Generări de suprafeţe

O.M. Gurzau

0.1 Notiuni generale de curbe şi suprafeţe

Definitia 0.1 *Se numeşte curbă în spaţiu mulţimea punctelor a căror coordonate sunt funcţii continue de un parametru real, care ia valori într-un interval:*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in I \subset \mathbb{R} \tag{EPC}$$

Definitia 0.2 *Se numeşte suprafaţă în spaţiu mulţimea punctelor a căror coordonate sunt funcţii continue de doi parametri reali, fiecare luând valori într-un interval:*

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}, u \in I_1, v \in I_2, I_1, I_2 \subset \mathbb{R} \tag{EPS}$$

Remarca 0.1 *Ecuaţiile (EPC),(EPS) se numesc ecuaţiile parametrice aale curbei, respectiv sup*

Remarca 0.2 *Eliminând în ecuaţiile parametrice ale suprafeţei parametrii u, v se obţine ecuaţia implicită a suprafeţei:*

$$F(x, y, z) = 0, \tag{EIS}$$

iar rezolvând ecuaţia de mai sus în raport cu z se obţine ecuaţia explicită a suprafeţei:

$$z = f(x, y). \tag{EES}$$

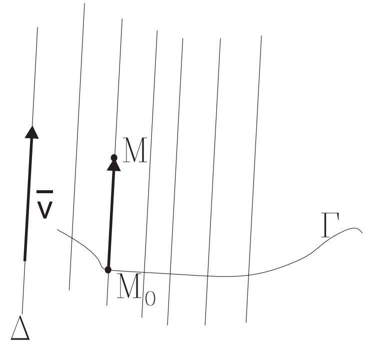
Remarca 0.3 *Analog, pentru o curbă, eliminând t se obţin ecuaţiile curbei ca intersecţie de două suprafeţe:*

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

sau forma explicită:

$$\begin{cases} y = f_1(x) \\ z = f_2(x) \end{cases}.$$

0.2 Suprafeţe cilindrice



1.

Definitia 0.3 *Se numeşte suprafaţă cilindrică o suprafaţă generată de o dreaptă care rămâne paralelă cu o dreaptă dată şi intersectează o curbă dată (sau verifică altă condiţie geometrică).*

Ne propunem în cele ce urmează să determinăm ecuaţiile suprafeţei cilindrice. Vom face acest lucru în două variante:

Teorema 0.1 *Dacă dreapta* Δ *are ecuaţiile canonice:*

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

şi curba Γ *are ecuaţiile parametrice*

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases},t\in I\subset\mathbb{R}$$

atunci suprafaţa cilindrică are ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} X = x(t) + \lambda a \\ Y = y(t) + \lambda b \\ Z = z(t) + \lambda c \end{cases}, t \in I \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}. \tag{EPSC}$$

Demonstraţie. Fie $M(X,Y,Z)$ un punct pe suprafaţa cilindrică. Există atunci un punct $M_0(x(t), y(t), z(t))$ pe curba Γ astfel încât $\overrightarrow{M_0M}$ este paralel cu dreapta Δ, deci există $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda\left(a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}\right)$$

egalând coordonatele celor doi vectori din egalitatea de mai sus rezultă (EPSC).

Exemplul 0.1 *Fie dreapta*

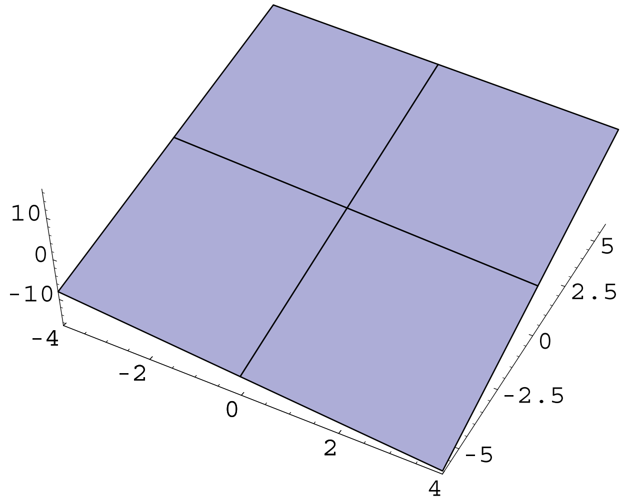
$$\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$$

şi curba Γ :

$$x = 2t, y = 3t, z = 4t.$$

Ecuaţiile parametrice ale suprafeţei cilindrice vor fi

$$\begin{cases} X = 2t + \lambda \\ Y = 3t + 2\lambda \quad t, \lambda \in \mathbb{R} \\ Z = 4t + 3\lambda \end{cases}$$

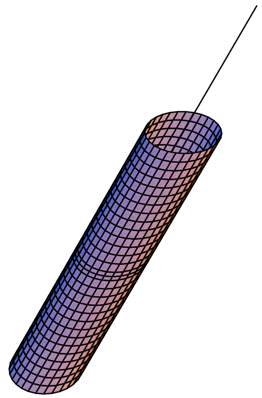


Exemplul 0.2 *Fie drepta* Δ *ca mai sus, iar curba* Γ

$$x = \cos t, y = \sin t, z = 0.t \in [0, 2\pi].$$

Ecuaţiile parametrice ale suprafeţei cilindrice vor fi

$$\begin{cases} X = \cos t + \lambda \\ Y = \sin t + 2\lambda \quad t \in [0, 2\pi], \lambda \in \mathbb{R} \\ Z = 3\lambda \end{cases}$$



Teorema 0.2 *Dacă dreapta Δ este dată ca intersecţie de două plane*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

şi curba Γ ca intersecţie de două suprafeţe atunci ecuaţia implicită a suprafeţei cilindrice este:

(0.0.1) $$H\left(A_1x + B_1y + C_1z + D_1, A_2x + B_2y + C_2z + D_2\right) = 0.$$

Demonstraţie. Dacă un punct $M\left(x, y, z\right)$ se află pe suprafaţă atunci el se află pe o dreaptă paralelă cu Δ, deci coordonatele sale verifică:

(0.0.2) $$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = \alpha \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = \beta \end{cases}$$

Drepta de mai sus intersectează curba Γ, deci sistemul:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=\alpha \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=\beta \\ F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

are soluţie, de unde rezultă (eliminând x, y, z):

$$H(\alpha,\beta)=0$$

înlocuind în formula de mai sus pe α, β din (0.0.2) rezultă formula (0.0.1).

Exemplul 0.3 *Să se afle suprafaţa cilidrică care are generatoarele paralele cu Oz şi trece prin curba:*

$$\begin{cases} x^2+2y^2=4 \\ z=0 \end{cases}$$

Toate dreptele paralele cu Oz au ecuaţiile:

$$x=\alpha, y=\beta,$$

sistemul de patru ecuaţii fiind:

$$\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \\ z=0 \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$$

Obţinem condiţia de compatibilitate:

$$\alpha^2+2\beta^2-4=0$$

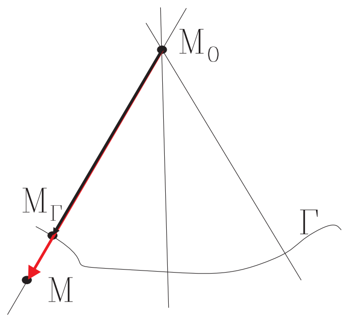
deci ecuatia suprafeţei va fi:

$$x^2 + 2y^2 - 4 = 0$$

Remarca 0.4 *Se poate demonstra că o ecuaţie în care apar doar coordonatele* x, y *reprezintă ecuatia unei suprafeţe cilidrice cu generatoarele paralele cu* Oz.

0.3 Suprafeţe conice

Definitia 0.4 *Se numeşte suprafaţă conică o suprafaţă generată de o dreaptă care trece printr-un punct fix şi intersectează o curbă dată (sau verifică altă condiţie geometrică).*



Ne propunem în cele ce urmează să determinăm ecuaţiile suprafeţei conice.

Teorema 0.3 *Dacă punctul* M_0 *are coordonatele* (x_0, y_0, z_0) *şi curba* Γ *are ecuaţiile* *parametrice*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in I \subset \mathbb{R}$$

atunci suprafaţa cilindrică are ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} X = x_0 + \lambda(x(t) - x_0) \\ Y = y_0 + \lambda(y(t) - y_0) \\ Z = z_0 + \lambda(z(t) - z_0) \end{cases}, t \in I \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}. \qquad \text{(EPSC)}$$

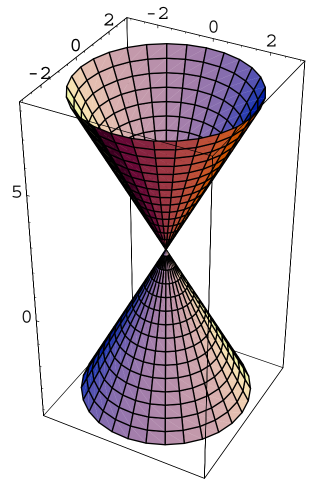
Demonstraţia este asemănătoare cu cea de la suprafaţa cilindrică, înlocuind condiţia de paralelism cu dreapta cu condiţia de coliniaritate cu $\overrightarrow{M_0 M_\Gamma}$.

Exemplul 0.4 *Conul cu centrul în punctul* $M_0(0, 0, 2)$ *care trece prin curba* Γ

$$x = \cos t, y = \sin t, z = 0.t \in [0, 2\pi].$$

are ecuaţiile parametrice:

$$x = \lambda \cos t, y = \lambda \sin t, z = 2 - 2\lambda.$$



Teorema 0.4 *Dacă punctul M_0 este dat ca intersecţie de trei plane:*

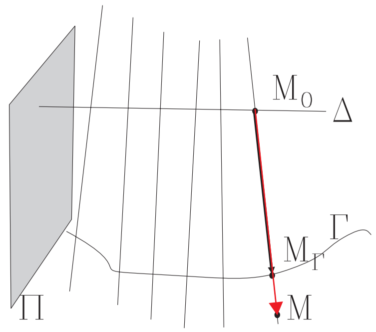
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$

şi curba Γ ca intersecţie de două suprafeţe atunci ecuaţia implicită a suprafeţei conice este:

$$H\left(\frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}, \frac{A_3x + B_3y + C_3z + D_3}{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}\right) = 0.$$

0.4 Suprafeţe conoide

Definitia 0.5 *Se numeşte suprafaţă conoidă o suprafaţă generată de o dreaptă care* *intersectează o dreaptă dată, este paralelă cu un plan dat şi intersectează o curbă dată (sau verifică altă condiţie geometrică).*



Teorema 0.5 *Dacă dreapta Δ este dată ca intersecţie de două plane:*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

planul Π are ecuaţia:

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

şi curba Γ este dată ca intersecţie de două suprafeţe atunci ecuatia suprafeţei conoide este:

$$H\left(A_3x + B_3y + C_3z + D_3, \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}\right) = 0.$$

Pentru demonstraţie se ţine cont că dacă $M\,(x, y, z)$ aparţine suprafeţei conoide atunci coordonatele sale verifică sistemul:

$$\begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = \alpha \\ \frac{A_1x+B_1y+C_1z+D_1}{A_2x+B_2y+C_2z+D_2} = \beta \\ F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

iar din condiţia de compatibilitate rezultă că $H(\alpha, \beta) = 0$, de unde rezultă formula cerută.

Exemplul 0.5 *Să se afle ecuaţia suprafeţei conoide care are generatoarele paralele cu xOy, trec prin Oz şi intersectează curba:*

$$x^2 + z^2 = 1, y = 4$$

Sistemul precedent devine:

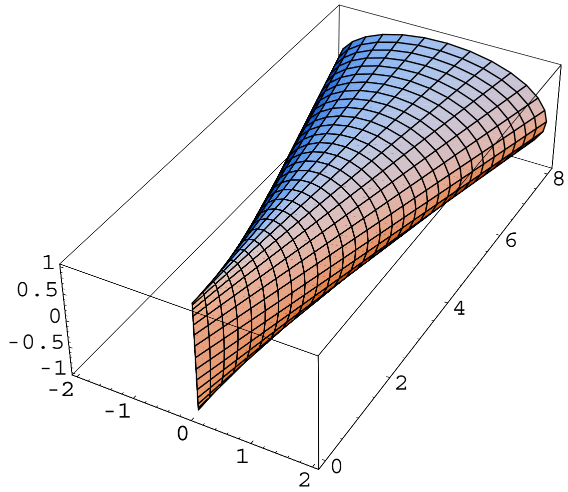
$$x^2 + z^2 = 1, y = 4, z = \alpha, \frac{x}{y} = \beta$$

Rezolvând sistemul format cu ultimele trei ecuaţii şi înlocuind în prima obţinem:

$$(4\beta)^2 + \alpha^2 - 1 = 0$$

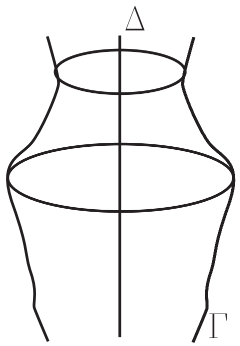
deci ecuaţia suprafeţei va fi:

$$\left(\frac{4x}{y}\right)^2 + z^2 - 1 = 0.$$



0.5 Suprafeţe de rotaţie

Definitia 0.6 *Se numeşte suprafaţă de rotaţie o suprafaţă obţinută din rotaţia unei curbe în jurul unei drepte.*



Teorema 0.6 *Dacă dreapta Δ este dată sub forma canonică:*

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

şi curba Γ ca intersecţie de două suprafeţe:

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

atunci ecuaţia implicită a suprafeţei de rotaţie va fi:

$$H\left(ax+by+cz,(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2\right)=0,$$

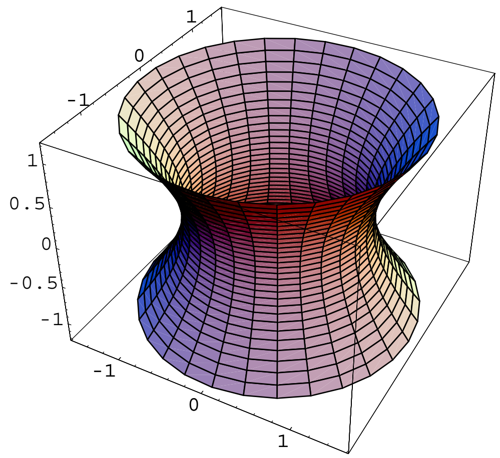
unde funcţia $H(\alpha,\beta)$ rezultă din compatibilitatea sistemului:

$$\begin{gathered} ax+by+cz=\alpha \\ (x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\beta \\ F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0. \end{gathered}$$

Exemplul 0.6 *Să se afle suprafaţa obţinută prin rotaţia dreptei:*

$$x-z=1-y, x+z=1+y$$

în jurul axei Oz. (Răspuns: $x^2+y^2-z^2=1$)



1
0
-1
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
0
1