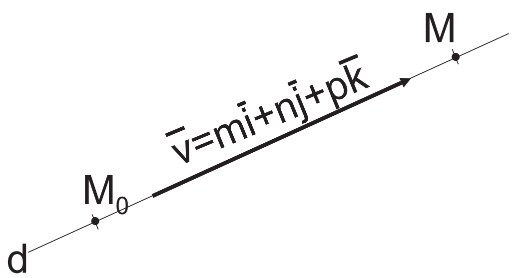
2.3.2 Dreapta în spaţiu

Dreapta determinată de un punct şi un vector paralel cu ea

Fie o dreaptă d determinată de un punct M_0 şi un vector $\overline{v} = m\overline{i} + n\overline{j} + p\overline{k}$ -numit vector director al dreptei-(o "direcţie") paralel cu ea, conform figurii:



Dacă M este un punct arbitrar pe dreaptă, acest lucru este echivalent cu (vezi remarca 2.2.1):

$$\overrightarrow{MM_0} = t\overline{v},\ t \in \mathbb{R}$$

Considerând că M are coordonatele (x, y, z) iar M_0 are coordonatele (x_0, y_0, z_0), egalitatea de mai sus devine:

$$(x - x_0)\,\overline{i} + (y - y_0)\,\overline{j} + (z - z_0)\,\overline{k} = t\left(m\overline{i} + n\overline{j} + p\overline{k}\right).$$

Egalând coordonatele vectorilor din egalitatea vectorială rezultă:

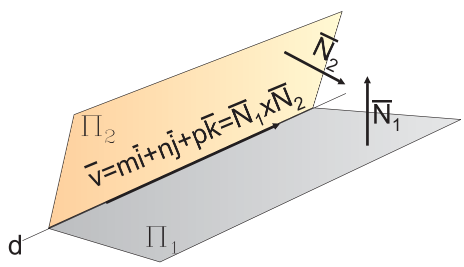
$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \qquad \text{(EPD)}$$

Ecuaţiile de mai sus poartă numele de ecuaţii parametrice ale unei drepte în spaţiu. Dacă rezolvăm fiecare ecuaţie în din (EPD) în raport cu t şi egalăm rapoartele astfel obţinute rezultă ecuaţiile canonice ale unei drepte în spaţiu:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \qquad \text{(ECD)}$$

Remarca 2.3.6 Ecuaţiile parametrice ale unei drepte se pot interpreta ca legea de mişcare a unui punct material care pleacă din M_0 şi se deplasează cu viteza constantă $\overline{v}$.

Dreapta ca intersecţie de două plane neparalele



Fie dreapta $d = \Pi_1 \cap \Pi_2$, conform figurii de mai sus. Dacă ecuaţiile celor două plane sunt:

$$\Pi_1 \quad : \qquad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$\Pi_2 \quad : \qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

atunci coordonatele oricărui punct de pe dreaptă verifică sistemul:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{(EDDP)}$$

Ne propunem să deducem din ecuaţiile de mai sus ecuaţiile canonice ale dreptei. Pentru aceasta să observăm că vecor director al dreptei se poate produsul vectorial al normalelor la cele două plane, deoarece este un vector în ambele plane, deci perpendicular pe ambele normale:

$$\overline{v} = \overline{N_1} \times \overline{N_2} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \overline{i} + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \overline{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \overline{k}$$

(am folosit expresia analitică a produsului vecorial (2.2.8)). Punctul M_0 de pe dreaptă îl alegem ca având coordonatele o soluţie oarecare a sistemului (EDDP). Atunci ecuaţiile canonice ale dreptei determinate de două plane sunt:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

Exemplul 2.1 *Să se scrie ecuaţiile canonice ale axei Ox ştiind că ea e intersecţia planelor xOy şi xOz. Ecuaţia planului xOy este $z = 0$ iar ecuaţia planului xOz este $y = 0$, deci ecuaţiile axei Ox sunt:*

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ecuaţile canonice ale axei Ox vor fi:

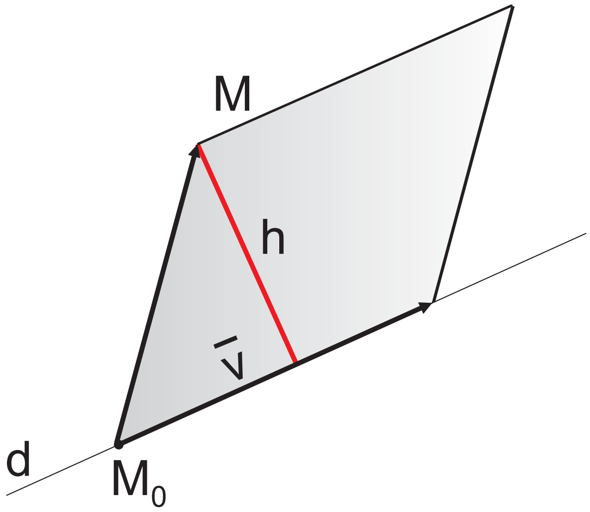
$$\frac{x - 0}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{y - 0}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{z - 0}{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

sau făcând calculele:

$$\frac{x}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}.$$

Distanţa de la un punct la o dreaptă

Fie punctul $M\left(x_1, y_1, z_1\right)$ şi dreapta d de ecuaţii canonice (ECD). Distanţa de la punctul dat la dreaptă este egală cu înălţimea h a paralelogramului construit pe vectorii $\overline{v}$ şi $\overrightarrow{M_0M}$, conform figurii de mai jos:



Folosind operaţiile cu vectori rezultă:

$$\begin{aligned} h &= \frac{\left|\overline{v} \times \overrightarrow{M_0M}\right|}{v} = \\ &= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} n & p \\ y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p & m \\ z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m & n \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \end{aligned}$$

Remarca 2.3.7 Distanţa de la un punct la o dreaptă se poate afla şi ca minimul distanţelor de la punctul dat la un punct care parcurge dreapta, în acest caz folosindu-se ecuaţiile parametrice ale dreptei şi caculând minimul unei funcţii de grad 2.

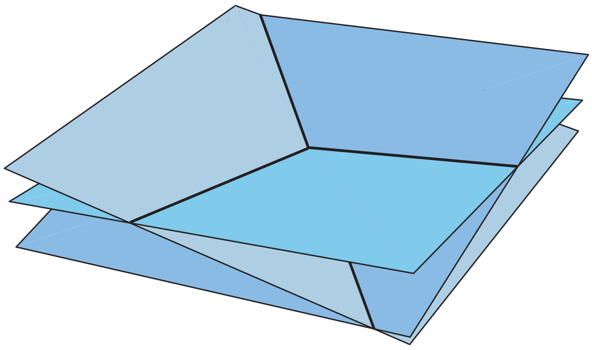
Poziţia relativă a trei plane

Fie planele Π_i $i = \overline{1,3}$ trei plane. A stabili poziţia lor relativă înseamnă a determina punctele comune. Din punct de vedere algebric aceasta este echivalent cu discuţia sistemului format cu ecuaţiile celor trei plane:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = -D_3 \end{cases} \tag{STrei}$$

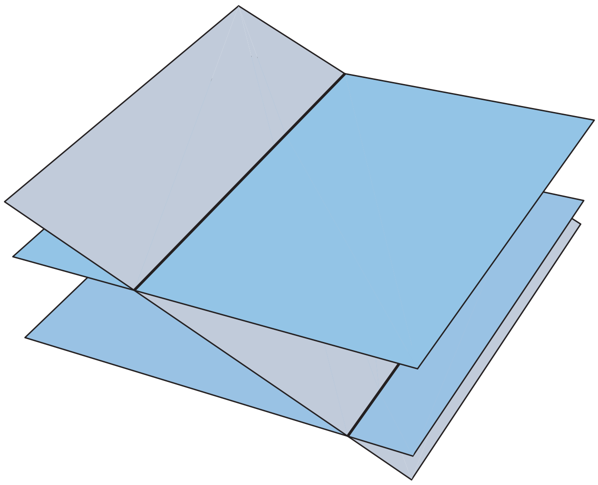
Discuţia sistemului este următoarea:

1. *Sistemul (STrei) are soluţie unică, dacă determinantul* $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$ *este nenul. Geometric înseamnă că cele trei plane au un singur punct comun (normalele la plane nu sunt în acelaşi plan), vezi figura următoare:*

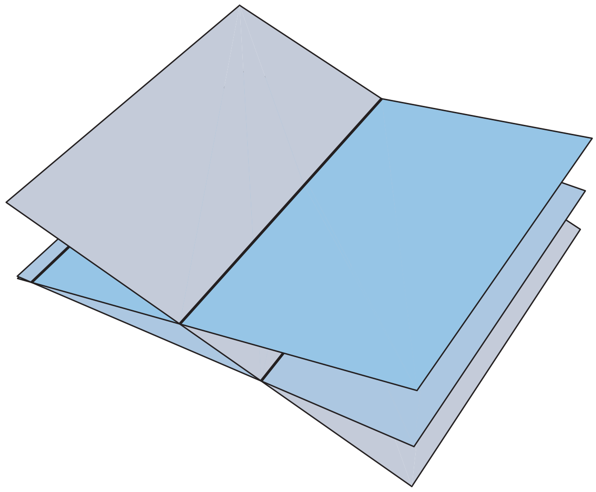


2. *Rangul matricei* $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}$ *este doi, iar sistemul este incompatibil, În acest caz sunt două subcazuri:*

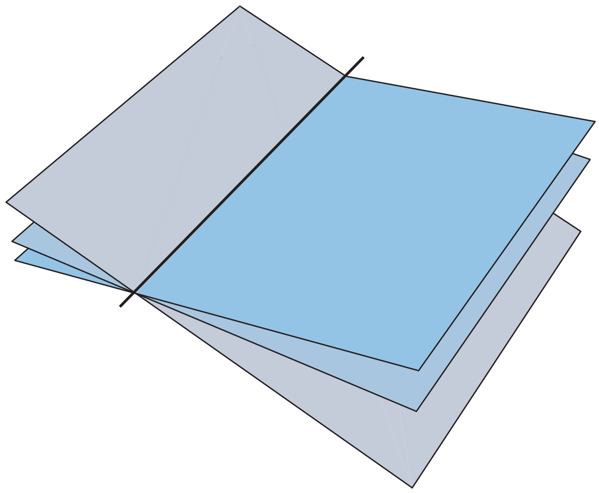
   (a) Două linii din matricea de mai sus sunt proporţionale. Atunci două plane sunt paralele, şi sunt intersectate fiecare de cel de al treilea plan, conform figurii:



   (b) Matricea de mai sus nu are linii proporţionale. Atunci planele se intersectează două câte două după drepte paralele:



3. Rangul matricei $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}$ *este doi, iar sistemul (STrei) este compatibil nederminat. Cele trei plane au o dreaptă comună:*



4. Rangul matricei $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}$ *este unu.*

(a) Dacă sistemul (STrei) este compatibil atunci cele trei plane coincid.

(b) Dacă sistemul (STrei) este incompatibil, atunci planele sunt paralele.

Fascicol de plane

Fie planele Π_1, Π_2 de ecuaţii

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \Pi_2 &: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}$$

Definitia 2.3.4 *Se numeşte fascicol de plane mulţimea planelor care au ecuaţia:*

$$\lambda\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1\right) + \mu\left(A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0 \qquad \text{(fasc)}$$

unde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *.Planele* Π_1, Π_2 *se numesc planele de bază ale fascicolului.*

Remarca 2.3.8 Dacă planele nu sunt paralele, atunci pentru λ, μ luând toate valorile reale obţinem toate planele care trec prin dreapta de intersecţie, iar dacă sunt paralele, toate planele paralele cu ele.

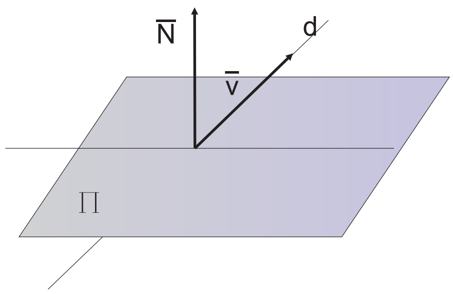
Exercitiul 3.2 Să se afle ecuaţia planului care tece prin dreapta de ecuaţii $-3(x-1) = 2(y+2)$, $2(y+2) = -3(z-2)$ şi care este perpendicular pe planul $3x + 2y - z - 5 = 0$.

Unghiul dintre o dreaptă şi un plan

Fie dreapta d şi planul Π.

Definitia 2.3.5 *Unghiul β dintre dreapta d şi planul Π este unghiul dintre dreaptă şi proiecţia ei pe plan.*

Dacă dreapta e dată sub forma (ECD) iar planul sub forma (EGP) atunci , conform figurii:

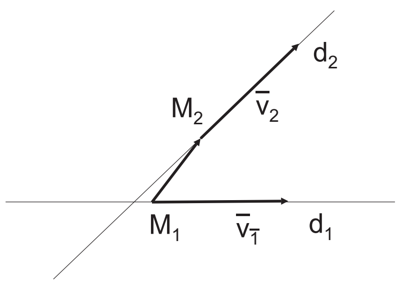


$$\begin{aligned} \sin\beta &= \cos\left(\overline{N},\overline{v}\right) = \frac{\overline{N}\cdot\overline{v}}{Nv} = \\ &= \frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+H2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}} \end{aligned}$$

Poziţia relativă a două drepte în spaţiu

Fie dreptele d_1, d_2 de ecuaţii:

$$\begin{aligned} \frac{x-x_1}{m_1} &= \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \\ \frac{x-x_2}{m_2} &= \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}. \end{aligned}$$



Ele n-au în general puncte comune (patru ecuaţii cu trei necunoscute) dacă:

$$\left(\overrightarrow{M_1M_2},\overline{v}_1,\overline{v}_2\right) \neq 0$$

Dacă

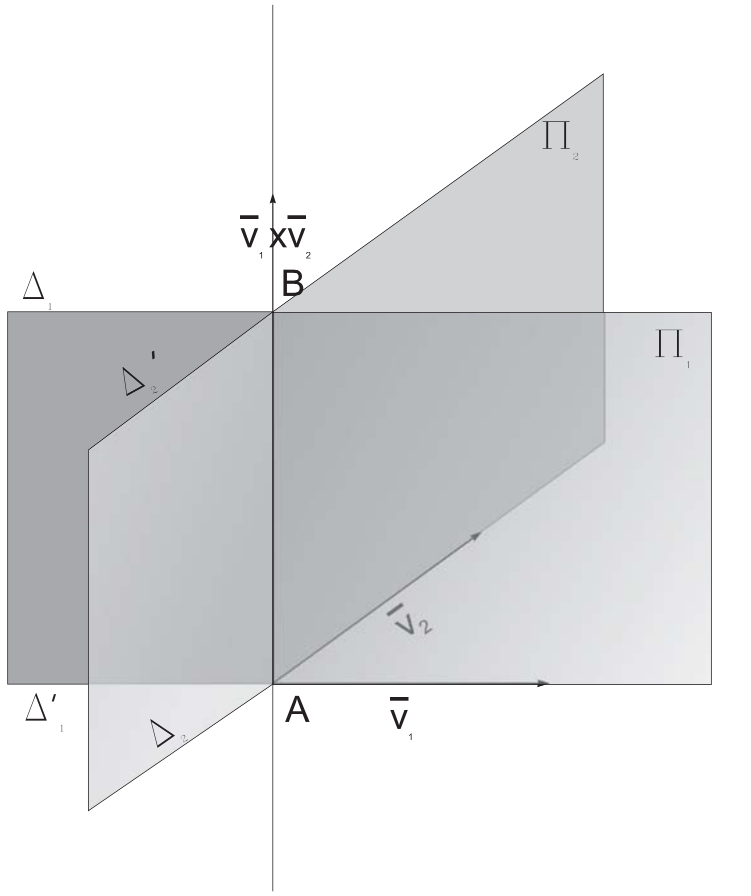
$$\left(\overrightarrow{M_1M_2},\overline{v}_1,\overline{v}_2\right) = 0$$

atunci sunt trei posibiltăţi:

1. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$, $M_1 \notin d_2$, *dreptele sunt paralele.*

2. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$, $M_1 \in d_2$ *dreptele coincid.*

3. dacă nu sunt cazurile precedente, dreptele se află în acelaşi plan (care?) şi au un punct comun.



AB este perpendiculara comună a dreptelor Δ_1 și Δ_2

1

Perpendiculara comună a două drepte în spaţiu

Fie în spaţiu dreptele d_1, d_2 de ecuaţii:

$$
\begin{aligned}
\frac{x-x_1}{m_1} &= \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \\
\frac{x-x_2}{m_2} &= \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.
\end{aligned}
$$

, neparalele.

Definitia 2.3.6 *Se numeşte perpendiculara comună a celor două drepte o dreaptă care le intersectează pe amândouă şi este perpendiculară pe fiecare.*