-5=0$.

Ec. căutată e de forma:

$$\lambda\left(2\left(y+2\right)+3\left(x-1\right)\right)+\mu\left(2\left(y+2\right)+3\left(z-2\right)\right)=0$$

normala la acest $plan$ e:

$$\overline{N}=3\lambda\overline{i}+\left(2\lambda+2\mu\right)\overline{j}+\left(3\mu\right)\overline{k}$$

Normala la planul $3x+2y-z-5=0$ este $\overline{N_1}=3\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$. Cond. de $\perp$ este:

$$\left(3\lambda\right)3+\left(2\lambda+2\mu\right)2+\left(3\mu\right)\left(-1\right)=0$$

adică:

$$13\lambda+\mu=0:\mu=-13\lambda$$

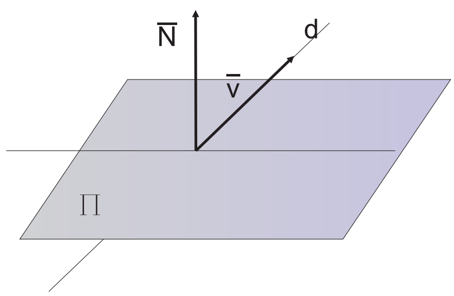
$$\begin{aligned}\lambda\left(2\left(y+2\right)+3\left(x-1\right)\right)-13\lambda\left(2\left(y+2\right)+3\left(z-2\right)\right)&=0\\ 3x-24y-39z+27&=0\end{aligned}$$

Unghiul dintre o dreaptă şi un plan

Fie dreapta d şi planul Π.

Definitia 3.3.5 *Unghiul β dintre dreapta d şi planul Π este unghiul dintre dreaptă şi proiecţia ei pe plan.*

Dacă dreapta e dată sub forma (ECD) iar planul sub forma (EGP) atunci , conform figurii:

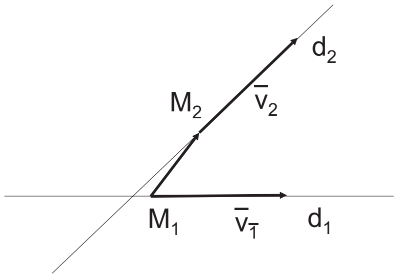


$$\begin{aligned}\sin\beta&=\cos\left(\overline{N},\overline{v}\right)=\frac{\overline{N}\cdot\overline{v}}{Nv}=\\&=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\end{aligned}$$

Poziţia relativă a două drepte în spaţiu

Fie dreptele d_1, d_2 de ecuaţii:

$$\begin{aligned}\frac{x-x_1}{m_1}&=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}\\ \frac{x-x_2}{m_2}&=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}.\end{aligned}$$



Ele n-au în general puncte comune (patru ecuaţii cu trei necunoscute) dacă:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overline{v}_1, \overline{v}_2\right) \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & z_1 \\ m_2 & n_2 & z_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Dacă

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \overline{v}_1, \overline{v}_2\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & z_1 \\ m_2 & n_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

atunci sunt trei posibiltăţi:

1. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$, $M_1 \notin d_2$, *dreptele sunt paralele.*

2. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$, $M_1 \in d_2$ *dreptele coincid.*

3. dacă nu sunt cazurile precedente, dreptele se află în acelaşi plan (care?) şi au un punct comun.

Perpendiculara comună a două drepte în spaţiu

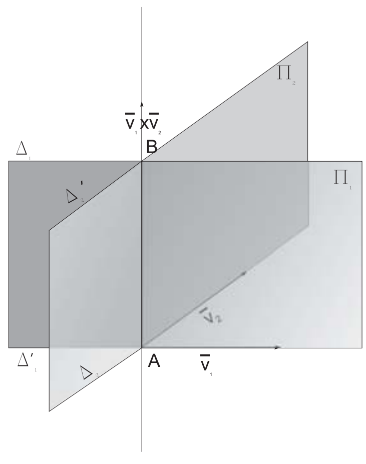
Fie în spaţiu dreptele d_1, d_2 de ecuaţii:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

, neparalele.

Definitia 3.3.6 *Se numeşte perpendiculara comună a celor două drepte o dreaptă care le intersectează pe amândouă şi este perpendiculară pe fiecare.*



AB este perpendiculara comună a dreptelor Δ_1 şi Δ_2

Teorema 3.3.7 *Perpendiculara comună a celor două drepte este intersecţia planelor* Π_1*şi* Π_2 *deteminate de punctul* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, *vectorii* $\overline{v}_1(m_1, n_1, p_1)$ *şi* $\overline{v}_1 \times \overline{v}_2$, *respectiv* $M_2(x_2, y_2, z_2)$, *vectorii* $\overline{v}_2(m_2, n_2, p_2)$ *şi* $\overline{v}_1 \times \overline{v}_2$.

Remarca 3.3.10 Ecuaţia planului Π_1 este:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0$$

Definitia 3.3.7 *Se numeşte distanţa dintre două drepte în spatiu lungimea segmentului de pe perpendiculara comună cuprins între cele două drepte.*

Din geometria sintetică se ştie că distanţa dintre două drepte este egală cu distanţa de la un punct arbitrar al unei drepte la planul paralel cu ea dus la prin cealaltă dreaptă.

Din figura precedentă rezultă că distanţa dintre drepte este înălţimea paralelipipedului construit pe vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overrightarrow{M_2M_1}$ deci:

$$\begin{aligned} dist\,(d_1,d_2) &= \frac{\left|\left(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overrightarrow{M_2M_1}\right)\right|}{|\overline{v}_1 \times \overline{v}_2|} = \\ &= \frac{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}}. \end{aligned}$$

3.4 Sfera

Definitia 3.4.1 *Se numeşte sferă mulţimea tuturor punctelor din spaţiu pentru care distanţa la un punct fix numit centrul sferei este egală cu un număr numit raza sferei.*

Fie centrul sferei $C\,(a,b,c)$ şi raza sferei R.

Teorema 3.4.1 *Punctul $M\,(x,y,z)$ aparţine sferei dacă şi numai dacă coordonatele sale verifică ecuaţia:*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2 \tag{3.4.1}$$

Demonstraţie: distanţa de la M la C este egală cu $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ care egalată cu R este echivalentă cu (3.4.1).□

Dacă în ecuaţia de mai sus se fac calculele şi se reduc termenii asemenea obţinem:

$$x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0 \tag{EGS}$$

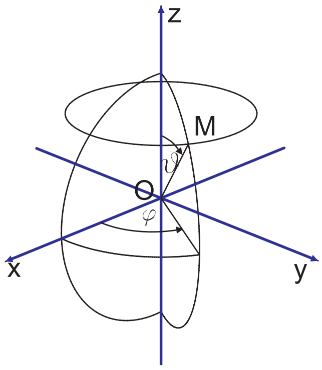
ecuaţie care poartă denumirea de ecuaţia generală a sferei. (EGS) reprezintă o sferă cu centrul în punctul $C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, -\frac{p}{2}\right)$ şi de rază $R = \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ dacă expresia de sub radical este pozitivă.

Remarca 3.4.1 Sfera se mai poate da şi folosind ecuaţiile parametrice:

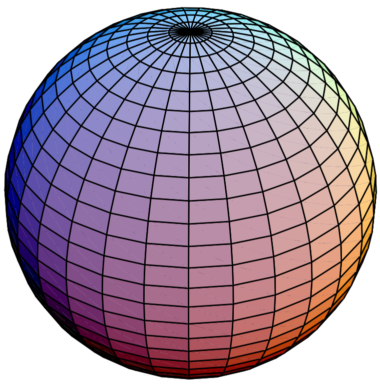
$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\vartheta + a \\ y = R\sin\varphi\sin\vartheta + b \\ z = R\cos\vartheta + c \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, \pi] \tag{EPS}$$

$$\text{sau } \varphi \in [-180, 180], \vartheta \in [-90, 90] \tag{3.4.2}$$

unde parametrii sunt unghiurile φ, ϑ din figura de mai jos:



pentru φ constant se obţin pe sferă jumătăţi de cecuri mari ("meridiane"), iar pentru ϑ constant se obţin pe sferă cercuri ("paralele").



Legat de sferă ne propunem să determinăm ecuaţia unui plan tangent la sferă **într-un punct de pe sferă**. Fie $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$ un punct pe sferă.

Teorema 3.4.2 *Ecuaţia planului tangent la sferă în punctul M_0 este:*

$$(x-a)\left(x_0-a\right)+(y-b)\left(y_0-b\right)+(z-c)\left(z_0-c\right)=R^2 \qquad \text{(EPTS)}$$

Demonstraţie: Planul tangent la sferă în M_0 este determinat de M_0 şi normala $\overrightarrow{CM_0}=\left(x_0-a\right)\bar{i}+\ldots$ (planul este perpendicular pe rază), deci ecuaţia sa este:

$$\left(x-x_0\right)\left(x_0-a\right)+\left(y-y_0\right)\left(y_0-b\right)+\left(z-z_0\right)\left(z_0-c\right)=0$$

Dar $x-x_0=(x-a)-\left(x_0-a\right),..$ care înlocuite în ecuaţia de mai sus dau:

$$(x-a)\left(x_0-a\right)+(y-b)\left(y_0-b\right)+(z-c)\left(z_0-c\right)-\left(\left(x_0-a\right)^2+\left(y_0-b\right)^2+\left(z_0-c\right)^2\right)=0$$

Ţinând cont de faptul că coordonatele lui M_0 verifică ecuaţia sferei, rezultă (EPTS).$\square$

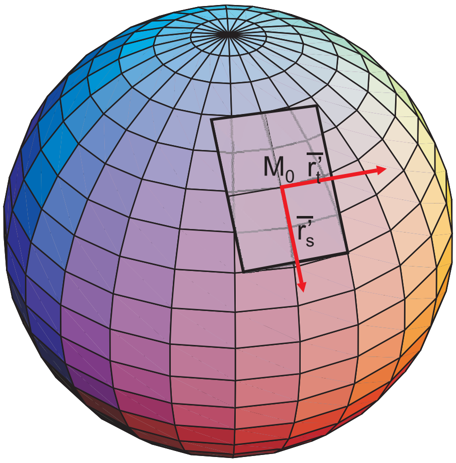
Remarca 3.4.2 Ecuaţia planului tangent la sferă se obţine din (EGS) prin dedublare :

$$(x-a)^2=(x-a)(x-a) \rightarrow (x-a)\left(x_0-a\right), \ldots$$

Remarca 3.4.3 Dacă sfera este dată sub formă generală atunci ecuatia planului tangent în punctul M_0 de pe sferă este:

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 + m\frac{x + x_0}{2} + n\frac{y + y_0}{2} + p\frac{z + z_0}{2} + q = 0$$

dedublarea fiind: $x^2 = xx \rightarrow xx_0$, $x = \frac{x+x}{2} \rightarrow \frac{x+x_0}{2}$.



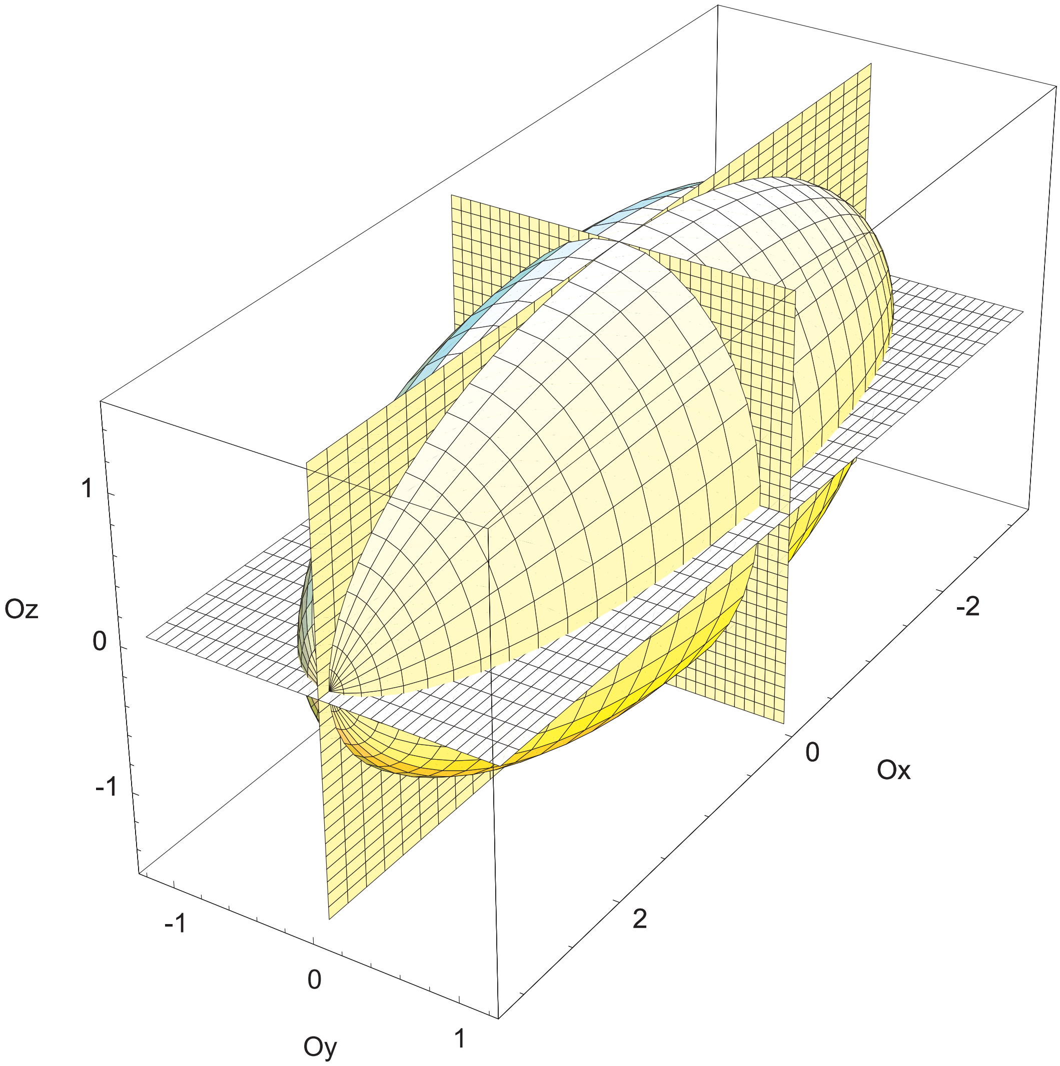
Remarca 3.4.4 In general un plan este tangent la sferă dacă distanţa de la centrul sferei la plan este egală cu raza.

3.5 Cuadrice pe ecuaţii reduse

3.5.1 Elipsoid

Definitia 3.5.1 *Se numeşte elipsoid mulţimea punctelor din spaţiu* $M(x, y, z)$ *care într-un sistem de coordonate bine ales verifică ecuaţia:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{Elips}$$



Pentru a studia suprafaţa dată vom afla intersecţiile ei cu planele de coordonate şi cu plane paralele cu planele de coordonate. Un calcul simplu ne conduce la:

Teorema 3.5.1 *Intersecţia elipsoidului cu planul xOy este elipsa de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, iar cu plane paralele cu xOy ,$z = \gamma$, este elipsa de ecuaţie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\gamma^2}{c^2}$, pentru $|\gamma| < c$, un punct pentru $|\gamma| = c$ şi vidă pentru $|\gamma| > c$.*

Remarca 3.5.1 Este devărată o teoremă analoagă pentru intersecţia cu plane paralele cu celelate plane de coordonate.

Remarca 3.5.2 Axele de coordonate şi planele de coordonate sunt axe, respectiv plane de simetrie pentru elipsoid. (adică dacă un punct se află pe elipsoid şi simetricul său faţă de axe, respectiv plane se află pe elipsoid (două puncte sunt simetrice fată de o dreaptă sau plan dacă mijlocul segmentului care le uneşte este pe dreapă sau plan şi acest segment este perependicular pe dreaptă, respectiv plan).Ex. simetricul punctului $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ faţă de yOz este $M_1\,(-x_0, y_0, z_0)$ faţă de Ox este $M_2\,(x_0, -y_0, -z_0)$.

Dacă avem un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pe elisoid, atunci:

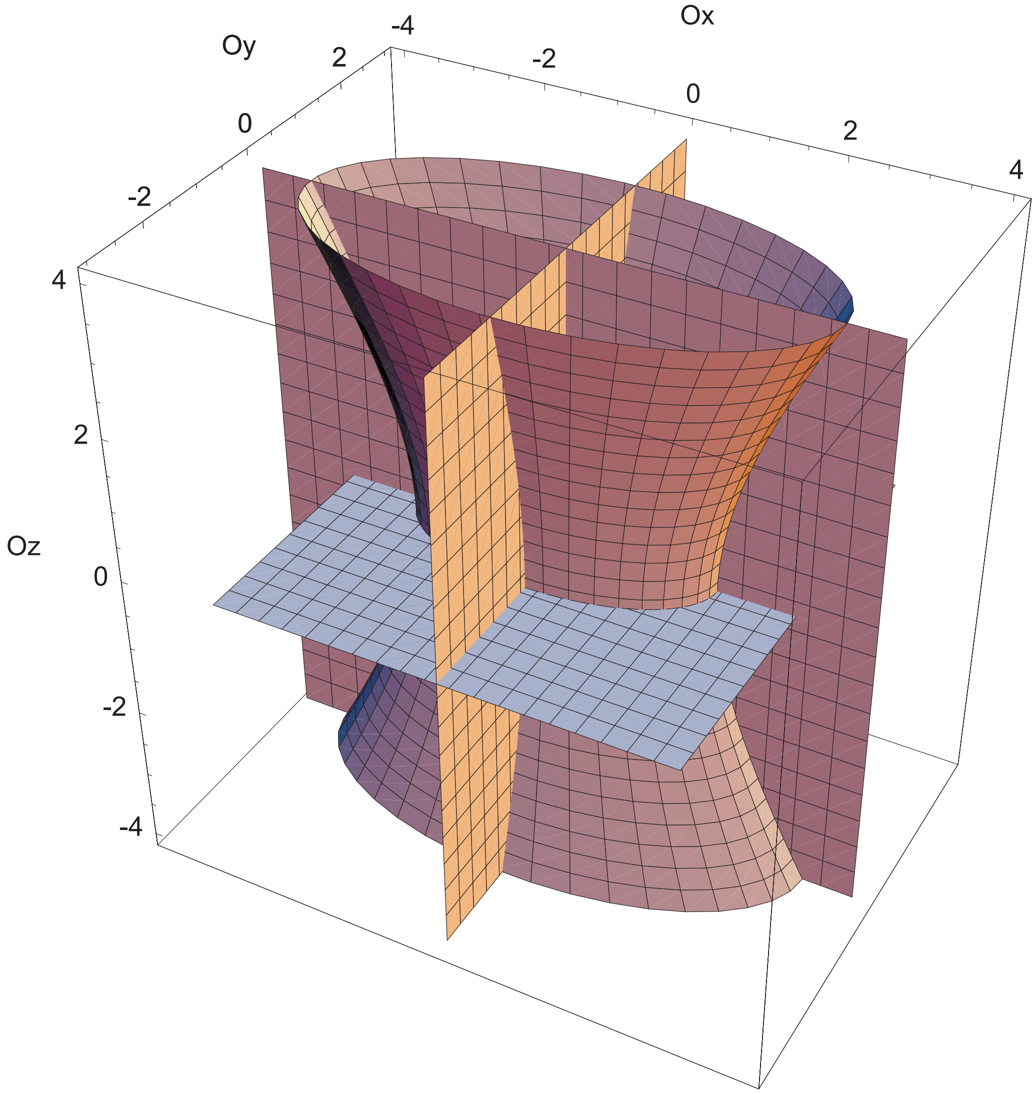
Teorema 3.5.2 *Ecuaţia planului tangent la elipsoid în M_0 este:*

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

3.5.2 Hiperboloidul cu o pânză

Definitia 3.5.2 *Se numeşte hiperboloid cu o pânză mulţimea punctelor din spaţiu care într-un sistem de coordonate bine ales verifică ecuaţia:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{HIP1}$$



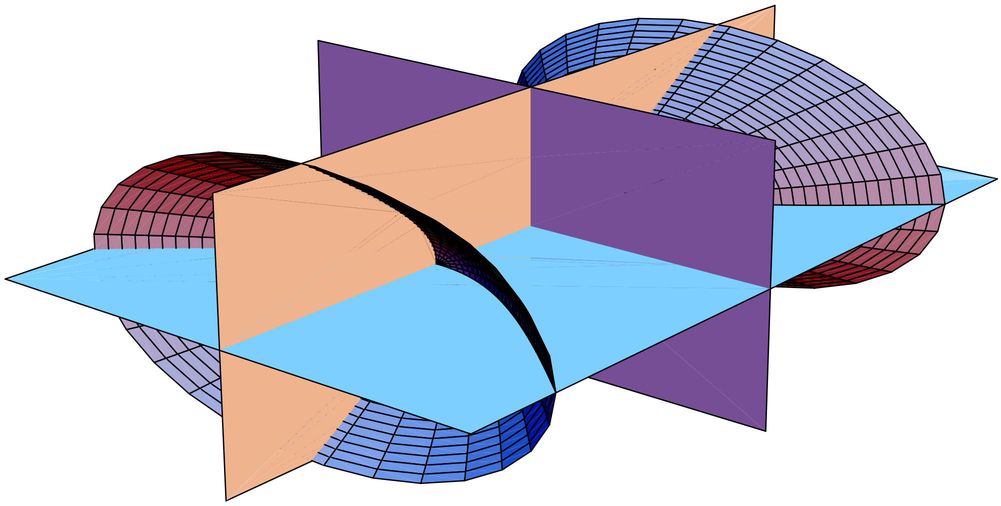
Un calcul simplu ne conduce la:

Teorema 3.5.3 *Intersectia hiperboloidului cu o pânză cu plane paralele cu xOy , $z = \gamma$, este o familie de elipse:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\gamma^2}{c^2}.$$

Teorema 3.5.4 *Intersecţia hiperboloidului cu o pânză cu plane paralele cu xOz, $y = \beta$, este o familie de hiperbole:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{\beta^2}{b^2}.$$



1

Teorema 3.5.5 *Intersecţia hiperboloidului cu o pânză cu plane paralele cu yOz, $x = \alpha$, este o familie de hiperbole:*

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{a^2}.$$

Remarca 3.5.3 Axele şi planele de simetrie sunt aceleaşi ca la elipsoid.

3.5.3 Hiperboloidul cu două pânze

Definitia 3.5.3 *Se numeşte hiperboloid cu două pânze mulţimea punctelor din spaţiu care într-un sistem de coordonate bine ales verifică ecuaţia:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{HIP2}$$

Un calcul simplu ne conduce la:

Teorema 3.5.6 *Intersectia hiperboloidului cu 2 pânze cu plane paralele cu xOy , $z = \gamma$, este o familie de hiperbole:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\gamma^2}{c^2}.$$

Teorema 3.5.7 *Intersecţia hiperboloidului cu 2 pânze cu plane paralele cu xOz, $y = \beta$, este o familie de hiperbole:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{\beta^2}{b^2}.$$

Teorema 3.5.8 *Intersecţia hiperboloidului cu 2 pânze cu plane paralele cu yOz, $x = \alpha$, (pentru $|\alpha| > a$)este o familie de elipse:*

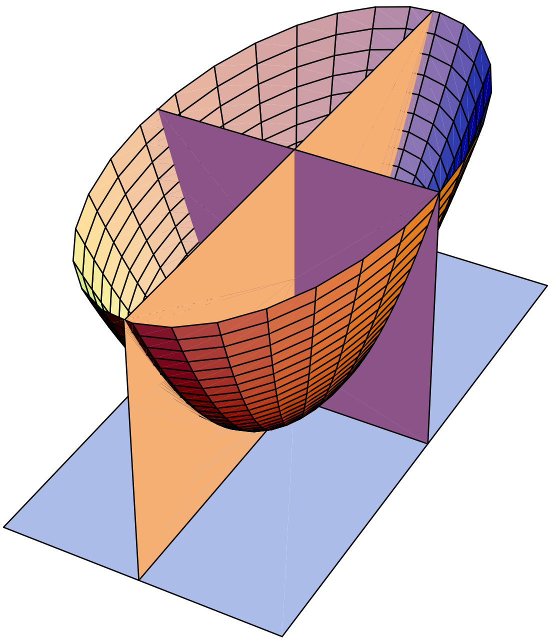
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{\alpha^2}{a^2} - 1.$$

Remarca 3.5.4 Axele şi planele e simetrie sunt aceleaşi ca la elipsoid.

3.5.4 Paraboloidul eliptic

Definitia 3.5.4 *Se numeşte paraboloid eliptic mulţimea punctelor a căror coordonate, într-un sistem bine ales, verifică ecuaţia:*

$$2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \tag{PE}$$



Un calcul simplu ne conduce la:

Teorema 3.5.9 *Intersecţia parabolidului eliptic cu plane paralele cu xOy, $z = \gamma > 0$, este o familie de elipse:*

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 2\gamma \\ z &= \gamma \end{aligned}$$

Teorema 3.5.10 *Intersecţia paraboloidului eliptic cu plane paralele cu xOz, $y = \beta$, este o familie de parabole:*

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} &= 2z \\ y &= \beta. \end{aligned}$$

Teorema 3.5.11 *Intersecţia paraboloidului eliptic cu plane paralele cu yOz, $x = \alpha$, este o familie de parabole:*

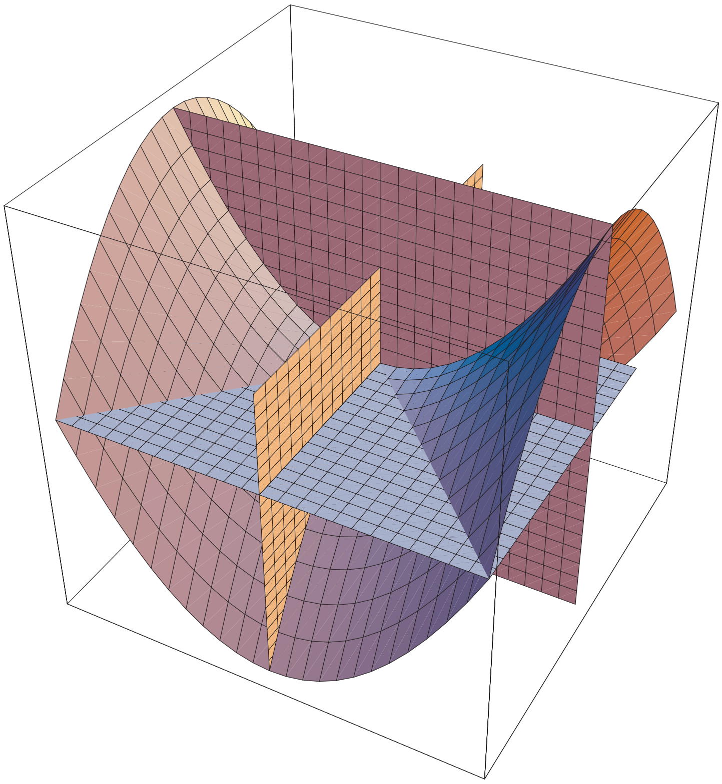
$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 2z \\ x &= \alpha. \end{aligned}$$

Remarca 3.5.5 Axa de simetrie e doar Oz, iar plane de simetrie xOz, yOz.

3.5.5 Paraboloidul hiperbolic

Definitia 3.5.5 *Se numeşte parabiloid hiperbolic mulţimea punctelor a căror coordonate, într-un sistem bine ales, verifică ecuaţia:*

$$2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \tag{PH}$$



Un calcul simplu ne conduce la:

Teorema 3.5.12 *Intersecţia paraboloidului hiperbolic cu plane paralele cu xOy , $z = \gamma$,este formată din hiperbole:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2\gamma.$$

Teorema 3.5.13 *Intersecţia paraboloidului hiperbolic cu plane paralele cu xOz , $y = \beta$,este formată din parabole:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 2z.$$

Teorema 3.5.14 *Intersecţia paraboloidului hiperbolic cu plane paralele cu yOz , $x = \alpha$,este formată din parabole:*

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Remarca 3.5.6 Axa de simetrie e doar Oz, iar plane de simetrie xOz, yOz.

3.5.6 Generatoare rectilinii pentru hiperboloidul cu o pânză

Fie ecuaţia hiperboloidului cu o pânză (HIP1). Ea se poate pune sub forma:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right)\left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

care este echivalentă cu:

$$\frac{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}}{1 - \frac{y}{b}} = \frac{1 + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}} \tag{3.5.1}$$

sau:

$$\frac{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}}{1 + \frac{y}{b}} = \frac{1 - \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}} \tag{3.5.2}$$

Dacă egalăm rapoartele din (3.5.1) cu λ, pentru λ fixat ele sunt ecuaţiile unei drepte, aflată în întregime pe suprafaţă.

Definitia 3.5.6 *Se numeşte prima familie de generatoare rectilinii pentru hiperboloidul cu o pânză mulţimea dreptelor din spaţiu de ecuaţii:*

$$\frac{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}}{1 - \frac{y}{b}} = \frac{1 + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}} = \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{G1}$$

şi a doua familie de generatoare rectilinii pentru hiperboloidul cu o pânză mulţimea dreptelor din spaţiu de ecuaţii:

$$\frac{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}}{1 + \frac{y}{b}} = \frac{1 - \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}} = \mu \qquad \mu \in \mathbb{R} \tag{G2}$$

Proprietăţile generatoarelor rectilinii sunt date de:

Teorema 3.5.15 *Prin orice punct de pe hiperboloid trece câte o generatoare din fiecare familie.*

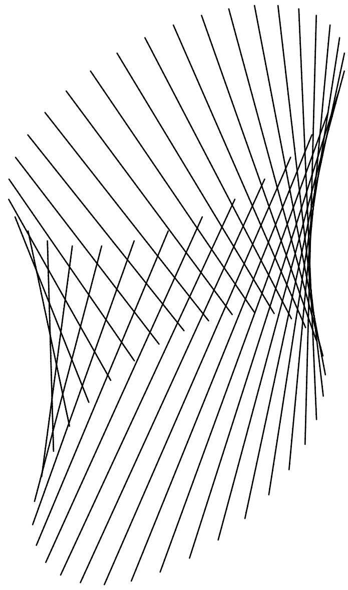
Teorema 3.5.16 *Două generatoare din aceeaşi familie nu se intersectează.*

Demonstraţie: Arătăm că sistemul:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}}{1 + \frac{y}{b}} &= \frac{1 - \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}} = \mu_1 \\ \frac{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}}{1 + \frac{y}{b}} &= \frac{1 - \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}} = \mu_2 \end{aligned}$$

nu are soluţii pentru $\mu_1 \neq \mu_2$. Avem $(\mu_1 - \mu_2)\left(1 + \frac{y}{b}\right) = 0$ rezultă $y = -b$.

Teorema 3.5.17 *Două generatoare din familii diferite au un singur punct comun.*



3.5.7 Generatoare rectilinii pentru paraboloidul hiperbolic

Fie ecuaţia paraboloidului hiperbolic (PH). ea se poate pune sub forma:

$$2z = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

care este echivalentă cu:

$$\frac{2}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}} = \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{z} \tag{3.5.3}$$

sau:

$$\frac{2}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}} = \frac{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}}{z} \tag{3.5.4}$$

Dacă egalăm rapoartele din (3.5.3) cu λ, pentru λ fixat ele sunt ecuaţiile unei drepte, aflată în întregime pe suprafaţă.

Definitia 3.5.7 *Se numeşte prima familie de generatoare rectilinii pentru paraboloidul hiperbolic mulţimea dreptelor din spaţiu de ecuaţii:*

$$\frac{2}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}} = \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{z} = \lambda, \qquad \lambda \in \mathbb{R} \tag{G1}$$

şi a doua familie de generatoare rectilinii pentru hiperboloidul cu o pânză mulţimea dreptelor din spaţiu de ecuaţii:

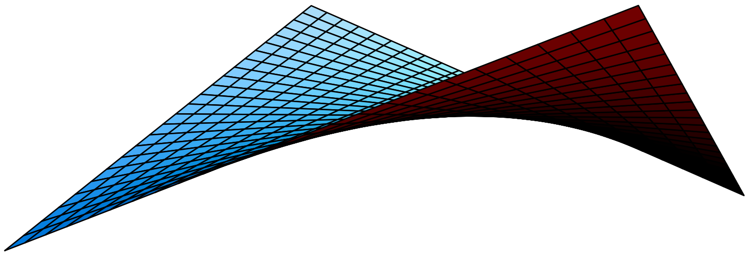
$$\frac{2}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}} = \frac{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}}{z} = \mu \qquad \mu \in \mathbb{R} \tag{G2}$$

Proprietăţile generatoarelor rectilinii sunt date de:

Teorema 3.5.18 *Prin orice punct de pe paraboloid trece câte o generatoare din fiecare familie.*

Teorema 3.5.19 *Două generatoare din aceeaşi familie nu se intersectează.*

Teorema 3.5.20 *Două generatoare din familii diferite au un singur punct comun.*



Dem la tp2:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}} &= \frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{z} = \lambda_1 \\ \frac{2}{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}} &= \frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{z} = \lambda_2 \end{aligned}$$

cu $\lambda_1 \neq \lambda_2$. n-am sol.

dem. la tp3:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}} &= \frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{z} = \lambda \\ \frac{2}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}} &= \frac{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}}{z} = \mu \end{aligned}$$

sistem cu 4 ec. şi 3 nec. $rescris$:

$$\begin{cases} \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{2}{\lambda} \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\lambda z=0 \\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{2}{\mu} \\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\mu z=0 \end{cases}.$$

este compatibil dacă:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 0 & \frac{2}{\lambda} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & -\lambda & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & \frac{2}{\mu} \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & -\mu & 0 \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} 0$$

Scăzând prima linie din celelalte:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 0 & \frac{2}{\lambda} \\ 0 & \frac{2}{b} & -\lambda & -\frac{2}{\lambda} \\ 0 & \frac{2}{b} & 0 & \frac{2}{\mu}-\frac{2}{\lambda} \\ 0 & 0 & -\mu & -\frac{2}{\lambda} \end{vmatrix} &= \frac{1}{a}\begin{vmatrix} \frac{2}{b} & -\lambda & -\frac{2}{\lambda} \\ \frac{2}{b} & 0 & \frac{2}{\mu}-\frac{2}{\lambda} \\ 0 & -\mu & -\frac{2}{\lambda} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{a}\begin{vmatrix} \frac{2}{b} & -\lambda & -\frac{2}{\lambda} \\ 0 & \lambda & \frac{2}{\mu} \\ 0 & -\mu & -\frac{2}{\lambda} \end{vmatrix} = \frac{2}{ab}\begin{vmatrix} \lambda & \frac{2}{\mu} \\ -\mu & -\frac{2}{\lambda} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{2}{ab}(-2+2)=0 \end{aligned}$$

Exercise 1 *Să se determine generatoarele rectilinii ale p h*

$$2z = x^2 - y^2$$

paralele cu planul $x+y+z=10$.

$$\frac{x-y}{2} = \frac{z}{x+y} = \lambda$$

$$x - y - 2\lambda = 0$$
$$\lambda x + \lambda y - z = 0$$

$$\begin{cases} x+y+z=10 \\ x-y-2\lambda=0 \\ \lambda x+\lambda y-z=0 \end{cases}$$

incompatibil.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{vmatrix} = 0$$

rezultă $\lambda = -1$. deci:

$$\begin{cases} x-y+2=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

$$\frac{x-y}{z} = \frac{2}{x+y} = \mu$$

$$\begin{aligned} x-y-\mu z &= 0 \\ \mu x+\mu y-2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y+z &= 10 \\ x-y-\mu z &= 0 \\ \mu x+\mu y-2 &= 0 \end{aligned}$$

sistem incompatibil:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -\mu \\ \mu & \mu & 0 \end{vmatrix} = 0$$

: $2\mu = 0$ deci:

$$\begin{cases} x-y=0 \\ -2=0 \end{cases} !$$

3.6 Generări de suprafeţe

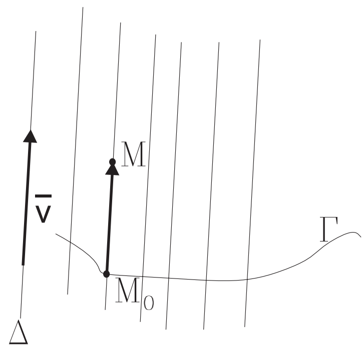
3.6.1 Notiuni generale de curbe şi suprafeţe

Definitia 3.6.1 *Se numeşte curbă în spaţiu mulţimea punctelor a căror coordonate sunt funcţii continue de un parametru real, care ia valori într-un interval:*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in I \subset \mathbb{R} \tag{EPC}$$

Definitia 3.6.2 *Se numeşte suprafaţă în spaţiu mulţimea punctelor ale căror coordonate sunt funcţii continue de doi parametri reali, fiecare luând valori într-un interval:*

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}, u \in I_1, v \in I_2, I_1, I_2 \subset \mathbb{R} \tag{EPS}$$



2

Remarca 3.6.1 Ecuaţiile (EPC),(EPS) se numesc ecuaţiile parametrice ale curbei, respectiv suprafeţei.

Remarca 3.6.2 Eliminând în ecuaţiile parametrice ale suprafeţei parametrii u, v se obţine ecuaţia implicită a suprafeţei:

$$F(x, y, z) = 0, \tag{EIS}$$

iar rezolvând ecuaţia de mai sus în raport cu z se obţine ecuaţia explicită a suprafeţei:

$$z = f(x, y). \tag{EES}$$

Remarca 3.6.3 Analog, pentru o curbă, eliminând t se obţin ecuaţiile curbei ca intersecţie de două suprafeţe:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

sau forma explicită:

$$\begin{cases} y = f_1(x) \\ z = f_2(x) \end{cases}.$$

Exemplul 3.6.1 *Sfera: ec. implicită:*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

Ec. explicită:

$$z = c \pm \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}$$

ec. parametrice:

3.6.2 Suprafeţe cilindrice

Definitia 3.6.3 *Se numeşte suprafaţă cilindrică o suprafaţă generată de o dreaptă care rămâne paralelă cu o dreaptă dată şi intersectează o curbă dată (sau verifică altă condiţie geometrică).*

Remarca 3.6.4 Curba Γ se numeşte curbă directoare, iar dreptele paralele cu Δ se numesc generatoare ale sup. cil.

Ne propunem în cele ce urmează să determinăm ecuaţiile suprafeţei cilindrice.
Vom face acest lucru în două variante:

Teorema 3.6.1 *Dacă dreapta Δ are ecuaţiile canonice:*

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

şi curba Γ *are ecuaţiile parametrice*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in I \subset \mathbb{R}$$

atunci suprafaţa cilindrică are ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} X = x(t) + \lambda a \\ Y = y(t) + \lambda b \\ Z = z(t) + \lambda c \end{cases}, t \in I \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}. \qquad \text{(EPSC)}$$

Demonstraţie. Fie $M(X, Y, Z)$ un punct pe suprafaţa cilindrică. Există atunci un punct $M_0(x(t), y(t), z(t))$ pe curba Γ astfel încât $\overrightarrow{M_0M}$ este paralel cu dreapta Δ, deci există $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_0M} &= \lambda\left(a\overline{i} + b\overline{j} + c\overline{k}\right) \\ \overrightarrow{M_0M} &= (X - x(t))\,\overline{i} + (Y - y(t))\,\overline{j} + (Z - z(t))\,\overline{k} \end{aligned}$$

egalând coordonatele celor doi vectori din egalitatea de mai sus rezultă (EPSC).

Exemplul 3.6.1 *Fie dreapta*

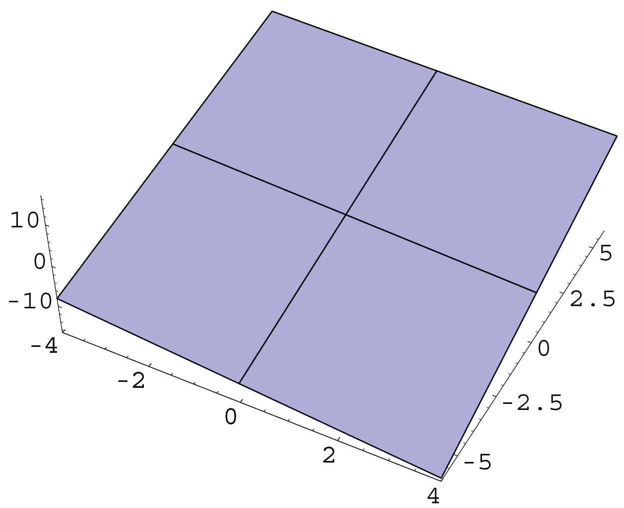
$$\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

şi curba Γ :

$$x = 2t, y = 3t, z = 4t.$$

Ecuaţiile parametrice ale suprafeţei cilindrice vor fi

$$\begin{cases} X = 2t + 1 \cdot \lambda \\ Y = 3t + 2\lambda \\ Z = 4t + 3\lambda \end{cases} \quad t, \lambda \in \mathbb{R}$$

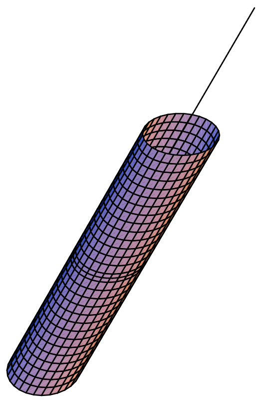


Exemplul 3.6.2 *Fie drepta* Δ *ca mai sus, iar curba* Γ

$$x = \cos t, y = \sin t, z = 0.t \in [0, 2\pi].$$

Ecuaţiile parametrice ale suprafeţei cilindrice vor fi

$$\begin{cases} X = \cos t + \lambda \\ Y = \sin t + 2\lambda \\ Z = 3\lambda \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi], \lambda \in \mathbb{R}$$



Teorema 3.6.2 *Dacă dreapta Δ este dată ca intersecţie de două plane*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

şi curba Γ ca intersecţie de două suprafeţe atunci ecuaţia implicită a suprafeţei cilindrice este:

$$H\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1, A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0. \tag{3.6.1}$$

Demonstraţie. Dacă un punct $M\left(x, y, z\right)$ se află pe suprafaţă atunci el se află pe o dreaptă paralelă cu Δ, deci coordonatele sale verifică:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = \alpha \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = \beta \end{cases} \tag{3.6.2}$$

Dreapta de mai sus intersectează curba Γ, deci sistemul:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = \alpha \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = \beta \\ F_1\left(x, y, z\right) = 0 \\ F_2\left(x, y, z\right) = 0 \end{cases}$$

are soluţie, de unde rezultă (eliminând x, y, z):

$$H\left(\alpha, \beta\right) = 0$$

înlocuind în formula de mai sus pe α, β din (3.6.2) rezultă formula (3.6.1).

Exemplul 3.6.3 *Să se afle suprafaţa cilindrică care are generatoarele paralele cu Oz şi trece prin curba:*

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

Toate dreptele paralele cu Oz $\left(x = 0, y = 0\right)$ au ecuaţiile:

$$x = \alpha, y = \beta,$$

sistemul de patru ecuaţii fiind:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 4 \end{cases}$$

Obţinem condiţia de compatibilitate:

$$\alpha^2 + 2\beta^2 - 4 = 0$$

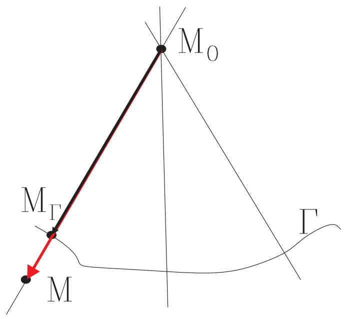
deci ecuatia suprafeţei va fi:

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 - 4 &= 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} &= 1 \end{aligned}$$

Remarca 3.6.5 Se poate demonstra că o ecuaţie în care apar doar coordonatele x, y reprezintă ecuatia unei suprafeţe cilidrice cu generatoarele paralele cu Oz.

3.6.3 Suprafeţe conice

Definitia 3.6.4 *Se numeşte suprafaţă conică o suprafaţă generată de o dreaptă care trece printr-un punct fix şi intersectează o curbă dată (sau verifică altă condiţie geometrică).*



Ne propunem în cele ce urmează să determinăm ecuaţiile suprafeţei conice.

Teorema 3.6.3 *Dacă punctul M_0 are coordonatele (x_0, y_0, z_0) şi curba Γ are ecuaţiile parametrice*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in I \subset \mathbb{R}$$

atunci suprafaţa conică are ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} X = x_0 + \lambda(x(t) - x_0) = \lambda x(t) + (1-\lambda)x_0 \\ Y = y_0 + \lambda(y(t) - y_0) \\ Z = z_0 + \lambda(z(t) - z_0) \end{cases}, t \in I \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}. \quad \text{(EPSC)}$$

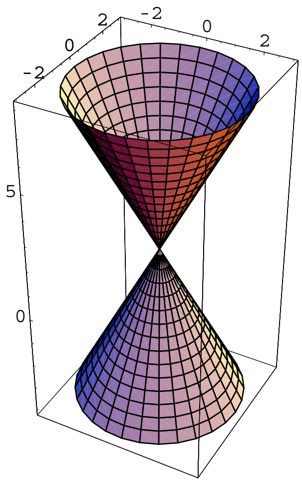
Demonstraţia este asemănătoare cu cea de la suprafaţa cilindrică, înlocuind condiţia de paralelism cu dreapta cu condiţia de coliniaritate cu $\overrightarrow{M_0M_\Gamma}$.

Exemplul 3.6.1 *Conul cu centrul în punctul $M_0(0,0,2)$ care trece prin curba Γ*

$$x = \cos t, y = \sin t, z = 0.t \in [0, 2\pi].$$

are ecuaţiile parametrice:

$$x = \lambda\cos t + 0(1-\lambda), y = \lambda\sin t, z = 2 - 2\lambda.$$



Teorema 3.6.4 *Dacă punctul M_0 este dat ca intersecţie de trei plane:*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$

şi curba Γ ca intersecţie de două suprafeţe atunci ecuaţia implicită a suprafeţei conice este:

$$H\left(\frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}, \frac{A_3x + B_3y + C_3z + D_3}{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}\right) = 0.$$

Demonstraţie: Toate dreptele care trec prin M_0 au ec. de forma:

$$\begin{aligned} A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= \alpha\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= \beta\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) \end{aligned}$$

punând condiţia să intersecteze curba Γ avem sistemul:

$$\begin{cases} A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = \alpha\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = \beta\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) \\ F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

care trebuie să fie compatibil. Eliminând (x, y, z) rezultă:

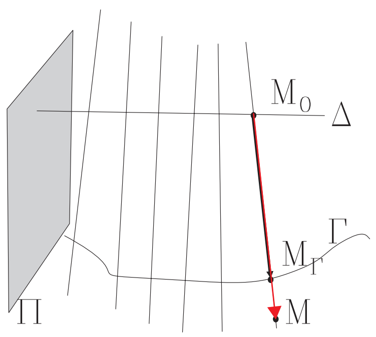
$$H(\alpha, \beta) = 0$$

Înlocuind α, β din primele 2 ec. rezultă

$$H\left(\frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}, \frac{A_3x + B_3y + C_3z + D_3}{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}\right) = 0.$$

3.6.4 Suprafeţe conoide

Definitia 3.6.5 *Se numeşte suprafaţă conoidă o suprafaţă generată de o dreaptă care intersectează o dreaptă dată, este paralelă cu un plan dat şi intersectează o curbă dată (sau verifică altă condiţie geometrică).*



Teorema 3.6.5 *Dacă dreapta Δ este dată ca intersecţie de două plane:*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

planul Π are ecuaţia:

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

şi curba Γ este dată ca intersecţie de două suprafeţe atunci ecuatia suprafeţei conoide este:

$$H\left(A_3x + B_3y + C_3z + D_3, \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}\right) = 0.$$

Pentru demonstraţie se ţine cont că dacă $M\left(x,y,z\right)$ aparţine suprafeţei conoide atunci coordonatele sale verifică sistemul:

$$\begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=\alpha \\ \frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{A_2x+B_2y+C_2z+D_2}=\beta \\ F_1\left(x,y,z\right)=0 \\ F_2\left(x,y,z\right)=0 \end{cases}$$

iar din condiţia de compatibilitate rezultă că $H\left(\alpha,\beta\right)=0$, de unde rezultă formula cerută.

Exemplul 3.6.1 *Să se afle ecuaţia suprafeţei conoide care are generatoarele paralele cu xOy, trec prin Oz şi intersectează curba:*

$$x^2+z^2=1, y=4$$

Sistemul precedent devine:

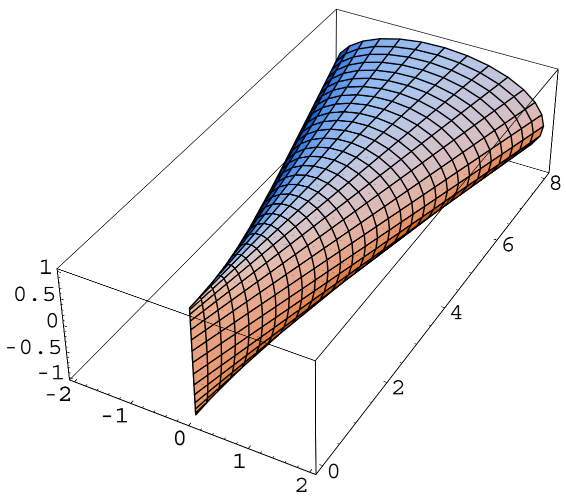
$$x^2+z^2=1, y=4, z=\alpha, \frac{x}{y}=\beta$$

Rezolvând sistemul format cu ultimele trei ecuaţii şi înlocuind în prima obţinem:

$$\left(4\beta\right)^2+\alpha^2-1=0$$

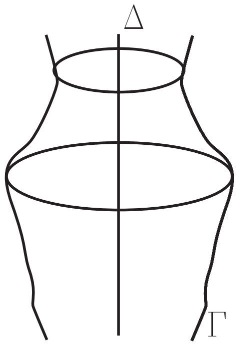
deci ecuaţia suprafeţei va fi:

$$\left(\frac{4x}{y}\right)^2+z^2-1=0.$$



3.6.5 Suprafeţe de rotaţie

Definitia 3.6.6 *Se numeşte suprafaţă de rotaţie o suprafaţă obţinută din rotaţia unei curbe în jurul unei drepte.*



Teorema 3.6.6 *Dacă dreapta* Δ *este dată sub forma canonică:*

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

şi curba Γ *ca intersecţie de două suprafeţe:*

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

atunci ecuaţia implicită a suprafeţei de rotaţie va fi:

$$H\left(ax+by+cz,(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\right)=0,$$

unde funcţia $H(\alpha,\beta)$ *rezultă din compatibilitatea sistemului:*

$$\begin{gathered} ax+by+cz=\alpha \\ (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\beta \\ F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0. \end{gathered}$$

Exemplul 3.6.1 *Să se afle suprafaţa obţinută prin rotaţia dreptei:*

$$x-z=1-y, x+z=1+y$$

în jurul axei Oz*. (Răspuns:* $x^2+y^2-z^2=1$*: axa* Oz

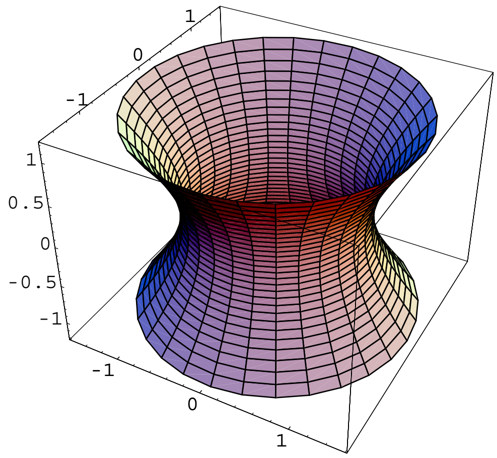
$$\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}$$

sistemul:

$$\begin{gathered} z=\alpha \\ x^2+y^2+z^2=\beta \\ x-z=1-y \\ x+z=1+y \end{gathered}$$

rezultă:

$$\begin{aligned} x &= 1, z=\alpha, y=\alpha \Rightarrow \\ 1^2+\alpha^2+\alpha^2-\beta &= 0 \Rightarrow \text{ ec. supr. de rot.:} \\ 1+z^2+z^2-\left(x^2+y^2+z^2\right) &= 0 \\ x^2+y^2-z^2 &= 1 \end{aligned}$$



Ec. parametrice ale unei supr. de rotaţie: Dacă dreapta Δ este dată sub forma canonică:

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

şi curba Γ are ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \quad ,t\in I\subset\mathbb{R} \\ z=z(t) \end{cases}$$

Ideea: pt. t fixat să se afle ec. parametrice ale cercului descris de punctul de pe Γ , cerc cu centrul pe Δ, în plan perpendicular pe Δ.

Centrul cercului: intersecţia cu Δ a planului perp. pe Δ prin $(x(t),y(t),z(t))$:

$$\begin{aligned} \frac{X-x_1}{a} &= \frac{Y-y_1}{b}=\frac{Z-z_1}{c}=s \\ a(X-x(t))+b(Y-y(t))+c(Z-z(t)) &= 0 \end{aligned}$$

rezultă (X,Y,Z) . Raza cercului va fi distanţa de la $(x(t),y(t),z(t))$ la dreapta Δ :

$$R=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y(t)-y_1 & z(t)-z_1 \\ b & c\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z(t)-z_1 & x(t)-x_1 \\ c & a\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x(t)-x_1 & y(t)-y_1 \\ a & b\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

un vector perp. pe vectorul director al dreptei Δ este:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v}_1 &= \left(a\overrightarrow{i}+b\overrightarrow{j}+c\overrightarrow{k}\right)\times\left(\alpha\overrightarrow{i}+\beta\overrightarrow{j}+\gamma\overrightarrow{k}\right)=\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} \\ \overrightarrow{v}_2 &= \left(a\overrightarrow{i}+b\overrightarrow{j}+c\overrightarrow{k}\right)\times\overrightarrow{v}_1 \end{aligned}$$

Fie $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$ versorii vectorilor $\overrightarrow{v}_1$, $\overrightarrow{v}_2$. Dacă notez cu $\overrightarrow{r}$ vectorul de poziţie al unui punct de pe cerc:

$$\overrightarrow{r}=X\overrightarrow{i}+Y\overrightarrow{j}+Z\overrightarrow{k}+R\left(\overrightarrow{u}_1\cos s+\overrightarrow{u}_2\sin s\right),s\in[0,2\pi]$$

TOR

Să se afle ecuaţiile parametrice şi ecuaţia implicită a suprafeţei obţinute prin rotaţia cercului:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ (y-a)^2+z^2 &= b^2 \end{aligned}$$

în jurul axei Oz.

Ec. implicită:

$$\begin{cases} x = 0 \\ (y-a)^2 + z^2 = b^2 \\ z = \alpha \\ x^2 + y^2 + z^2 = \beta \end{cases}$$

din ec. a doua rezultă

$$y = a \pm \sqrt{b^2 - \alpha^2}$$

Înlocuind în ultima ec.:

$$\left(a \pm \sqrt{b^2 - \alpha^2}\right)^2 + \alpha^2 = \beta$$

ec. implicită:

$$\left(a \pm \sqrt{b^2 - z^2}\right)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\begin{aligned} a^2 \pm 2a\sqrt{b^2 - z^2} + b^2 - z^2 &= \left(x^2 + y^2\right) \\ 4a^2\left(b^2 - z^2\right) &= \left(x^2 + y^2 + z^2 - b^2 - a^2\right)^2 \end{aligned}$$

Ec, parametrice:

curba care se roteşte are ec. parametrice:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= b\cos t + a \\ z &= b\sin t, t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

centrul cercului pe care se miscă un punct cu t fixat este:

$$(0, 0, b\sin t)$$

iar raza cercului pe care se roteşte este $a + b\cos t$. Punctul de pe TOR va avea vectorul de pozitie:

$$\overline{r} = (0, 0, b\sin t) + (a + b\cos t)(\cos s, \sin s, 0)$$

adică:

$$\begin{aligned} x &= (a + b\cos t)\cos s \\ y &= (a + b\cos t)\sin s \\ z &= b\sin t, t \in [0, 2\pi], s \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

Capitolul 4

Geometrie diferenţială

4.1 Noţiuni preliminare

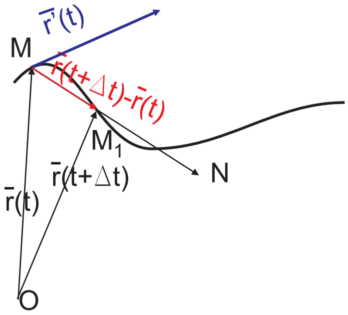
Fie un vector a cărui coordonate depind de un parametru real t :

$$\overline{r} = \overline{r}\left(t\right), t \in I \subseteq \mathbb{R} \tag{4.1.1}$$

Definitia 4.1.1 *Se numeşte derivata vectorului $\overline{r}$ în punctul t vectorul $\overline{r'}\left(t\right)$ definit de:*

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{r}\left(t + \Delta t\right) - \overline{r}\left(t\right)}{\Delta t} = \overline{r'}\left(t\right). \tag{4.1.2}$$

dacă limita din membrul stâng există.



Derivata unui vector

(în figura de mai sus $\overrightarrow{MN} = \frac{\overline{r}(t+\Delta t)-\overline{r}(t)}{\Delta t}$)

Remarca 4.1.1 Derivata unui vector se poate interpreta mecanic ca viteza instantanee, expresia lui $\overline{r}\left(t\right)$ fiind legea de mişcare a uni punct.

Dacă:

$$\overline{r}\left(t\right) = x\left(t\right)\overline{i} + y\left(t\right)\overline{j} + z\left(t\right)\overline{k}$$

atunci se poate demonstra:

Teorema 4.1.1 $\overline{r'}\left(t\right)$ *există dacă şi numai dacă funcţiile reale de o variabilă reală x, y, z sunt derivabile în t şi:*

$$\overline{r'}\left(t\right) = x'\left(t\right)\overline{i} + y'\left(t\right)\overline{j} + z'\left(t\right)\overline{k}$$

Regulile de derivare pentru vectori sunt aceleaşi ca pentru funcţii reale. Mai precis:

Teorema 4.1.2 *Dacă $\overline{r}_1, \overline{r}_2$ sunt vectori derivabili, iar f o funcţie reală derivabilă în t atunci:*

$$\left(\overline{r}_1\left(t\right) \pm \overline{r}_2\left(t\right)\right)' = \overline{r'_1}\left(t\right) \pm \overline{r'_2}\left(t\right) \tag{4.1.3}$$

$$\left(f\left(t\right)\overline{r}_1\left(t\right)\right)' = f'\left(t\right)\overline{r}_1\left(t\right) + f\left(t\right)\overline{r'_1}\left(t\right) \tag{4.1.4}$$

$$\left(\overline{r}_1\left(t\right) \cdot \overline{r}_2\left(t\right)\right)' = \overline{r_1}\left(t\right) \cdot \overline{r'_2}\left(t\right) + \overline{r'_1}\left(t\right) \cdot \overline{r}_2\left(t\right) \tag{4.1.5}$$

$$\left(\overline{r}_1(t) \times \overline{r}_2(t)\right)' = \overline{r_1}(t) \times \overline{r_2'}(t) + \overline{r_1'}(t) \times \overline{r}_2(t) \tag{4.1.6}$$

Din teorema precedentă rezultă:

Corolarul 4.1.1 *Dacă vectorul $\overline{r}(t)$ are lungime constantă atunci $\overline{r'}(t)$ este perpendicular pe $\overline{r}(t)$.*

Demonstraţie: Din (4.1.5) pentru $\overline{r_1}(t) = \overline{r}_2(t) = \overline{r}(t)$ deoarece $\overline{r}(t) \cdot \overline{r}(t) = ct.$ rezultă prin derivare

$$0 = 2\overline{r}(t) \cdot \overline{r}'(t)$$

adică (dacă niciunul din vectori nu e vectorul nul) că $\overline{r'}(t)$ este perpendicular pe $\overline{r}(t)$.

4.2 Geometria diferenţială a curbelor plane

4.2.1 Curbe plane: noţiuni generale, exemple.

Reamintim că o curbă plană poate fi dată parametric sub forma:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I \subseteq \mathbb{R} \tag{EPCP}$$

Vectorial:

$$\overline{r} = \overline{r}(t) = x(t)\,\overline{i} + y(t)\,\overline{j}, t \in I \subseteq \mathbb{R}$$

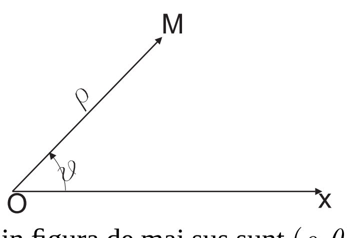
sau sub forma implicită:

$$F(x, y) = 0 \tag{EiCP}$$

sau sub forma explicită:

$$y = f(x) \text{ sau } x = g(y) \tag{EECP}$$

In plan se mai utilizează şi coordonatele polare, în care un punct M este determinat prin distanţa de la punct la un punct fixat O (originea) şi unghiul făcut de o axă fixă care trece prin O (axa polară) cu vectorul $\overrightarrow{OM}$:



Coordonatele polare ale punctului M din figura de mai sus sunt (ρ, θ) . Legătura dintre coordonatele polare şi cele carteziene este dată de:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \text{ respectiv } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sin\theta = \frac{y}{\rho}, \cos\theta = \frac{x}{\rho} \end{cases} \tag{4.2.1}$$

O curbă poate fi dată şi în coordonate polare, dând ρ în funcţie de θ :

$$\rho = \rho(\theta) \tag{ECPP}$$

Remarca 4.2.1 In anumite condiţii ecuaţiile unei curbe plane (parametrice, implicite, explicite, polare) sunt echivalente.

Exemplul 4.2.1 *Fie cercul de centru O şi rază R. Ecuaţiile parametrice sunt:*

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

ecuaţia implicită $x^2 + y^2 = R^2$, ecuaţiile explicite $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}, x \in [-R, R]$, iar ecuaţia în coordonate polare este $\rho = R$ (ct).

Remarca 4.2.2 O aceeaşi curbă admite mai multe parametrizări:

$$\begin{aligned} \overline{r} &= \overline{r}\,(t)\,, t \in I \subseteq \mathbb{R} \\ \overline{r} &= \overline{r}\,(t_1)\,, t_1 \in I_1 \subseteq \mathbb{R} \end{aligned}$$

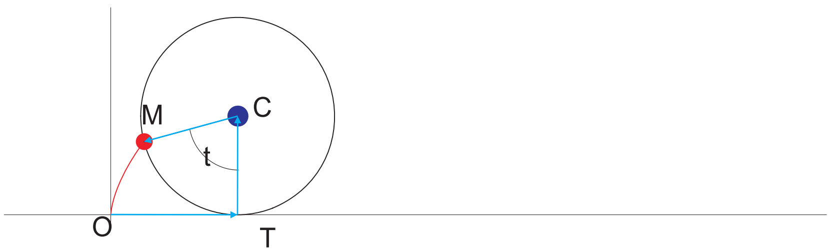
care sunt echivalente dacă:

$$t = t\,(t_1)\,, t_1 \in I_1$$

este o funcţie derivabilă, cu derivată continuă şi pozitivă pe I_1.

4.2.2 Câteva exemple de curbe plane

Exemplul 4.2.1 *Să se afle traiectoria descrisă de un cui intrat în anvelopa unei maşini aflată în mişcare rectilinie.*



Fie raza roţii a, şi alegem ca şi parametru unghiul t dintre MC şi CT unde este poziţia cuiului, C axul roţii iar T este punctul de contact dintre roată şi şosea.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CM}$$

unde:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OT} &= at\overline{i} \\ \overrightarrow{TC} &= a\overline{j} \\ \overrightarrow{CM} &= a\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)\overline{i} + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)\overline{j}\right) \end{aligned}$$

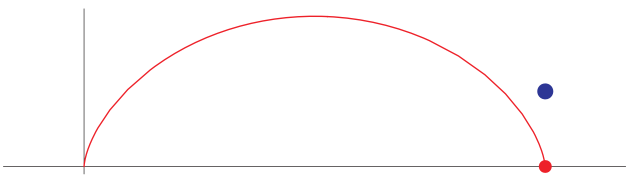
Rezultă:

$$\overrightarrow{OM} = a\,(t - \sin t)\,\overline{i} + a\,(1 - \cos t)\,\overline{j} = \overline{r}\,(t)$$

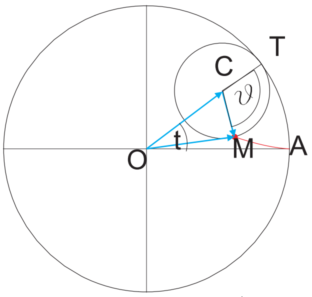
deci ecuaţiile parametrice ale curbei (numită cicloidă) sunt:

$$\begin{cases} x = a\,(t - \sin t) \\ y = a\,(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Graficul ei pentru $t \in [0, 2\pi]$ este:



Exemplul 4.2.2 *Să se afle ecuaţiile traiectoriei descrise de un cerc de rază r care se rostogoleşte fără alunecare în interiorul unui cerc de rază $R > r$.*



In figura de mai sus alegem parametru unghiul t făcut de $\overrightarrow{OC}$ (C este centrul cercului care se rostogoleşte) cu axa Ox. deoarece lungimile arcelor TM şi AT sunt egale avem:

$$\vartheta = \frac{R}{r}t$$

Deoarece

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} \\ OC &= (R-r)\left(\cos t\overline{i} + \sin t\overline{j}\right) \\ \overrightarrow{CM} &= r\left(\cos\left(2\pi - \vartheta + t\right)\overline{i} + \sin\left(2\pi - \vartheta + t\right)\overline{j}\right) \end{aligned}$$

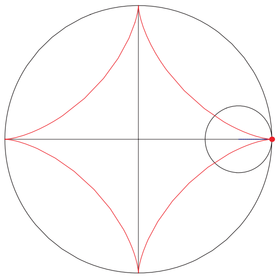
rezultă ecuaţiile parametrice ale hipocicloidei:

$$\begin{cases} x = (R-r)\cos t + r\cos\left(\frac{R}{r}t - t\right) \\ y = (R-r)\sin t - r\sin\left(\frac{R}{r}t - t\right) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Dacă $R = 4r$ curba se numeşte astroidă şi are ecuaţiile parametrice:

$$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, t \in [0, 2\pi]$$

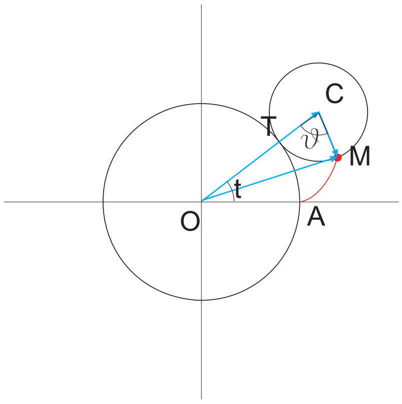
şi graficul:



Ecuaţia implicită a astroidei este:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Exemplul 4.2.3 *Să se afle ecuaţiile traiectoriei descrise de un cerc de rază r care se rostogoleşte fără alunecare în exteriorul unui cerc de rază R.*



caz particular $R = r$ cardioidă.

4.2.3 Tangenta şi normala la o curbă plană

Fie Γ o curbă plană dată parametric:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}$$

şi un punct $M(x(t), y(t))$ pe curbă.

Definitia 4.2.1 *Se numeşte tangentă la curba Γ în punctul M poziţia limită a dreptei determinată de punctele M şi M_1 de pe curbă când punctul M_1 tinde către M. (dacă această limită există).*

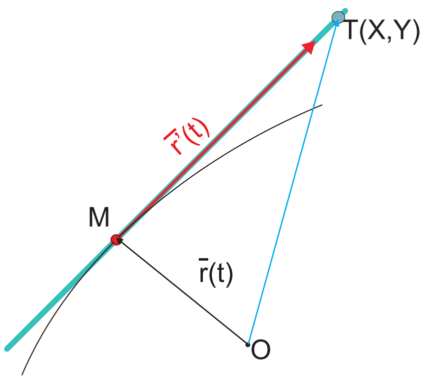
Teorema 4.2.1 *Dacă funcţiile x, y sunt derivabile în t şi*

$$x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$$

atunci ecuaţia tangentei la curbă este (coordonatele unui punct de pe tangentă la curbă fiind notate cu (X, Y)):

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} \tag{ETP}$$

Demonstraţie:



Conform definiţiei derivatei unui vector şi a tangentei, dacă T aparţine tangentei (vezi figura precedentă) atunci vectorii $\overrightarrow{MT}$ şi $\overline{r'}(t)$ sunt coliniari, deci coordonatele lor sunt proporţionale:

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)}$$

adică tocmai ecuaţia (ETP).

Remarca 4.2.3 Dacă curba este dată explicit, ecuaţia tangentei este:

$$\begin{aligned} Y - f(x) &= f'(x)(X - x) \\ y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

iar dacă curba este dată implicit (EiCP):

$$F_x'(x,y)(X-x)+F_y'(x,y)(Y-y)=0.$$

se foloseşte:

$$y'(x)=f'(x)=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$$

Exemplul 4.2.1 *Cercul:ec. parametrice:*

$$\begin{cases} x=a+R\cos t \\ y=b+R\sin t \end{cases}$$

ec. tang.:

$$\frac{X-a-R\cos t}{-R\sin t}=\frac{Y-b-R\sin t}{R\cos t}$$

Ec. explicită:

$$y=b+\sqrt{R^2-(x-a)^2}$$

ec. tg.:

$$Y-\left(b+\sqrt{R^2-(x-a)^2}\right)=\frac{-2(x-a)}{2\sqrt{R^2-(x-a)^2}}(X-x)$$

Ec. implicită:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

ec. tang.:

$$\begin{aligned} 2(x-a)(X-x)+2(y-b)(Y-y) &= 0 \\ (X-a)(x-a)+(Y-b)(y-b) &= R^2 \end{aligned}$$

Definitia 4.2.2 *Se numeşte normala la curba Γ în punctul $M\in\Gamma$ perpendiculara pe tangenta în M (prin punctul M).*

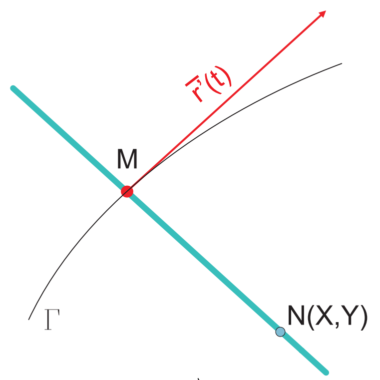
Teorema 4.2.2 *Dacă funcţiile x,y sunt derivabile în t şi*

$$x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$$

atunci ecuaţia normalei la curbă este (coordonatele unui punct de pe normala la curbă fiind notate cu (X,Y)):

$$x'(t)(X-x(t))+y'(t)(Y-y(t))=0. \tag{ENP}$$

Demonstraţie:



Dacă N este un punct pe normală atunci vectorul $\overrightarrow{MN}$ este perpendicular pe $\overline{r'}(t)$ deci

$$\overline{r'}(t)\cdot\overrightarrow{MN}=0$$

care transpusă analitic dă tocmai ecuaţia (ENP).

Remarca 4.2.4 Dacă curba Γ este dată explicit ecuaţia normalei este:

$$(X-x)+f'(x)(Y-f(x))=0$$

iar dacă e dată implicit ecuaţia normalei este::

$$\frac{X-x}{F'_x(x,y)}=\frac{Y-y}{F'_y(x,y)}.$$

Exemplul 4.2.2 *Fie cicloida:*

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases} t\in\mathbb{R}$$

Ecuaţiile tangentei, respectiv normalei sunt:

$$\frac{X-a(t-\sin t)}{a(1-\cos t)}=\frac{Y-a(1-\cos t)}{a\sin t}$$
$$a(1-\cos t)(X-a(t-\sin t))+a\sin t(Y-a(1-\cos t))=0$$

Exemplul 4.2.3 *Fie cercul:*

$$x^2+y^2=1$$

Ecuaţiile tangentei, respectiv normalei, într-un punct (x,y) de pe cerc sunt ($F(x,y)=x^2+y^2-1$):

$$2x(X-x)+2y(Y-y)=0$$
$$\frac{X-x}{2x}=\frac{Y-y}{2y}$$

Făcând calculele rezultă forma simplificată:

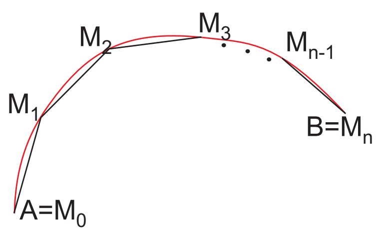
$$\begin{aligned} xX+yY &= 1 \\ xY-yX &= 0. \end{aligned}$$

4.2.4 Lungimea unui arc de curbă, parametrul natural al unei curbe

Fie curba Γ dată parametric:

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} t\in[a,b]$$

Ne propunem să definim lungimea acestei curbe, precum şi o formulă de calcul pentru lungime.



Pentru aceasta înscriem în curba Γ linia poligonală $M_0M_1...M_n$ (vezi figura precedentă).

Definitia 4.2.3 *Se numeşte lungimea curbei Γ limita lungimii liniei poligonale $M_0M_1...M_n$ când $n\to\infty$ şi lungimea celui mai mare segment de pe linia poligonală tinde la zero.*

Teorema 4.2.3 *Dacă funcţiile $x(t),y(t)$ au derivată continuă atunci curba Γ are lungime finită, dată de:*

$$l(\Gamma)=\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{dt} \tag{LC}$$

Demonstraţie: lungimea liniei poligonale $M_0M_1...M_n$ este dată de (t_i este valoarea parametrului t corespunzătoare punctului M_i):

$$\begin{aligned} l_n &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(x\left(t_i\right)-x\left(t_{i-1}\right)\right)^2+\left(y\left(t_i\right)-y\left(t_{i-1}\right)\right)^2} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(t_i-t_{i-1}\right)\sqrt{x'^2\left(\xi_i\right)+y'^2\left(\zeta_i\right)} = \sum \Delta t_i \sqrt{x'^2\left(\xi_i\right)+y'^2\left(\zeta_i\right)} \end{aligned}$$

unde $\xi_i, \zeta_i \in \left(t_{i-1}, t_i\right)$. Se demonstrează la analiză matematică că limita lui l_n când $n \to \infty$ şi $\max_{i=\overline{1,n}} \left|t_i - t_{i-1}\right| \to 0$ este tocmai integrala din partea dreaptă a egalităţii (LC).□

Definitia 4.2.4 *Se numeşte parametrul natural s al curbei Γ lungimea arcului de curbă AM, A fiind punctul de coordonate $\left(x\left(a\right), y\left(a\right)\right)$, iar M punctul de coordonate $\left(x\left(t\right), y\left(t\right)\right)$.*

Din teorema precedentă rezultă imediat:

Corolarul 4.2.1 *Parametrul natural al curbei este dat de:*

$$s = \int_a^t \sqrt{x'^2\left(\tau\right)+y'^2\left(\tau\right)}d\tau. \tag{4.2.2}$$

Exemplul 4.2.1 *Cercul:* $x\left(t\right) = R\cos t, y\left(t\right) = R\sin t, t \in \left[0, 2\pi\right].$

$x\prime\left(t\right) = -R\sin t, y'\left(t\right) = R\cos t.$ $x'^2\left(t\right)+y'^2\left(t\right) = R^2$. deci

$$s = \int_0^t Rdt = Rt.$$

Exemplul 4.2.2 *Să se calculeze lungimea cicloidei şi parametrul natural.*

$$\begin{aligned} x\left(t\right) &= a\left(t-\sin t\right), y\left(t\right) = a\left(1-\cos t\right). \\ x'^2\left(t\right)+y'^2\left(t\right) &= a^2\left(\left(1-\cos t\right)^2+\sin^2 t\right) = a^2\left(2-2\cos t\right) = 4a^2\sin^2\frac{t}{2}. \end{aligned}$$

Lungimea:

$$l = \int_0^{2\pi} 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt = 8a$$

parametrul natural:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t 2a\sin\frac{\tau}{2}d\tau = 4a\left(-\cos\frac{\tau}{2}\right)|_{\tau=0}^{\tau=t} = \\ &= 4a\left(1-\cos\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

Remarca 4.2.5 Dacă în loc de parametrul t se consideră ca şi parametru parametrul natural s se obţine o parametrizare echivalentă a curbei (vezi remark 4.2.2), numită parametrizarea naturală:

$$\overline{r}\left(s\right) = x\left(s\right)\overline{i}+y\left(s\right)\overline{j}, s \in \left[0, l\left(\Gamma\right)\right]. \tag{4.2.3}$$

Teorema 4.2.4 *Dacă curba Γ este parametrizată natural atunci:*

$$\left|\overline{r'}\left(s\right)\right| = 1. \tag{4.2.4}$$

($\overline{r'}\left(s\right)$ este versor).

Demonstraţie:

$$\begin{aligned}
\overline{r'}(s) &= x'(s)\,\overline{i} + y'(s)\,\overline{j} = \\
&= \frac{dt}{ds}x'(t)\,\overline{i} + \frac{dt}{ds}y'(t)\,\overline{j} = \\
&= \frac{x'(t)\,\overline{i} + y'(t)\,\overline{j}}{\frac{ds}{dt}} = \\
&= \frac{x'(t)\,\overline{i} + y'(t)\,\overline{j}}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}
\end{aligned}$$

de unde calculând modulul rezultă formula (4.2.4).

Din teorema precedentă şi corollary 4.5.2 rezultă:

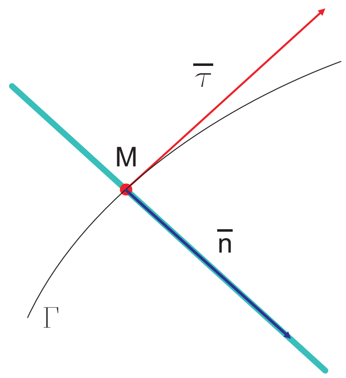
Corolarul 4.2.2 *Vectorul $\overline{r''}(s)$ este perpedicular pe $\overline{r'}(s)$.*

Din acest corolar şi definiţia normalei rezultă că vectorul $\overline{r''}(s)$ este pe normala la curbă.

Dacă notăm cu $\overline{\tau}$ şi $\overline{n}$ versorii tangentei la curbă teorema şi corollary precedent se pot scrie astfel:

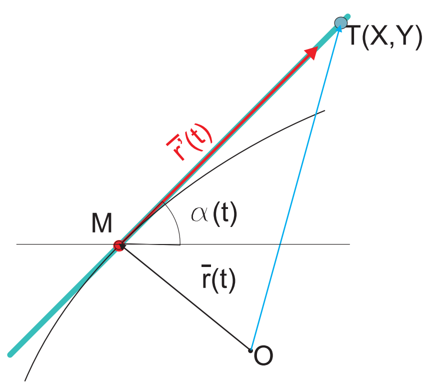
$$\begin{array}{l} \frac{d\overline{r}}{ds} = \overline{\tau} \\ \frac{d\overline{\tau}}{ds} = K\overline{n} \end{array} \tag{4.2.5}$$

unde K este funcţie de s care se va preciza.



4.2.5 Curbura unei curbe plane, ecuaţia intrinsecă a unei curbe plane

Fie Γ o curbă plană, $M(x(t), y(t))$ un punct de pe curbă, $\alpha(t)$ unghiul făcut de tangenta la curbă în punctul M cu axa Ox.



Definitia 4.2.5 *Se numeşte curbura curbei Γ în punctul M derivata unghiului α în raport cu parametrul*

natural al curbei:

$$K = \frac{d\alpha}{ds}. \tag{4.2.6}$$

Teorema 4.2.5 *Dacă curba Γ este dată parametric atunci:*

$$K = \frac{x'(t)\,y''(t) - x''(t)\,y'(t)}{\left(\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\right)^3} \tag{4.2.7}$$

Demonstraţie: Deoarece

$$\alpha(t) = \operatorname{arctg}\frac{y'(t)}{x'(t)}$$

avem:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{ds} &= \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \\ &= \frac{\frac{\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'}{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} = \\ &= \frac{x'(t)\,y''(t) - x''(t)\,y'(t)}{\left(\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\right)^3}.\end{aligned}$$

Remarca 4.2.6 Dacă curba Γ este dată explicit atunci curbura se calculează conform:

$$K = \frac{f''(x)}{\left(\sqrt{1 + f'^2(x)}\right)^3}$$

iar dacă este dată în coordonate polare:

$$K = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}.$$

Definitia 4.2.6 *Inversa curburii se numeşte raza de curbură.*

Definitia 4.2.7 *Se numeşte* ecuaţia intrinsecă *a unei curbe plane ecuaţia care defineşte curbura funcţie de s :*

$$K = K(s) \tag{EINCP}$$

Teorema 4.2.6 *O curbă plană este perfect determinată de ecuaţia ei intrinsecă.*

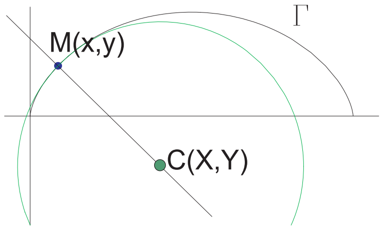
Demonstraţie: Din definiţia curburii rezultă:

$$\alpha(s) = \int K(s)\,ds$$

iar cu α astfel determinat, avem (de verificat):

$$\begin{cases} x(s) = \int \cos(\alpha(s))\,ds \\ y(s) = \int \sin(\alpha(s))\,ds \end{cases}.$$

Definitia 4.2.8 *Se numeşte* cerc osculator *la curba Γ în punctul M cercul care are centrul pe normala la curbă (în sensul determinat de versorul $\overline{n}$) şi raza egală cu raza de curbură.*



Teorema 4.2.7 *Centrul cercului osculator are coordonatele:*

$$\begin{array}{l} X = x\left(t\right) - y'\left(t\right)\frac{x'^2(t)+y'^2(t)}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)} \\ Y = y\left(t\right) + x'\left(t\right)\frac{x'^2(t)+y'^2(t)}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)} \end{array} \tag{4.2.8}$$

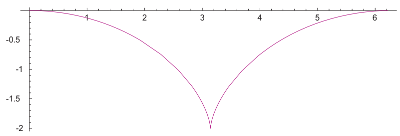
Definitia 4.2.9 *Se numeşte evoluta unei curbe plane locul geometric al centrelor de curbură (centrelor cercurilor osculatoare).*

Remarca 4.2.7 Ecuaţiile (4.2.8) reprezintă ecuaţiile parametrice ale evolutei.

Exemplul 4.2.1 *Evoluta cicloidei*

$$\left\{\begin{array}{l} x = (t - \sin t) \\ y = (1 - \cos t) \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$$

este curba din desenul de mai jos:



Remarca 4.2.8 Se poate demonstra că cercul osculator este poziţia limită a unui cerc care trece prin punctele M, M_1, M_2 de pe curbă când M_1 şi M_2 tind către M.

Definitia 4.2.10 *Se numeşte evolventa unei curbe* Γ *o curbă* Γ_1 *cu proprietatea că* Γ *este evoluta curbei* Γ_1.

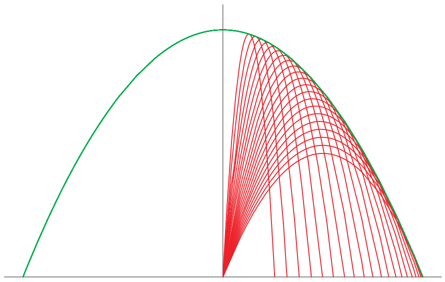
Exemplul 4.2.2 *(evolventa cercului) Un câine este legat cu lanţul de un par de rază* a. *Un copil enervează câinele şi începe să fugă în jurul parului cu câinele după el, lanţul înfăşurându-se în jurul parului, până când câinele dă cu capul de par. Se cere traiectoria câinelui şi lungimea ei, dacă lungimea iniţială a lanţului este* l.

4.2.6 Infăşurătoarea unei familii de curbe plane

Fie o familie de curbe plane care depind de un parametru p :

$$F\left(x, y, p\right) = 0 \tag{4.2.9}$$

Definitia 4.2.11 *Se numeşte înfăşurătoarea familiei de curbe (4.2.9) o curbă cu proprietatea că fiecare punct al ei se află pe una din curbele familiei şi are aceeaşi tangentă cu curba respectivă din familie.*



Teorema 4.2.8 *Punctele de pe înfăşurătoarea familiei (4.2.9) verifică sistemul:*

$$\left\{ \begin{array}{c} F(x,y,p)=0 \\ F'_p(x,y,p)=0 \end{array} \right. . \qquad (4.2.10)$$

Demonstraţie: Căutăm ecuaţia curbei sub forma:

$$F(x,y,p(x))=0$$

Panta tangentei la curbă pentru un x fixat este:

$$m=-\frac{F'_x(x,y,p)+F'_p(x,y,p)\,p'(x)}{F'_y(x,y,p)}$$

iar panta tangentei la curba din familie care trece prin acelaşi punct este:

$$m=-\frac{F'_x(x,y,p)}{F'_y(x,y,p)}$$

Egalând cele două fracţii rezultă că $F'_p(x,y,p)=0$, care împreună cu ecuaţia familie de curbe implică (4.2.10).

Exemplul 4.2.1 *Să se afle înfăşurătoarea traiectoriilor descrise de un proiectil care pleacă din origine cu viteza v_0 sub un unghi p faţă de orizontală, când p ia toate valorile posibile.*

Soluţie: Ec. traiectoriei:

$$\left\{ \begin{array}{c} x=tv_0\cos p \\ y=tv_0\sin p-g\frac{t^2}{2} \end{array} \right.$$

adică:

$$y-x\tan p+g\frac{x^2}{2v_0^2\cos^2 p}=0.$$

Derivând în raport cu p :

$$\begin{aligned} -x\frac{1}{\cos^2 p}+\frac{gx^2}{2v_0^2}\frac{-(-2\cos p\sin p)}{\cos^4 p} &= 0 \\ -1+\frac{gx\sin p}{v_0^2\cos p} &= 0 \\ \tan p &= \frac{v_0^2}{gx} \end{aligned}$$

înfăşurătoarea:

$$\left\{ \begin{array}{c} y-x\tan p+g\frac{x^2}{2v_0^2\cos^2 p}=0 \\ \tan p=\frac{v_0^2}{gx} \end{array} \right.$$

$$y-x\frac{v_0^2}{gx}+\frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1+\left(\frac{v_0^2}{gx}\right)^2\right)=0$$

: $\frac{1}{2gv_0^2}\left(g^2x^2+2ygv_0^2-v_0^4\right)=0$

Teorema 4.2.9 *Evoluta unei curbe este înfăşurătoarea familiei de normale la curbă.*

4.3 Generalităţi curbe strâmbe

Definitia 4.3.1 *Se numeşte curbă în spaţiu dată parametric mulţimea punctelor $M(x, y, z)$ din spaţiu a căror coordonate sunt date de*

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad t \in [a, b] \\ z = z(t) \end{cases} \tag{4.3.1}$$

funcţiile reale x, y, z fiind continue pe $[a, b]$.

Definitia 4.3.2 *Se numeşte curbă în spaţiu dată vectorial mulţimea punctelor $M(x, y, z)$ din spaţiu pentru care vectorul de poziţie $\overrightarrow{OM} = \overline{r}$ este dat de:*

$$\overline{r} = \overline{r(t)} = x(t)\,\overline{i} + y(t)\,\overline{j} + z(t)\,\overline{k},\ t \in [a, b]$$

Remarca 4.3.1 O curbă în spaţiu poate fi dată şi ca intersecţie de două suprafeţe, în anumite condiţii putându-se pune şi sub forma parametrică, ca în următorul exemplu:

Exemplul 4.3.2 *(curba lui VIVIANI) Fie curba obţinută din intersecţia unei sfere cu un cilindru circular drept care trece prin centrul sferei şi are raza jumătate raza sferei. Să aflăm ecuaţiile parametrice, considerând că sfera are centrul în origine, raza R iar cilindrul are generatoarele paralele cu Oz şi centrul în $(R/2, 0, 0)$.*

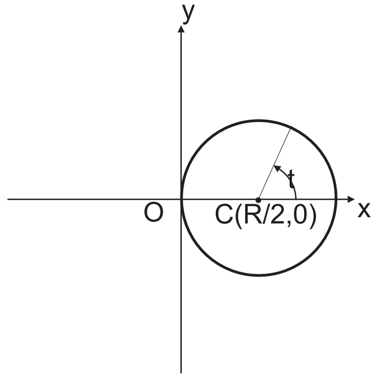
ecuaţia sferei este:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

iar a cilindrului:

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

Alegem ca şi parametru unghiul t in parametrizarea cercului după care cilindrul intersectează planul xOy:



$$x = \frac{R}{2}\cos t + \frac{R}{2}, y = \frac{R}{2}\sin t,\ t \in [0, 2\pi]$$

înlocuind în ecuaţia sferei obţinem:

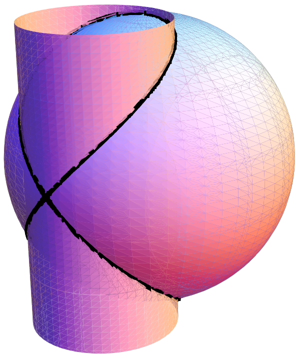
$$\left(\frac{R}{2}\cos t+\frac{R}{2}\right)^2+\left(\frac{R}{2}\sin t\right)^2+z^2=R^2$$

Făcând calculele rezultă:

$$z^2=\frac{R^2}{2}(1-\cos t)=R^2\sin^2\frac{t}{2}$$

deci curba VIVIANI are ecuaţiile parametrice:

$$x=\frac{R}{2}\cos t+\frac{R}{2}, y=\frac{R}{2}\sin t, z=\pm R\sin\frac{t}{2},\ t\in[0,2\pi]$$



Remarca 4.3.2 în cele ce urmează vom nota cu litere mici coordonatele unui punct de pe curbă şi cu litere mari coordonatele unui punct de pe planele sau dreptele ataşate curbei în punctul respectiv.

4.4 Tangenta şi planul normal la o curbă în spaţiu

Definiţia tangentei la o curbă în spaţiu este aceeaşi ca la o curbă plană:

Definitia 4.4.1 *Se numeşte tangentă la curba Γ în punctul M poziţia limită a dreptei determinată de punctele M şi M_1 de pe curbă când punctul M_1 tinde către M. (dacă această limită există).*

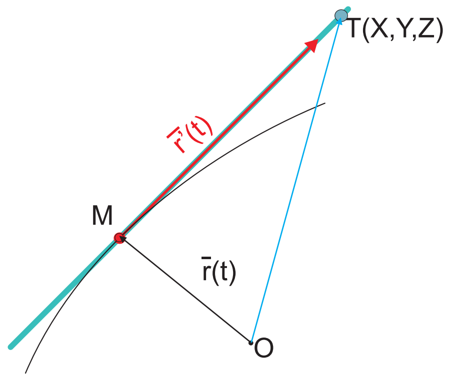
Teorema 4.4.1 *Dacă funcţiile x, y, z sunt derivabile în t şi*

$$x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)\neq 0$$

atunci ecuaţiile tangentei la curbă sunt (coordonatele unui punct de pe tangentă fiind notate cu (X, Y, Z)):

$$\frac{X-x(t)}{x'(t)}=\frac{Y-y(t)}{y'(t)}=\frac{Z-z(t)}{z'(t)} \tag{ETPS}$$

Demonstraţie:



Conform definiţiei derivatei unui vector şi a tangentei, dacă T aparţine tangentei (vezi figura precedentă) atunci vectorii $\overrightarrow{MT}$ şi $\overline{r'}(t)$ sunt coliniari, deci coordonatele lor sunt proporţionale:

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t)}{z'(t)}$$

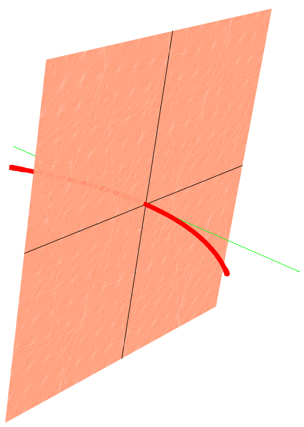
adică tocmai ecuaţia (ETPS).

Definitia 4.4.2 *Se numeşte* plan normal *la curba* Γ *în punctul* M *planul care trece prin* M *şi este perpendicular pe tangenta la* Γ *în* M.

Teorema 4.4.2 *Ecuaţia planului normal la curba* Γ *în punctul* M *este:*

$$x'(t)(X - x(t)) + y'(t)(Y - y(t)) + z'(t)(Z - z(t)) = 0.$$

Demonstraţie: Rezultă din definiţia planului normal şi ecuaţia planului determinat de un punct şi un vector perpendicular pe el.

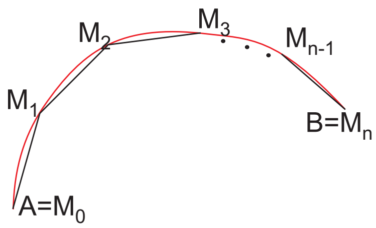


4.5 Lungimea unui arc de curbă, parametrul natural al unei curbe

Fie curba Γ dată parametric:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad t \in [a, b] \\ z = z(t) \end{cases}$$

Ne propunem să definim lungimea acestei curbe, precum şi o formulă de calcul pentru lungime.



Pentru aceasta înscriem în curba Γ linia poligonală $M_0M_1...M_n$ (vezi figura precedentă).

Definitia 4.5.1 *Se numeşte lungimea curbei Γ limita lungimii liniei poligonale $M_0M_1...M_n$ când $n \to \infty$ şi lungimea celui mai mare segment de pe linia poligonală tinde la zero.*

Teorema 4.5.1 *Dacă funcţiile $x(t), y(t), z(t)$ au derivată continuă atunci curba Γ are lungime finită, dată de:*

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\mathrm{dt} \tag{LCS}$$

Demonstraţie: lungimea liniei poligonale $M_0M_1...M_n$ este dată de (t_i este valoarea parametrului t corespunzătoare punctului M_i):

$$\begin{aligned} l_n &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\zeta_i) + z'^2(\theta_i)} \end{aligned}$$

unde $\xi_i, \zeta_i, \theta_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Se demonstrează la analiză matematică că limita lui l_n când $n \to \infty$ şi $\max_{i=\overline{1,n}} |t_i - t_{i-1}| \to 0$ este tocmai integrala din partea dreaptă a egalităţii (LCS).□

Definitia 4.5.2 *Se numeşte parametrul natural s al curbei Γ lungimea arcului de curbă AM, A fiind punctul de coordonate $(x(a), y(a), z(a))$, iar M punctul de coordonate $(x(t), y(t), z(t))$.*

Din theorem precedentă rezultă imediat:

Corolarul 4.5.1 *Parametrul natural al curbei este dat de:*

$$s = s(t) = \int_a^t \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau) + z'^2(\tau)}d\tau. \tag{4.5.1}$$

Remarca 4.5.1 Dacă în loc de parametrul t se consideră ca şi parametru parametrul natural s se obţine o parametrizare echivalentă a curbei (vezi remark 4.2.2), numită parametrizarea naturală:

$$\overline{r}(s) = x(s)\,\overline{i} + y(s)\,\overline{j} + z(s)\,\overline{k}, s \in [0, l(\Gamma)]\,. \tag{4.5.2}$$

Teorema 4.5.2 *Dacă curba Γ este parametrizată natural atunci:*

$$\left|\overline{r'}(s)\right| = 1. \tag{4.5.3}$$

Demonstraţie:

$$\begin{aligned}\overline{r'}(s) &= x'(s)\,\overline{i}+y'(s)\,\overline{j}+z'(s)\,\overline{k}= \\ &= \frac{dt}{ds}\frac{dx(t)}{dt}\overline{i}+\frac{dt}{ds}y'(t)\,\overline{j}+\frac{dt}{ds}z'(t)\,\overline{k}= \\ &= \frac{x'(t)\,\overline{i}+y'(t)\,\overline{j}+z'(t)\,\overline{k}}{\frac{ds}{dt}}= \\ &= \frac{x'(t)\,\overline{i}+y'(t)\,\overline{j}+z'(t)\,\overline{k}}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}\end{aligned}$$

de unde calculând modulul rezultă formula (4.5.3).

Din teorema precedentă şi corolarul 4.5.2 rezultă:

Corolarul 4.5.2 *Vectorul $\overline{r''}(s)$ este perpedicular pe $\overline{r'}(s)$.*

4.6 Reperul şi formulele lui Frenet

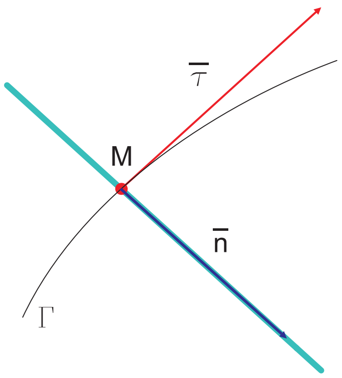
Din corolarul 4.5.2 rezultă, notând cu $\overline{\tau}=\overline{r'}(s)$ versorul tangentei şi cu $\overline{n}$ versorul lui $\overline{r''}(s)$, :

$$\frac{d\overline{\tau}}{ds}=K\overline{n} \tag{4.6.1}$$

unde K este funcţie de s care se va preciza.

Definitia 4.6.1 *Se numeşte* normala principală *la curba* Γ *în punctul* M *dreapta care trece prin* M *şi are ca vector director versorul* $\overline{n}$ *(versorul normalei principale).*

Definitia 4.6.2 *Se numeşte* curbura *curbei* Γ *în punctul* M *lungimea vectorului* $\frac{d\overline{\tau}}{ds}$ *(adică* K *din formula (4.6.1))*

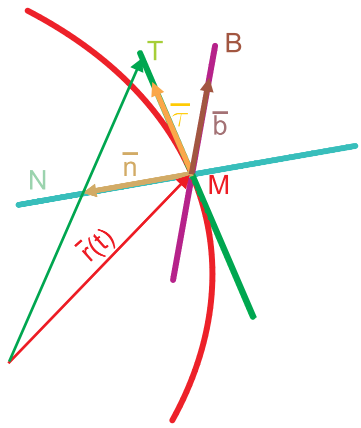


Definitia 4.6.3 *Se numeşte* versorul binormalei *la curba* Γ *în punctul* M *versorul* $\overline{b}$ *definit de:*

$$\overline{b}=\overline{\tau}\times\overline{n}$$

şi se numeşte binormala *la curba* Γ *în punctul* M *dreapta dreapta care trece prin* M *şi are ca vector director versorul* $\overline{b}$.

Definitia 4.6.4 *Se numeşte* reperul lui Frenet *la curba* Γ *în punctul* M *reperul* $\{M,\overline{\tau},\overline{n},\overline{b}\}$.



Reperul lui Frenet

Să calculăm acum derivatele versorilor reperului lui Frenet în raport cu parametrul natural al curbei Γ. Derivata lui $\overline{\tau}$ este(vezi 4.6.1):

$$\frac{d\overline{\tau}}{ds} = K\overline{n}$$

Derivata lui $\overline{b}$ este un vector perpendicular pe $\overline{b}$ şi:

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{b}}{ds} &= \frac{d\overline{\tau}}{ds} \times \overline{n} + \overline{\tau} \times \frac{d\overline{n}}{ds} = \\ &= K\overline{n} \times \overline{n} + \overline{\tau} \times \frac{d\overline{n}}{ds} = \\ &= \overline{\tau} \times \frac{d\overline{n}}{ds} \end{aligned}$$

deci $\frac{d\overline{b}}{ds}$ este perpendicular şi pe $\overline{\tau}$. Prin urmare $\frac{d\overline{b}}{ds}$ este coliniar cu $\overline{n}$ (a doua formulă a lui Frenet):

$$\frac{d\overline{b}}{ds} = -T\overline{n} \tag{4.6.2}$$

Definitia 4.6.5 *Se numeşte* torsiunea *curbei* Γ *în punctul* M *funcţia* T *de* s *definită de* (4.6.2).

Să calculăm acum $\frac{d\overline{n}}{ds}$. Deoarece

$$\overline{n} = \overline{b} \times \overline{\tau}$$

avem:

$$\begin{aligned} \frac{d\overline{n}}{ds} &= \frac{d\overline{b}}{ds} \times \overline{\tau} + \overline{b} \times \frac{d\overline{\tau}}{ds} = \\ &= -T\overline{n} \times \overline{\tau} + \overline{b} \times K\overline{n} = \\ &= T\overline{b} - K\overline{\tau}. \end{aligned}$$

Am obţinut astfel cea de a treia formulă a lui Frenet:

$$\frac{d\overline{n}}{ds} = -K\overline{\tau} + T\overline{b}. \tag{4.6.3}$$

Remarca 4.6.1 Cele trei formule a lui Frenet se pot reţine uşor sub forma unui tabel:

	$\overline{\tau}$	$\overline{n}$	$\overline{b}$
$\frac{d\overline{\tau}}{ds}$	0	K	0
$\frac{d\overline{n}}{ds}$	$-K$	0	T
$\frac{d\overline{b}}{ds}$	0	$-T$	0

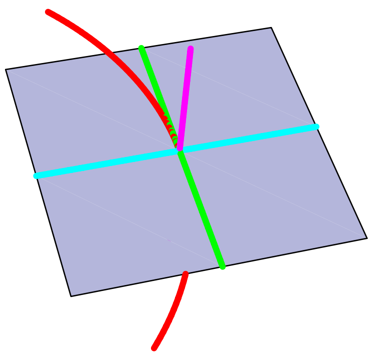
(4.6.4)

Exemplul 4.6.3 *Dacă* $\overline{r} = \overline{r}\,(t)$ *reprezintă legea de mişcare a unui punct material, atunci:*

$$\begin{aligned}
\overline{v}\,(t) &= \overline{r'}\,(t) = \frac{\frac{d\overline{r}}{ds}}{\frac{dt}{ds}} = \frac{ds}{dt}\overline{\tau} = v\overline{\tau} \\
\overline{a}\,(t) &= \overset{\bullet\bullet}{\overline{r}}\,(t) = \frac{d}{dt}\left(\overline{v}\,(t)\right) = \\
&= \frac{d}{dt}(v\overline{\tau}) = \frac{dv}{dt}\overline{\tau} + v\frac{d\overline{\tau}}{dt} = \\
&= \frac{dv}{dt}\overline{\tau} + v\frac{d\overline{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}\overline{\tau} + v^2K\overline{n} = \\
&= \frac{dv}{dt}\overline{\tau} + \frac{v^2}{R}\overline{n} = \overline{a}_t + \overline{a}_n
\end{aligned}$$

4.7 Triedrul lui Frenet

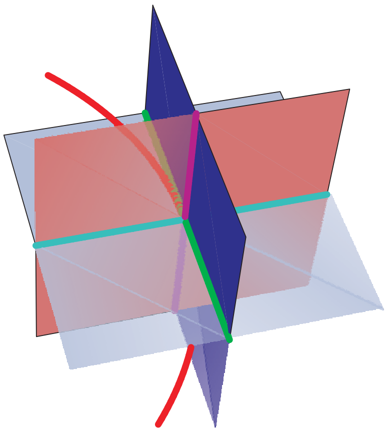
Definitia 4.7.1 *Se numeşte* plan osculator *la curba* Γ *în punctul* M *planul determinat de punctul* M *şi versorii* $\overline{\tau}$, $\overline{n}$.



Remarca 4.7.1 Se demonstrează că planul osculator este poziţia limită a unui plan care trece prin punctele M, M_1, M_2 când M_1, M_2 tind (pe Γ) către M.

Definitia 4.7.2 *Se numeşte* plan rectifiant *la curba* Γ *în punctul* M *planul determinat de punctul* M *şi versorii* $\overline{\tau}$, $\overline{b}$.

Definitia 4.7.3 *Se numeşte* triedrul lui Frenet *la curba* Γ *în punctul* M *triedrul format din planul osculator, planul normal şi planul rectifiant în punctul* M*, precum şi din dreptele de intersecţie ale acestor plane: binormala, tangenta, normala principală.*



Triedrul lui Frenet

Să presupunem acum că curba Γ este dată parametric:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad t \in [a,b] \\ z = z(t) \end{cases}$$

Ne propunem să aflăm ecuaţiile elementelor triedrului lui Frenet în funcţie de t.
Ecuaţiile tangentei şi planului normal sunt deja aflate.
Avem:

$$\begin{aligned} \overline{\tau} &= \frac{d\overline{r}}{ds} = \frac{\overline{r'(t)}}{\frac{ds}{dt}} \\ \frac{d\overline{\tau}}{ds} &= \frac{\left(\frac{\overline{r'(t)}}{\frac{ds}{dt}}\right)'_t}{\frac{ds}{dt}} = \\ &= \frac{\overline{r''(t)}\frac{ds}{dt} - \frac{d^2s}{dt^2}\overline{r'(t)}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3} = K\overline{n} \end{aligned}$$

Din ultima egalitate şi prima formulă a lui Frenet rezultă că $\overline{n}$ este coplanar cu $\overline{r''(t)}$ şi $\overline{r'(t)}$, deci planul osculator este planul determinat de M, $\overline{r''(t)}$ şi $\overline{r'(t)}$, prin urmare ecuaţia sa este:

$$\begin{vmatrix} X - x(t) & Y - y(t) & Z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0 \tag{EPLO}$$

Din ecuaţia precedentă rezultă ecuaţiile binormalei, ca dreaptă perpendiculară pe planul osculator:

$$\frac{X - x(t)}{\begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix}} = \frac{Y - y(t)}{\begin{vmatrix} z'(t) & x'(t) \\ z''(t) & x''(t) \end{vmatrix}} = \frac{Z - z(t)}{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}} \tag{EB}$$

Planul rectifiant are ca şi normală normala principală:

$$\overline{n} = \overline{b} \times \overline{\tau}$$

Din cele de mai sus rezultă că $\overline{n}$ este paralel cu

$$\begin{aligned} \left(\overline{r'(t)} \times \overline{r''(t)}\right) \times \overline{r'(t)} &= \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z'(t) & x'(t) \\ z''(t) & x''(t) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix} \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \end{vmatrix} = \\ &= A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k} \end{aligned}$$

Prin urmare ecuaţia planului rectifiant este:

$$A\left(X-x\left(t\right)\right)+B\left(Y-y\left(t\right)\right)+C\left(Z-z\left(t\right)\right)=0 \qquad \text{(EPR)}$$

iar ecuaţiile normalei principale sunt:

$$\frac{X-x\left(t\right)}{A}=\frac{Y-y\left(t\right)}{B}=\frac{Z-z\left(t\right)}{C} \qquad \text{(ENP)}$$

Exemplul 4.7.4 *Să se determine elementele triedrului lui Frenet pt curba:*

$$x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt, t\in\mathbb{R}$$

(elice circulara=arc)

$$\begin{aligned}
\overline{r}\left(t\right) &= a\cos t\overline{i}+a\sin t\overline{j}+bt\overline{k}\\
\overline{r'}\left(t\right) &= -a\sin t\overline{i}+a\cos t\overline{j}+b\overline{k}\\
\overline{r''}\left(t\right) &= -a\cos t\overline{i}-a\sin t\overline{j}
\end{aligned}$$

Ec. tangentei şi planului normal:

$$\begin{aligned}
\frac{X-a\cos t}{-a\sin t} &= \frac{Y-a\sin t}{a\cos t}=\frac{Z-bt}{b}\\
-a\sin t\left(X-a\cos t\right)+a\cos t\left(Y-a\sin t\right)+b\left(Z-bt\right) &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{r'}\left(t\right)\times\overline{r''}\left(t\right) &= \begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -a\sin t & a\cos t & b\\ -a\cos t & -a\sin t & 0\end{vmatrix}=\\
&= ab\sin t\overline{i}-ab\cos t\overline{j}+a^2\overline{k}
\end{aligned}$$

Deci ec. planului osculator şi ale binormalei sunt:

$$b\sin t\left(X-a\cos t\right)-b\cos t(Y-a\sin t)+a(Z-bt)=0$$

$$\frac{X-a\cos t}{b\sin t}=\frac{Y-a\sin t}{-b\cos t}=\frac{Z-bt}{a}$$

$$\begin{aligned}
\left(\overline{r'\left(t\right)}\times\overline{r''\left(t\right)}\right)\times\overline{r'\left(t\right)} &= a\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ b\sin t & -b\cos t & a\\ -a\sin t & a\cos t & 0\end{vmatrix}=\\
&= -a^2\cos t\overline{i}-a^2\sin t\overline{j}
\end{aligned}$$

Ec. plan rectifiant si normalei principale:

$$\begin{aligned}
-\cos t\left(X-a\cos t\right)-\sin t(Y-a\sin t) &= 0\\
\frac{X-a\cos t}{-\cos t} &= \frac{Y-a\sin t}{-\sin t}=\frac{Z-bt}{0}
\end{aligned}$$

lungimea unei spire:

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}dt=2\pi\sqrt{a^2+b^2}.$$

4.8 Calculul curburii şi torsiunii

Teorema 4.8.1 *Dacă curba* Γ *este dată vectorial:*

$$\overline{r\left(t\right)}=x\left(t\right)\overline{i}+y\left(t\right)\overline{j}+z\left(t\right)\overline{k},\ t\in[a,b]$$

atunci:

$$K=\frac{\left|\overline{r'(t)}\times\overline{r''(t)}\right|}{\left|\overline{r'(t)}\right|^{3}}$$

$$T=\frac{\left(\overline{r'(t)},\overline{r''(t)},\overline{r'''(t)}\right)}{\left|\overline{r'(t)}\times\overline{r''(t)}\right|^{2}}$$

Exemplul 4.8.5 *Să se calculeze curbura şi torsiune la elice.*

Avem

$$\begin{aligned}\overline{r}(t)&=a\cos t\overline{i}+a\sin t\overline{j}+bt\overline{k}\\ \overline{r'}(t)&=-a\sin t\overline{i}+a\cos t\overline{j}+b\overline{k}\\ \overline{r''}(t)&=-a\cos t\overline{i}-a\sin t\overline{j}\\ \overline{r'''}(t)&=a\sin t\overline{i}-a\cos t\overline{j}\end{aligned}$$

$$\left|\overline{r'}(t)\right|=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\begin{aligned}\left|\overline{r'(t)}\times\overline{r''(t)}\right|&=\left|ab\sin t\overline{i}-ab\cos t\overline{j}+a^2\overline{k}\right|=\\ &=\sqrt{a^2b^2\sin^2 t+a^2b^2\cos^2 t+a^4}=a\sqrt{a^2+b^2}\end{aligned}$$

deci:

$$K=\frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3}=\frac{a}{a^2+b^2}.$$

$$\begin{aligned}\left(\overline{r'(t)},\overline{r''(t)},\overline{r'''(t)}\right)&=\left(\overline{r'''(t)},\overline{r'(t)},\overline{r''(t)}\right)=\\ &=\overline{r'''(t)}\cdot\left(\overline{r'(t)}\times\overline{r''(t)}\right)=\\ &=\left(a\sin t\overline{i}-a\cos t\overline{j}\right)\cdot\left(ab\sin t\overline{i}-ab\cos t\overline{j}+a^2\overline{k}\right)=\\ &=a^2b\sin^2 t+a^2b\cos^2 t=a^2b\end{aligned}$$

deci:

$$T=\frac{a^2b}{\left(a\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}=\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Teorema 4.8.2 *Dacă curbura unei curbe este identic nulă, atunci curba este un segment dintr-o dreaptă.*

Teorema 4.8.3 *Dacă torsiunea unei curbe este identic nulă, atunci curba este o curbă plană, planul curbei fiind planul osculator în un punct arbitrar.*

Exemplul 4.8.6 *Să se dem. că curba Γ dată parametric de :*

$$x=a_xt^2+b_xt+c_x,y=a_yt^2+b_yt+c_y,z=a_zt^2+b_zt+c_z$$

unde $a_x,\ldots$ sunt constante este o curbă plană şi să se afle planul ei.

Soluţie: avem $\overline{r'}(t)=(2a_xt+b_x)\overline{i}+(2a_yt+b_y)\overline{j}+(2a_zt+b_z)\overline{k}$, $\overline{r''}(t)=(2a_x)\overline{i}+(2a_y)\overline{j}+(2a_z)\overline{k}$, $\overline{r'''}(t)=\overline{0}$ deci $T=0$. Planul curbei este planul osculator într-un punct arbitrar:

$$\begin{vmatrix}X-\left(a_xt^2+b_xt+c_x\right) & Y-\left(a_yt^2+b_yt+c_y\right) & Z-\left(a_zt^2+b_zt+c_z\right)\\ 2a_xt+b_x & 2a_yt+b_y & 2a_zt+b_z\\ 2a_x & 2a_y & 2a_z\end{vmatrix}=0$$

Făcând calculele obţinem:

$$\begin{gathered}(2a_z b_y - 2a_y b_z)\, X + (2a_x b_z - 2a_z b_x)\, Y + (2a_y b_x - 2a_x b_y)\, Z + \\ + (2a_x b_y c_z - 2a_x b_z c_y - 2a_y b_x c_z + 2a_y b_z c_x + 2a_z b_x c_y - 2a_z b_y c_x) = 0\end{gathered}$$

4.9 Geometria diferenţială a suprafeţelor

4.9.1 Generalităţi

Definitia 4.9.1 *Se numeşte suprafaţă dată parametric mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate sunt date de:*

$$\begin{cases} x = x\,(u,v) \\ y = y\,(u,v) \\ z = z\,(u,v) \end{cases} \tag{EPS}$$

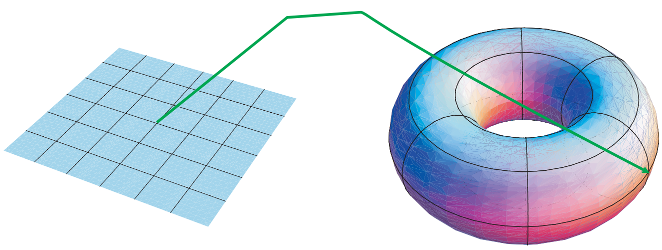
unde (u,v) *iau valori într-o mulţime plană* D.

Remarca 4.9.1 De fapt suprafaţa nu este altceva decât "deformarea" mulţimii plane D.

Exemplul 4.9.1 *Fie torul dat parametric:*

$$\begin{aligned} x &= (a + b\cos u)\cos v \\ y &= (a + b\cos u)\sin v \\ z &= b\sin u \end{aligned}$$

,$(u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]$.



Remarca 4.9.2 Ecuaţiile (EPS) se pot scrie şi vectorial, notând cu $\overline{r}$ vectorul de poziţie al unui punct de pe suprafaţă:

$$\begin{aligned} \overline{r} &= \overline{r}\,(u,v) = \\ &= x\,(u,v)\,\overline{i} + y\,(u,v)\,\overline{j} + z\,(u,v)\,\overline{k} \end{aligned} \tag{4.9.1}$$

Definitia 4.9.2 *Se numeşte suprafaţă dată explicit mulţimea punctelor din spaţiu a căror coordonate sunt date de:*

$$z = f\,(x,y) \tag{EES}$$

unde (x,y) *iau valori într-o mulţime plană* D.

Definitia 4.9.3 *Se numeşte suprafaţă dată implicit mulţimea punctelor din spaţiu a căror coordonate verifică:*

$$F(x,y,z)=0 \tag{EIS}$$

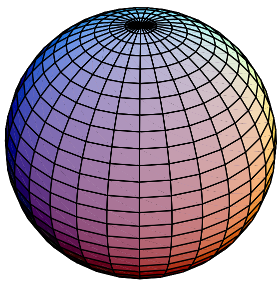
Exemplul 4.9.2 *Sfera cu centrul în origine şi de rază R poate fi dată:*

$$\begin{aligned}
\textit{implicit} &: \quad x^2+y^2+z^2=R^2\\
\textit{explicit} &: \quad z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}\\
\textit{parametric} &: \quad x=R\cos u\sin v, y=R\sin u\sin v, z=R\cos v,\\
u &\in \quad [0,2\pi], v\in[0,\pi].
\end{aligned}$$

Definitia 4.9.4 *Se numeşte curbă pe o suprafaţă dată parametric mulţimea punctelor de pe suprafaţă pentru care:*

$$\begin{aligned}
u &= \phi(v) \text{ sau } v=\psi(u) \text{ sau } h(u,v)=0\\
&\quad \text{sau } u,v \text{ sunt funcţii de un parametru } t.
\end{aligned}$$

Exemplul 4.9.3 *Curbele de coordonate: curba de coordonată v : $u=u_0$(constant), curba de coordonată u : $v=v_0$(constant). Pe sferă acestea sunt "paralelele" şi "meridianele":*



4.10 Plan tangent şi normala la o suprafaţă

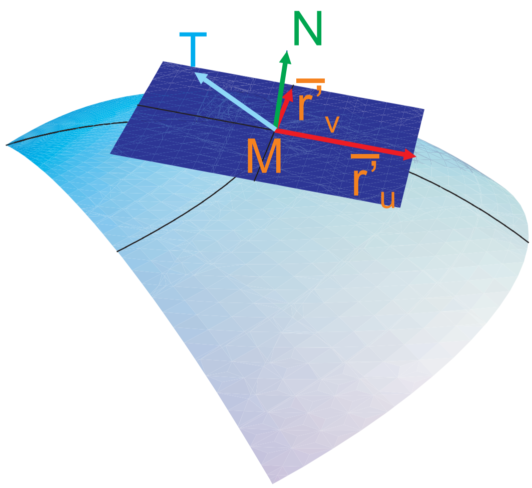


Figura precedentă

Fie o suprafaţă dată vectorial, M un punct pe suprafaţă, $\overline{r}'_u, \overline{r}'_v$.derivatele parţiale ale vectorului de poziţie al punctului M.

Teorema 4.10.1 *Tangenta la orice curbă de pe suprafaţă care trece prin M este coplanară cu $\overline{r}'_u, \overline{r}'_v$.*

Demonstraţie: Dacă curba este dată $u = \phi(v)$ atunci tangenta la curbă are vector director $\overline{r}'_u \phi'(v) + \overline{r}'_v$.□

Definitia 4.10.1 *Se numeşte plan tangent la suprafaţă în punctul M planul format din toate tangentele la curbe de pe suprafaţa care trec prin M.*

Definitia 4.10.2 *Se numeşte normală la suprafaţă în punctul M normala la planul tangent la suprafaţă în punctul M.*

Teorema 4.10.2 *Ecuaţia planului tangent la suprafaţă în punctul M este:*

$$\begin{vmatrix} X - x(u,v) & Y - y(u,v) & Z - z(u,v) \\ x'_u(u,v) & y'_u(u,v) & z'_u(u,v) \\ x'_v(u,v) & y'_y(u,v) & z'_v(u,v) \end{vmatrix} = 0 \tag{EPTS}$$

iar ecuaţiile normalei la suprafaţă sunt:

$$\frac{X - x(u,v)}{\begin{vmatrix} y'_u(u,v) & z'_u(u,v) \\ y'_y(u,v) & z'_v(u,v) \end{vmatrix}} = \frac{Y - y(u,v)}{\begin{vmatrix} z'_u(u,v) & x'_u(u,v) \\ z'_v(u,v) & x'_v(u,v) \end{vmatrix}} = \frac{Z - z(u,v)}{\begin{vmatrix} x'_u(u,v) & y'_u(u,v) \\ x'_v(u,v) & y'_y(u,v) \end{vmatrix}}. \tag{ENS}$$

Demonstraţie: (vezi şi figura precedentă) Conform definiţiei (4.10.1) şi teoremei (4.10.1) planul tangent este determinat de punctul M şi vectorii $\overline{r}'_u, \overline{r}'_v$. Notând cu (X, Y, Z) coordonatele punctului T din planul tangent rezultă ecuaţia (EPTS). Analog, cu (X, Y, Z) coordonatele punctului N de pe normală şi ţinând cont că vectorul director al normalei este $\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v$,

$$\overline{r}'_u \times \overline{r}'_v = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x'_u(u,v) & y'_u(u,v) & z'_u(u,v) \\ x'_v(u,v) & y'_v(u,v) & z'_v(u,v) \end{vmatrix} \tag{4.10.1}$$

rezultă (ENS).□

Remarca 4.10.1 Considerăm numai suprafeţe cu "2 feţe", adică în fiecare punct de pe suprafaţă normala dată de (normala) este unic determinată ca sens.

Remarca 4.10.2 Dacă suprafaţa este dată explicit (EES) atunci, folosind notaţiile lui Monge:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

ecuaţia planului tangent devine:

$$p\,(X-x)+q\,(Y-y)-(Z-f\,(x,y))=0,$$

iar ecuaţiile normalei:

$$\frac{X-x}{p}=\frac{Y-y}{q}=\frac{Z-f\,(x,y)}{-1}.$$

Fie sfera dată

$$\text{parametric:}\quad x=R\cos u\sin v, y=R\sin u\sin v, z=R\cos v,$$
$$u \in [0,2\pi]\,, v\in[0,\pi]\,.$$

Atunci ecuaţia planului tangent într-un punct arbitrar este:

$$\begin{vmatrix} X-R\cos u\sin v & Y-R\sin u\sin v & Z-R\cos v \\ -R\sin u\sin v & R\cos u\sin v & 0 \\ R\cos u\cos v & R\sin u\cos v & -R\sin v \end{vmatrix}=0$$

iar ecuaţiile normalei sunt:

$$\frac{X-R\cos u\sin v}{\begin{vmatrix} R\cos u\sin v & 0 \\ R\sin u\cos v & -R\sin v\end{vmatrix}}=\frac{Y-R\sin u\sin v}{\begin{vmatrix} 0 & -R\sin u\sin v \\ -R\sin v & R\cos u\cos v\end{vmatrix}}=\frac{Z-R\cos v}{\begin{vmatrix} -R\sin u\sin v & R\cos u\sin v \\ R\cos u\cos v & R\sin u\cos v\end{vmatrix}}$$

Dacă considerăm ecuaţia explicită:

$$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

atunci

$$p=\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}},q=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

şi ecuaţia planului tangent în punctul $\left(x,y,\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)$va fi:

$$\begin{aligned}\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,(X-x)+\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,(Y-y)-\left(Z-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right) &= 0\\ xX+yY+zZ &= R^2\end{aligned}$$

iar ecuaţiile normalei în acelaşi punct:

$$\frac{X-x}{\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}}=\frac{Y-y}{\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}}=\frac{Z-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}{-1}.$$

Remarca 4.10.3 Dacă suprafaţa este dată implicit:

$$F\,(x,y,z)=0$$

din TFI

$$\begin{aligned}p &= \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\\ q &= \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\end{aligned}$$

inlocuite în

$$p\,(X-x)+q\,(Y-y)-(Z-f\,(x,y))=0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}\,(X-x)+\frac{\partial F}{\partial y}\,(Y-y)+\frac{\partial F}{\partial z}\,(Z-z)=0$$

Exemplul 4.10.4 *Pt. sferă*

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x,\frac{\partial F}{\partial y}=2y,\frac{\partial F}{\partial z}=2z$$

ec. plan tangent:

$$\begin{aligned} 2x\left(X-x\right)+2y\left(Y-y\right)+2z(Z-z) &= 0 \\ xX+yY+zZ-R^2 &= 0 \end{aligned}$$

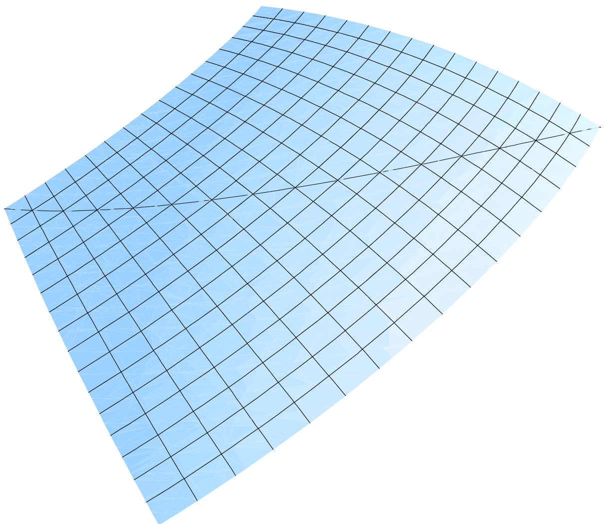
Exemplul 4.10.5 *Plan tangent la H1:*

$$x^2+y^2-z^2-1=0$$

este

$$xX+yY-zZ-1=0$$

4.11 Lungimea unei curbe pe o suprafaţă



Se ştie

$$ds=r'\left(t\right)dt=\sqrt{\overline{r'}\left(t\right)\overline{r'}\left(t\right)}dt$$

$$\overline{r}\left(t\right)=\overline{r}\left(u\left(t\right),v\left(t\right)\right)$$

$$\overline{r'}\left(t\right)=\overline{r'_u}\left(u\left(t\right),v\left(t\right)\right)u'\left(t\right)+\overline{r'_v}\left(u\left(t\right),v\left(t\right)\right)v'\left(t\right)$$

deci:

$$\begin{aligned} \overline{r'}\left(t\right)\overline{r'}\left(t\right) &= \left(\overline{r'_u}u'\left(t\right)+\overline{r'_v}v'\left(t\right)\right)\left(\overline{r'_u}u'\left(t\right)+\overline{r'_v}v'\left(t\right)\right)= \\ &= \overline{r'_u r'_u}u'\left(t\right)^2+2\overline{r'_u r'_v}u'\left(t\right)v'\left(t\right)+\overline{r'_v r'_v}v'\left(t\right)^2 \end{aligned}$$

rezultă (ţinând cont că $u'\left(t\right)dt=du$):

$$\begin{aligned} ds^2 &= \overline{r'_u r'_u}du^2+2\overline{r'_u r'_v}dudv+\overline{r'_v r'_v}dv^2= \\ &= Edu^2+2Fdudv+Gdv^2 \end{aligned} \tag{4.11.1}$$

unde:

$$\begin{aligned} E &= \left(x'_u\right)^2+\left(y'_u\right)^2+\left(z'_u\right)^2 \\ F &= x'_u x'_v+y'_u y'_v+z'_u z'_v \\ G &= \left(x'_v\right)^2+\left(y'_v\right)^2+\left(z'_v\right)^2 \end{aligned}$$

Lungimea unei curbe Γ pe suprafaţă va fi:

$$l(\Gamma) = \int_{\Gamma} ds$$

Remarca 4.11.1 Formula (4.11.1) poartă denumirea de prima formă pătratică a unei suprafeţe.

Exemplu: Să se calculeze lungimea unui meridian pe sfera de rază R. Ec. par. $x = R\cos u \sin v, y = R\sin u \sin v, z = R\cos v$. pt. un meridian avem $u = ct., v \in [0, \pi]$.

$$\begin{aligned}
x'_u &= -R\sin u \sin v, y'_u = R\cos u \sin v, z'_u = 0 \\
x'_v &= R\cos u \cos v, y'_v = R\sin u \cos v, z'_v = -R\sin v \\
E &= (-R\sin u \sin v)^2 + (R\cos u \sin v)^2 + 0^2 = R^2 \sin^2 v \\
F &= .. = 0 \\
G &= (R\cos u \cos v)^2 + (R\sin u \cos v)^2 + (-R\sin v)^2 = R^2
\end{aligned}$$

$u = ct.$ atunci $du = 0$

$$\begin{aligned}
l(\Gamma) &= \int_{\Gamma} ds = \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 v \cdot 0^2 + R^2 dv^2} = \int_0^{\pi} R dv = R\pi
\end{aligned}$$

Dacă se calculează lungimea unei "paralele" $v = v_0$ atunci se obţine $l = 2\pi R \sin v_0$.

4.12 Unghiul a două curbe situate pe o suprafaţă

Pe suprafaţă avem două curbe Γ_1 şi Γ_2 care se intersectează în M. Dacă notăm diferenţialele lui u, v pe Γ_1 cu du, dv şi diferenţialele pe Γ_2 cu $\delta u, \delta v$ atunci unghiul curbelor va fi dat de:

$$\cos\alpha = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u d\delta + G\delta v^2}} \tag{4.12.1}$$

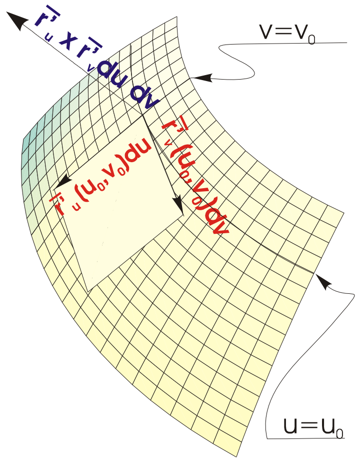
unde E, F, G se calculează în punctul M. Dacă curbele sunt curbe de coordonate atunci $dv = 0, \delta u = 0$ şi unghiul va fi

$$\cos\alpha = \frac{Fdu\delta v}{\sqrt{E}du\sqrt{G}\delta v} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

acest unghi este $\pi/2$ dacă şi numai dacă $F = 0$.

4.13 Elementul de arie al unei suprafeţe

Definitia 4.13.1 *Se numeşte elementul de arie al unei suprafeţe aria (notată $d\sigma$) paralelogramului construit pe vectorii $\overline{r'_u}du, \overline{r'_v}dv$.*



Teorema 4.13.1 *Elementul de arie este:*

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left|\overline{r'_u} \times \overline{r'_v}\right| dudv = \\ &= \sqrt{EG - F^2} dudv \end{aligned}$$

Aria suprafeţei va fi:

$$A = \int_S d\sigma = \int \int_D \sqrt{EG - F^2} dudv$$

Exemplul 4.13.6 *Aria sferei, care e dată parametric:* $x = R \cos u \sin v, y = R \sin u \sin v, z = R \cos v.$

$, u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi]. E = R^2 \sin^2 v, G = R^2, F = 0.$ Aria:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{R^4 \sin^2 v} du \right) dv &= R^2 \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi} \sin v dv = \\ &= R^2 2\pi \left(-\cos v \right) |_0^{\pi} = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

Exemplul 4.13.7 *Aria torului:*

$$\begin{aligned} x &= (a + b \cos u) \cos v \\ y &= (a + b \cos u) \sin v \\ z &= b \sin u \end{aligned}$$

$,(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. *Avem:*

$$\begin{aligned} E &= x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 = \\ &= (-b \sin u \cos v)^2 + (-b \sin u \sin v)^2 + (b \cos u)^2 = \\ &= b^2 \\ G &= x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2 = (-(a + b \cos u) \sin v)^2 + ((a + b \cos u) \cos v)^2 = \\ &= (a + b \cos u)^2 \\ F &= (-b \sin u \cos v)(-(a + b \cos u) \sin v) + (-b \sin u \sin v)((a + b \cos u) \cos v) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

aria torului va fi:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} b\left(a+b\cos u\right)du\right)dv &= \\ &= 2\pi b\int_0^{2\pi}\left(a+b\cos u\right)du = \\ &= 2\pi b\left(au+b\sin u\right)\Big|_0^{2\pi} = \\ &= 2b\pi 2a\pi = 4\pi^2 ab.\end{aligned}$$

Exemplul 4.13.8 *Să se calculeze el. de arc şi de arie pentru suprafaţa pseudosfera):*

$$\begin{aligned} x &= a\sin u\cos v \\ y &= a\sin u\sin v \\ z &= a\left(\ln\tan\frac{u}{2}+\cos u\right)\end{aligned}$$

Formulele:

$$ds^2 = \left(x'_u x'_u + y'_u y'_u + z'_u z'_u\right)du^2 + 2\left(x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v\right)dudv + + \left(x'_v x'_v + y'_v y'_v + z'_v z'_v\right)dv^2 =$$

$$= \left(a^2\cos^2 u\cos^2 v + a^2\cos^2 u\sin^2 v + a^2\left(1/2\tfrac{1}{\tan\frac{u}{2}}\tfrac{1}{\cos^2\frac{u}{2}} - \sin u\right)^2\right)du^2 +$$

$$+2\left(-a^2\cos u\cos v\sin u\sin v + a^2\cos u\sin v\sin u\cos v + 0\right)dudv + \left(a^2\sin^2 u\sin^2 v + a^2\sin^2 u\cos^2 v\right)dv^2 =$$

$$= \left(a^2\cos^2 u + a^2\left(\tfrac{1}{\sin u} - \sin u\right)^2\right)du^2 + a^2\sin^2 u dv^2 =$$

$$= a^2\left(\cos^2 u + \tfrac{\cos^4 u}{\sin^2 u}\right)du^2 + a^2\sin^2 u dv^2 = a^2\tfrac{\cos^2 u}{\sin^2 u}du^2 + a^2\sin^2 u dv^2$$

deci:

$$\begin{aligned} ds^2 &= a^2\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}du^2 + a^2\sin^2 u dv^2 \\ \textit{adică} &: \quad E = a^2\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}, F = 0, G = a^2\sin^2 u\end{aligned}$$

elementul de arie:

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}dudv = a^2\left|\cos u\right| dudv$$

Exemplul 4.13.9 *Folosind cele calculate să se afle unghiurile dintre curbele:*

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &: \quad v = \ln\tan\frac{u}{2} \\ \Gamma_2 &: \quad v = -\ln\tan\frac{u}{2}\end{aligned}$$

din ec. date rezultă:$\ln\tan\frac{u}{2} = 0$ *de unde* $\tan\frac{u}{2} = 1$ *adică* $\frac{u}{2} = \frac{\pi}{4}$ *adică* $u = \frac{\pi}{2}$ *şi* $v = 0$. *Formula pt. unghi:*

$\cos\alpha = \dfrac{Edu\delta u + F\left(du\delta v + \delta u dv\right) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u d\delta + G\delta v^2}}$ unde E, F, G sunt calculate pentru $u = \frac{\pi}{2}$ şi $v = 0$ $\left(E = 0, F = 0, G = a^2\right)$ iar pentru prima curbă $dv = \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}du$, iar pentru a doua $\delta v = -\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2}}\delta u$ de unde

$$\cos\alpha = \frac{a^2 du\left(-\delta u\right)}{\sqrt{a^2 du^2}\sqrt{a^2\left(-\delta u\right)^2}} = -1$$
$$\alpha = \pi$$

Să se calculeze lungimea unei "bucăţi" din Γ_1 pentru $u \in [u_1, u_2]$.

$$\begin{aligned}
l(\Gamma_1) &= \int_{u_1}^{u_2} ds = \\
&= \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{a^2 \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u} du^2 + a^2 \sin^2 u \frac{du^2}{\sin^2 u}} = \\
&= \int_{u_1}^{u_2} a \sqrt{\frac{\cos^2 u}{\sin^2 u} + 1} du = a \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{\sin u} du = \\
&= a \ln \tan \frac{u}{2} |_{u_1}^{u_2} = a \ln \frac{\tan \frac{u_2}{2}}{\tan \frac{u_1}{2}}.
\end{aligned}$$

BIBLIOGRAFIE

[1] NĂSTĂSESCU, *Algebră cl.XI-a*,E.D.P., 1996.
[2] NĂSTĂSESCU, *Algebră cl. XII-a*, E.D.P., 1997
[3] MALIŢA,MIRCEA, ZIDĂROIU, *Matematica organizării*, Ed. . Bucureşti 1979
[4] RUSU, EUGEN , *Vectori*, E,.D.P Bucureşti 198x.