Algebră liniară I

1 Recapitulare cunoştiinţe de algebră din clasa XI-a

În clasa a XI s-a studiat la algebră problema existenţei soluţiei[1] şi calculării soluţiei sistemelor liniare[2] (adică sisteme care conţin doar ecuaţii de grad întâi) de forma:

$$AX = B, \tag{1.1}$$

unde A este o matrice cu m linii şi n coloane (conform notaţiilor de la începutul cursului: $A = [a_{ij}]_{i=\overline{1,m},j=\overline{1,n}} \in \mathfrak{M}_{m,n}$), X o matrice cu n linii şi o coloană ($X = [x_i]_{i=\overline{1,n}} \in \mathfrak{M}_{n,1}$), iar B este o matrice cu m linii şi o coloană. ($B = [b_j]_{j=\overline{1,m}} \in \mathfrak{M}_{m,1}$). Se ştie că folosind operaţiile cu matrice sistemul 1.1 este scrierea prescurtată pentru sistemul (vezi notaţiile

[1] adică există, pentru matrcele A şi B date, o matrice X care verifică 1.1.

[2] cum se pot afla toate matricele X care verifică sistemul 1.1 (adică toate soluţiile).

de la începutul cursului):

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n = b_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right. . \tag{1.2}$$

Pentru a da răspuns la cele două probleme s-a introdus în clasa XI-a noţiunea de determinant a unei matricei pătratice de ordin n. Reamintim aci această definiţie:

Definitia 1.1 Se numeşte determinantul matricei $A \in \mathfrak{M}_n$ *un număr real notat cu* $\det(A)$ *(sau* $|a_{ij}|_{i,j=\overline{1,n}}$*)dat de formula:*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdot ... \cdot a_{n\sigma(n)}, \tag{1.3}$$

unde prin S_n *s-a notat mulţimea tuturor permutărilor mulţimii* $\{1, 2, ..., n\}$[3]*, iar prin* $sgn(\sigma)$ *semnul permutării* σ*.(vezi* [**?**]*).*

Remarca 1 Calculul unui determinant nu se face cu formula 1.3 *decât pentru* $n = 2$

[3] adică toate funcţiile bijective $\sigma : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$.

($\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$) sau $n = 3$ (regula lui Sarrus sau regula triunghiului), pentru $n > 3$ calculul determinanţilor făcându-se prin utilizarea proprietăţilor lor (dezvoltarea după elementele unei linii (coloane), adunarea elementelor unei linii (coloane) înmulţite cu un număr la elementele corespunzătoare altei linii (coloane) în scopul obţinerii de cât mai multe elemente nule,...).

Fie $A \in \mathfrak{M}_{m,n}$.

Definitia 1.2 Se numeşte minor de ordin k *($k \leq \min\{m, n\}$) al matricei A determinantul unei matrice pătratice de ordin k obţinute din matricea A alegând doar k linii $i_1 < i_2 < ... < i_k$ din liniile matricei A şi k coloane $j_1 < j_2 < ... < j_k$ din coloanele matricei A.*

Remarca 2 Un minor de ordin k al matricei A este deci de forma:

$$\left|a_{i_p j_q}\right|_{p.q=\overline{1,k}}\ , \qquad (1.4)$$
$$1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq m\,,\ 1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_k \leq n$$

Cu ajutorul noţiunii de minor de ordin k al unei matrice A se defineşte în [**?**] noţiunea de rang al unei matrice:

Definitia 1.3 Se numeşte rang al unei matrice $A \in \mathfrak{M}_{m,n}$ un număr natural k (notat $\operatorname{rang}(A)$) cu proprietăţile:

1) există un minor de ordin k al matricei A nenul;

2) toţi minorii de ordin mai mare decât k ai matricei A sunt nuli.

Dacă notăm cu $\bar{A}$ matricea extinsă a sistemului 1.1 (adică matricea formată din adăugarea la matricea A a unei coloane formate din elementele matricei B) atunci problema existenţei soluţiei sistemelui 1.1 este dată de următoarea teoremă:

*TEOREMA 1.1 (**Kronecker-Capeli**) Sistemul 1.1 este compatibil*[4] *dacă şi numai dacă rangul matricei A este egal cu rangul matricei $\bar{A}$.*

Pentru rezolvarea sistemelor liniare e necesar să se introducă noţiunea de inversă a unei matrice. Conform manualului [**?**] vom numi matrice unitate de ordin n matricea notată cu I_n care are elementele de pe diagonală egale cu 1 iar celelalte nule. Folosind simbolul lui Kronecker definit de:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \; i = j \\ 0, \; i \neq j \end{cases}, \tag{1.5}$$

[4] adică are cel puţin o soluţie $X \in \mathfrak{M}_{n,1}$.

matricea unitate I_n se poate defini astfel:

$$I_n = [\delta_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}\,. \tag{1.6}$$

Principala proprietate a matricii unitate (de ordin n) este dată de:

***Proposition 1.2** Oricare ar fi matricea $A \in \mathfrak{M}_{m,n}$ şi oricare ar fi matricea $C \in \mathfrak{M}_{n,m}$ sunt verificate egalităţile:*

$$AI_n = A\,,\ \ I_nC = C. \tag{1.7}$$

Remarca 3 Formulele 1.7 justifică denumirea de matrice unitate pentru I_n.

Fie acum $A \in \mathfrak{M}_n$.

Definitia 1.4 Matricea A se numeşte inversabilă dacă există o matrice notată A^{-1} astfel încât:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n, \tag{1.8}$$

iar matricea A^{-1} care verifică relaţia de mai sus se numeşte inversa matricei A.

Existenţa şi modul de calcul al matrcei A^{-1} sunt date de:

TEOREMA 1.3 A^{-1} *există dacă şi numai dacă det*$(A) \neq 0$ *şi în acest caz:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*, \tag{1.9}$$

unde A^* *este adjuncta matricei* A*, şi se defineşte astfel:*

$$A^* = [A_{ij}]_{j,i=\overline{1,n}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & .. & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}, \tag{1.10}$$

în 1.10 $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ *(numit complementul algebric al elementului* a_{ij}*), iar* Δ_{ij} *este minorul de indice* i *şi* j *(corespunzător elementului* a_{ij}*) al matricei* A *care este determinantul matricei de ordin* $n-1$ *care se obţine din matricea* A *eliminând linia* i *şi coloana* j.

Folosind inversa unei matrice soluţia sistemului 1.1 în cazul $m = n$ este dată de:

*TEOREMA 1.4 (**Regula lui Cramer**) Dacă* $\det(A) \neq 0$ *atunci sistemul* 1.1 *are soluţie unică dată de:*

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{1.11}$$

Remarca 4 Ţinând cont de regula de înmulţire a două matrice, de formula 1.9*, şi de dezvoltarea unui detreminant după elementele unei linii, formula* 1.11 *este echivalentă cu formulele:*

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\det(A)}, \ i = \overline{1,n}, \tag{1.12}$$

unde Δ_{x_i} *sunt determinaţii matricei obţinute din matricea* A *prin înlocuirea coloanei cu numărul* i *cu coloana termenilor liberi (elementele matricei* B*) din sistemul* 1.1*.*

Teoremele 1.1 şi 1.4 rezolvă (teoretic) problemele existenţei şi calculului soluţiilor sistemului 1.1, căci pe baza lor rezolvarea sistemului 1.1 se face în următorii paşi:

1. Se calculează $k = \operatorname{rang}(A)$ şi $k_1 = \operatorname{rang}\left(\bar{A}\right)$.
2. Se verifică dacă $k = k_1$; în cazul egalităţii se trece la pasul următor, în cazul neegalităţii se menţionează că sistemul 1.1 este incompatibil şi se opresc calculele.
3. Minorul de ordin k nenul se notează cu Δ_{princ} şi se numeşte minorul principal al sistemului. Necunoscutele care au coeficienţi în Δ_{princ} se numesc necunoscute principale, iar celelalte necunoscute secundare[5], ecuaţiile care au coeficienţi în

[5] dacă nu există necunoscute secundare ($k = n$) sistemul 1.1 se numeşte compatibil determinat, dacă există necunoscute secundare ($n > k$) atunci sistemul se numeşte nedeterminat (simplu nedeterminat pentru $n - k = 1$, dublu.nedeterminat pentru $n - k = 2$,...)

Δ_{princ} se numesc ecuaţii principale, iar celelalte ecuaţii secundare. Se formează un sistem numai din ecuaţiile principale ale 1.2, în care termenii care conţin necunoscute secundare se trec în partea dreaptă.

4. Se rezolvă conform regulii lui Cramer sistemul astfel obţinut, necunoscutele secundare luând valori arbitrare.

În legătură cu cele de mai sus, recomandăm rezolvarea următoarelor exerciţii:

Exemplul 1.1 Să se calculeze determinantul Vandermonde:

$$V\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & ... & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & ... & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & ... & x_3^{n-1} \\ . & . & . & ... & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & ... & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

.

Exemplul 1.2 Să se demonstreze că soluţia generală a sistemului omogen (rangul matricei sistemului fiind 2):

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0$$

se poate scrie sub forma: $x = \lambda \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, y = \lambda \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}, z = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$.

2 Algoritmul lui Gauss

În acest paragraf vom studia aşa numitul algoritm al lui Gauss care, în esenţă nu este altceva decât metoda reducerii. Paşii algorimului constau din reducerea (eliminarea) primei necunoscute din ecuaţiile de la a doua în jos , eliminarea necunoscutei a doua din ecuaţiile de la a treia începând,... obţinându-se în final un sistem a cărui matrice are elementele de sub diagonala principală nule şi acest sistem se rezolva prin metoda substituţiei începând de la ultima ecuaţie şi ultima necunoscută. Mai precis având scris sistemul 1.1 sub forma 1.2 la primul pas se fac zerouri pe coloana întâi a matricei A, înmulţind prima ecuaţie a sistemului 1.2 cu numere convenabile şi adunând-o la celelalte ecuaţii:

Pasul 1 Dacă:

$$a_{11} \neq 0 \tag{1.13}$$

atunci se înmulţeste ecuaţia întâi a sistemului 1.2 cu $\mu_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ şi se adună la ecuaţia cu numarul i, (pentru $i = \overline{2, n}$) obţinând sistemul:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & ... & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & ... & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & ... & a_{3n}^{(1)} \\ . & . & . & ... & . \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & a_{m3}^{(1)} & ... & a_{mn}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ . \\ b_m^{(1)} \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

unde $a_{1j}^{(1)} = a_{1j}$, pentru $j = \overline{1,n}$, $b_1^{(1)} = b_1$ şi $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} + \mu_{i1}a_{1j}$, $b_i^{(1)} = b_i + \mu_{i1}b_1$ pentru $i = \overline{2,m}$, $j = \overline{2,n}$.

Pasul 2 Presupunând acum că:

$$a_{22}^{(1)} \neq 0 \tag{1.15}$$

se fac zerouri pe coloana a doua a matricei A înmulţind ecuaţia a doua a sistemului 1.14 cu $\mu_{i2} = -\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ şi adunând-o la ecuaţia cu numărul i, obţinând sistemul:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & ... & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & ... & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & ... & a_{3n}^{(2)} \\ . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & a_{m3}^{(2)} & ... & a_{mn}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(2)} \\ . \\ b_m^{(2)} \end{bmatrix} \qquad (1.16)$$

unde $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)}$ pentru $i = \overline{1,2}$ $j = \overline{1,n}$ şi $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} + \mu_{i2} a_{2j}^{(1)}$, $b_i^{(2)} = b_i^{(1)} + \mu_{i2} b_2^{(1)}$pentru $i = \overline{3,m}$, $j = \overline{3,n}$.

Procedând analog la sfârşitul pasului k obţinem sistemul :

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{13}^{(k)} & ... & a_{1k}^{(k)} & a_{1k+1}^{(k)} & ... & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & a_{23}^{(k)} & ... & a_{2k}^{(k)} & a_{2k+1}^{(k)} & ... & a_{2n}^{(k)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(k)} & ... & a_{3k}^{(k)} & a_{3k+1}^{(k)} & ... & a_{3n}^{(k)} \\ . & . & . & ... & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{kk}^{(k)} & a_{kk+1}^{(k)} & ... & a_{kn}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a_{k+1k+1}^{(k)} & ... & a_{k+1n}^{(k)} \\ . & . & . & ... & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a_{mk+1}^{(k)} & ... & a_{mn}^{(k)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(k)} \\ b_2^{(k)} \\ b_3^{(k)} \\ . \\ b_m^{(k)} \end{bmatrix} \qquad (1.17)$$

Pasul k+1. Dacă:

$$a_{k+1k+1}^{(k)} \neq 0 \qquad (1.18)$$

atunci înmulţim ecuaţia cu numărul $k+1$ cu $\mu_{i,k+1} = -\frac{a_{i,k+1}^{(k)}}{a_{k+1k+1}^{(k)}}$ şi o adunăm la ecuaţia cu numărul i (pentru $i = \overline{k+2, m}$) obţinând sistemul:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(k+1)} & a_{12}^{(k+1)} & a_{13}^{(k+1)} & ... & a_{1k}^{(k+1)} & a_{1k+1}^{(k+1)} & ... & a_{1n}^{(k+1)} \\ 0 & a_{22}^{(k+1)} & a_{23}^{(k+1)} & ... & a_{2k}^{(k+1)} & a_{2k+1}^{(k+1)} & ... & a_{2n}^{(k+1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(k+1)} & ... & a_{3k}^{(k+1)} & a_{3k+1}^{(k+1)} & ... & a_{3n}^{(k+1)} \\ . & . & . & ... & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{kk}^{(k+1)} & a_{kk+1}^{(k+1)} & ... & a_{kn}^{(k+1)} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & a_{k+1k+1}^{(k+1)} & ... & a_{k+1n}^{(k+1)} \\ . & . & . & ... & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & a_{mn}^{(k+1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(k+1)} \\ b_2^{(k+1)} \\ b_3^{(k+1)} \\ . \\ b_m^{(k+1)} \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

unde $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)}$, $b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)}$ pentru $i = \overline{1, k+1}$, $j = \overline{1, n}$ şi $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} + \mu_{i,k+1} a_{k+1,j}^{(k)}$ $b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} + \mu_{i,k+1} b_{k+1}^{(k)}$ pentru $i = \overline{k+2, m}$, $j = \overline{k+1, m}$.

Remarca 5 În cazul în care se utilizează calculatorul, pentru a micşora erorile de rotunjire la împărţire e preferabil ca la fiecare pas k să se schimbe întâi linia k cu linia care conţine pe coloana k sub diagonală cel mai mare număr în valoare absolută, adică să se efectueze mai întâi următorele operaţii :

1) se determină indicele l cel mai mic astfel încât: $\left|a_{lk}^{(k-1)}\right| = \max_{k\leq i\leq m}\left|a_{ik}^{(k-1)}\right|$.

2) se schimbă linia l cu linia k a matricelor $A^{(k)}$ şi $B^{(k)}$.

Remarca 6 Dacă condiţia 1.18 *nu e verificată, atunci se verifică dacă există elemente nenule pe coloana* $k+1$ *începând cu linia* $k+2$ *în matricea* $A^{(k)}$ *şi dacă există se schimbă linia* $k+1$ *a matricelor* $A^{(k)}$ *şi* $B^{(k)}$ *cu linia care conţine elementul nenul. Dacă toate elementele coloanei* $k+1$ *începând de la linia* $k+2$ *sunt nule atunci sistemul este sau incompatibil, sau compatibil nedeterminat cu necunoscuta* x_k *ca necunoscută secundară şi pentru rezolvarea lui e preferabil să se aplice algoritmul de mai sus cu mici modificări (vezi cele ce urmează după teorema 1.5).*

Din modul cum am obţinut sistemul 1.19 din sistemul iniţial 1.2 se poate demonstra următoarea teoremă:

TEOREMA 1.5 Sistemele 1.2 *şi* 1.19 *sunt echivalente*[6].

Se pune în mod natural problema care este numărul maxim de paşi posibili la

[6] adică sau sunt ambele incompatibile, sau dacă sunt compatibile au aceleaşi soluţii.

algoritmul lui Gauss şi cum se rezolvă apoi sistemul obţinut. Din teorema precedentă şi 1.1, rezultă că numărul maxim de paşi este egal cu rangul matricei A. Dacă rangul matricei A este k atunci la sfârşitul pasului k sistemul 1.17 devine:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{13}^{(k)} & \ldots & a_{1k}^{(k)} & a_{1k+1}^{(k)} & \ldots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & a_{23}^{(k)} & \ldots & a_{2k}^{(k)} & a_{2k+1}^{(k)} & \ldots & a_{2n}^{(k)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(k)} & \ldots & a_{3k}^{(k)} & a_{3k+1}^{(k)} & \ldots & a_{3n}^{(k)} \\ . & . & . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{kk}^{(k)} & a_{kk+1}^{(k)} & \ldots & a_{kn}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(k)} \\ b_2^{(k)} \\ b_3^{(k)} \\ . \\ b_m^{(k)} \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

Acest sistem este (evident) incompatibil dacă există $b_j^{(k)} \neq 0$, cu $j > \dot{k}$. Dacă pentru $j > \dot{k}$ $b_j^{(k)} = 0$ atunci sistemul este compatibil, determinat pentru $k = n$ şi nedeterminat pentru $k < n$. Soluţia lui se află prin rezolvarea (în raport cu necunoscutele principale) a ecuaţiilor începând de la ultima şi înlocuind necunoscutele deja aflate în ecuaţiile precedente, conform formulelor:

$$\begin{array}{l} x_k = \dfrac{b_k^{(k)} - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k)} x_j}{a_{kk}^{(k)}} \\ x_i = \dfrac{b_i^{(k)} - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_{ij}^{(k)} x_j - \sum\limits_{l=i+1}^{k} a_{il}^{(k)} x_l}{a_{ii}^{(k)}}, i = \overline{k-1, 1} \end{array}. \tag{1.21}$$

Remarca 7 Acest alogoritm se poate aplica şi la calculul inversei unei matrice, aplicând paşii matricei formată din matricea A şi matricea unitate I_n scrisă alături, obţinând în final în stânga I_n iar în dreapta A^{-1}: $[A\,|I_n] \Rightarrow \left[I_n \left|A^{-1}\right.\right]$, deoarece aflarea coloanei cu nr. k a matricei inverse se reduce la rezolvarea unui sistem având ca matice matricea A iar ca termen liber coloana cu nr. k a matricei unitate de ordin corespunzător.

Remarca 8 Acest algoritm permite şi determinarea rangului unei matrice A , rangul matricei fiind egal cu numărul maxim de paşi din algoritm (matricea B nu se mai ia în calcule în acest caz).