1 Generatoare rectilinii pentru cuadrice

1.1 Generatoare rectilinii pentru hiperboloidul cu o pânză

Ecuaţia hip. cu o pânză:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} &= 1 \\
\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2} &= 1-\frac{y^2}{b^2} \\
\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right) &= \left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right) \\
\frac{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}}{1-\frac{y}{b}} &= \frac{1+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}}=\lambda \\
\frac{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}}{1+\frac{y}{b}} &= \frac{1-\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}}=\mu
\end{aligned}$$

$$\frac{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}}{1-\frac{y}{b}}=\frac{1+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}}=\lambda \tag{1}$$

$$\frac{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}}{1+\frac{y}{b}}=\frac{1-\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}}=\mu \tag{2}$$

Theorem 1 *Pentru orice punct de pe hip. există o singură dreaptă de ecuaţie (g1) şi o singură dreaptă de ec. (g2) care trece prin punctul respectiv. Dreptele (g1),(g2) sunt situate pe hiperboloid. Două drepte din (g1) ((g2)) n-au puncte comune. O dreaptă din (g1) şi o dreaptă din (g2) au un singur punct comun.*

Demonstraţie:

$$\begin{array}{l}
\frac{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}}{1-\frac{y}{b}}=\frac{1+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}}=\lambda_1 \\
\frac{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}}{1-\frac{y}{b}}=\frac{1+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}}=\lambda_2
\end{array}$$

sistem incompatibil.

$$\begin{array}{l}
\frac{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}}{1-\frac{y}{b}}=\frac{1+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}}=\lambda \\
\frac{\frac{x}{a}-\frac{z}{c}}{1+\frac{y}{b}}=\frac{1-\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}+\frac{z}{c}}=\mu
\end{array}$$

are soluţie pentru orice λ, μ.

Definition 2 *Familiile de drepte definite de (g1), respectiv (g2) se numesc familii de generatoare rectilinii pentru hip. cu o pânză.*

1.2 Generatoare rectilinii pentru paraboloidul hiperbolic

$$\begin{aligned}
2z &= \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \\
2z &= \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \\
\frac{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}}{2} &= \frac{z}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}} = \lambda \\
\frac{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}}{z} &= \frac{2}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}} = \mu
\end{aligned}$$

Exercise 3 *Să se determine generatoarele rectilinii ale p h*

$$2z = x^2 - y^2$$

paralele cu planul $x + y + z = 10$.

$$\begin{aligned}
\frac{x-y}{2} &= \frac{z}{x+y} = \lambda \\
& x - y - 2\lambda = 0 \\
& \lambda x + \lambda y - z = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x + y + z &= 10 \\
x - y - 2\lambda &= 0 \\
\lambda x + \lambda y - z &= 0
\end{aligned}$$

incompatibil.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \lambda & \lambda & -1 \end{vmatrix} = 0$$

rezultă $\lambda = -1$. deci:

$$\begin{aligned}
x - y + 2 = 0 \\
x + y + z = 0
\end{aligned}$$