1.1 Noţiuni preliminare

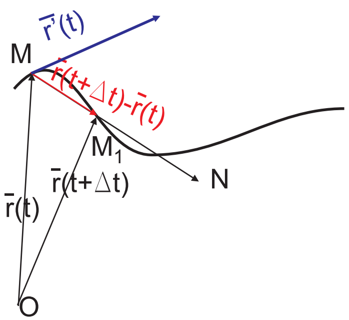
Fie un vector a cărui coordonate depind de un parametru real t :

(1.1.1) $$\overline{r} = \overline{r}\left(t\right), t \in I \subseteq \mathbb{R}$$

Definitia 1.1 *Se numeşte derivata vectorului* $\overline{r}$ *în punctul* t *vectorul* $\overline{r'}\left(t\right)$ *definit de:*

(1.1.2) $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{r}\left(t+\Delta t\right) - \overline{r}\left(t\right)}{\Delta t} = \overline{r'}\left(t\right).$$

dacă limita din membrul stâng există.



Derivata unui vector

(în figura de mai sus $\overrightarrow{MN} = \frac{\overline{r}(t+\Delta t) - \overline{r}(t)}{\Delta t}$)

Remarca 1.1 *Derivata unui vector se poate interpreta mecanic ca viteza instantanee, expresia lui* $\overline{r}\left(t\right)$ *fiind legea de mişcare a uni punct.*

Dacă:

$$\overline{r}(t) = x(t)\,\overline{i} + y(t)\,\overline{j} + z(t)\,\overline{k}$$

atunci se poate demonstra:

Teorema 1.1 *$\overline{r'}(t)$ există dacă şi numai dacă funcţiile reale de o variabilă reală x, y, z sunt derivabile în t şi:*

$$\overline{r'}(t) = x'(t)\,\overline{i} + y'(t)\,\overline{j} + z'(t)\,\overline{k}$$

Regulile de derivare pentru vectori sunt aceleaşi ca pentru funcţii reale. Mai precis:

Teorema 1.2 *Dacă $\overline{r}_1, \overline{r}_2$ sunt vectori derivabili, iar f o funcţie reală derivabilă în t atunci:*

$$\begin{aligned}
\left(\overline{r}_1(t) \pm \overline{r}_2(t)\right)' &= \overline{r_1'}(t) \pm \overline{r_2'}(t) \\
\left(f(t)\,\overline{r}_1(t)\right)' &= f'(t)\,\overline{r}_1(t) + f(t)\,\overline{r_1'}(t) \\
\left(\overline{r}_1(t) \cdot \overline{r}_2(t)\right)' &= \overline{r_1}(t) \cdot \overline{r_2'}(t) + \overline{r_1'}(t) \cdot \overline{r}_2(t) \\
\left(\overline{r}_1(t) \times \overline{r}_2(t)\right)' &= \overline{r_1}(t) \times \overline{r_2'}(t) + \overline{r_1'}(t) \times \overline{r}_2(t)
\end{aligned}$$

Din teorema precedentă rezultă:

Corolarul 1.1 *Dacă vectorul $\overline{r}(t)$ are lungime constantă atunci $\overline{r'}(t)$ este perpendicular pe $\overline{r}(t)$.*

1.2 Geometria diferenţială a curbelor plane

2.1 Curbe plane: noţiuni generale, exemple.

Reamintim că o curbă plană poate fi dată parametric sub forma:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I \subseteq \mathbb{R} \tag{EPCP}$$

Vecorial:

$$\overline{r} = \overline{r}(t) = x(t)\,\overline{i} + y(t)\,\overline{j}, t \in I \subseteq \mathbb{R}$$

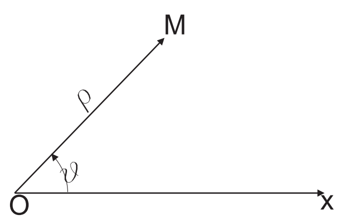
sau sub forma implicită:

$$F(x, y) = 0 \tag{EiCP}$$

sau sub forma explicită:

$$y = f(x) \text{ sau } x = g(y) \tag{EECP}$$

In plan se mai utilizează şi coordonatele polare, în care un punct M este determinat prin distanţa de la punct la un punct fixat O (originea) şi unghiul făcut de o axă fixă care trece prin O (axa polară) cu vectorul $\overrightarrow{OM}$:



Coordonatele polare ale punctului M din figura de mai sus sunt (ρ, θ) . Legătura dintre coordonatele polare şi cele carteziene este dată de:

$$\text{(1.2.1)} \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \text{ respectiv } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \sin\theta = \frac{y}{\rho}, \cos\theta = \frac{x}{\rho} \end{cases}$$

O curbă poate fi dată şi în coordonate polare, dând ρ în funcţie de θ :

$$\rho = \rho(\theta) \tag{ECPP}$$

Remarca 2.1 *In anumite condiţii ecuaţiile unei curbe plane (parametrice, implicite, explicite, polare) sunt echivalente.*

Remarca 2.2 *O aceeaşi curbă admite mai multe parametrizări:*

$$\begin{aligned} \overline{r} &= \overline{r}(t), t \in I \subseteq \mathbb{R} \\ \overline{r} &= \overline{r}(t_1), t_1 \in I_1 \subseteq \mathbb{R} \end{aligned}$$

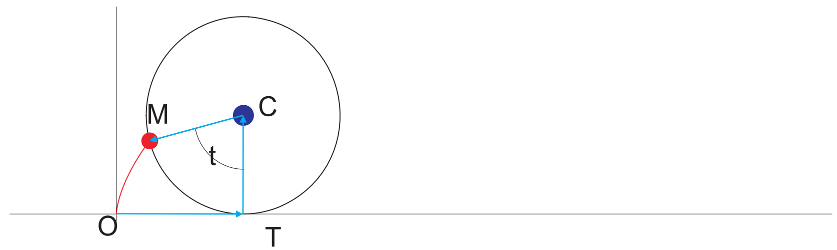
care sunt echivalente dacă:

$$t = t(t_1), t_1 \in I_1$$

este o funcţie derivabilă, cu derivată continuă şi pozitivă pe I_1.

2.2 Câteva exemple de curbe plane

Exemplul 2.1 *Să se afle traiectoria descrisă de un cui intrat în anvelopa unei maşini aflată în mişcare rectilinie.*



Fie raza roţii a, şi alegem ca şi parametru unghiul t dintre MC şi CT unde este poziţia cuiului, C axul roţii iar T este punctul de contact dintre roată şi şosea.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CM}$$

unde:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OT} &= at\bar{i} \\ \overrightarrow{TC} &= a\bar{j} \\ \overrightarrow{CM} &= a\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)\bar{i} + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right)\bar{j}\right) \end{aligned}$$

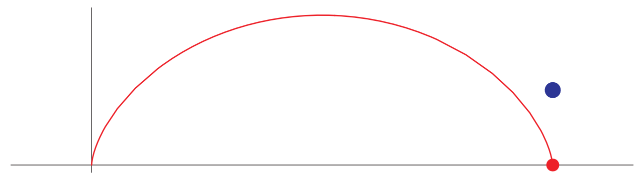
Rezultă:

$$\overrightarrow{OM} = a\,(t - \sin t)\,\bar{i} + a\,(1 - \cos t)\,\bar{j}$$

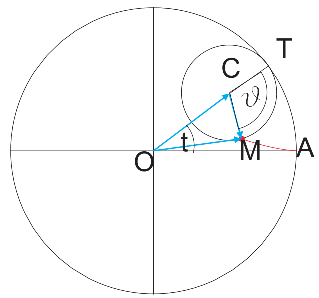
deci ecuaţiile parametrice ale curbei (numită cicloidă) sunt:

$$\begin{cases} x = a\,(t - \sin t) \\ y = a\,(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Graficul ei pentru $t \in [0, 2\pi]$ este:



Exemplul 2.2 *Să se afle ecuaţiile traiectoriei descrise de un cerc de rază r care se rostogoleşte fără alunecare în interiorul unui cerc de rază $R > r$.*



In figura de mai sus alegem parametru unghiul t făcut de $\overrightarrow{OC}$ (C este centrul cercului care se rostogoleşte) cu axa Ox. deoarece lungimile arcelor TM şi AT sunt egale avem:

$$\vartheta = \frac{R}{r}t$$

Deoarece

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} \\
OC &= (R-r)\left(\cos t\bar{i} + \sin t\bar{j}\right) \\
\overrightarrow{CM} &= r\left(\cos\left(2\pi - \vartheta + t\right)\bar{i} + \sin\left(2\pi - \vartheta + t\right)\bar{j}\right)
\end{aligned}$$

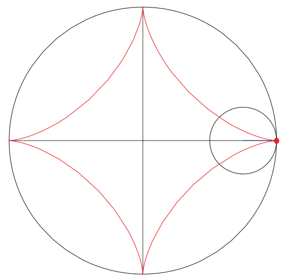
rezultă ecuaţiile parametrice ale epicicloidei:

$$\begin{cases} x = (R-r)\cos t + r\cos\left(\frac{R}{r}t - t\right) \\ y = (R-r)\sin t - r\sin\left(\frac{R}{r}t - t\right) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Dacă $R = 4r$ curba se numeşte astroidă şi are ecuaţiile parametrice:

$$x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, t \in [0, 2\pi]$$

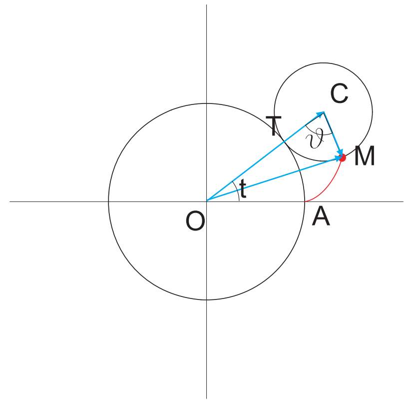
şi graficul:



Ecuaţia implicită a astroidei este:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Exemplul 2.3 *Să se afle ecuaţiile traiectoriei descrise de un cerc de rază r care se rostogoleşte fără alunecare în exteriorul unui cerc de rază R.*



2.3 Tangenta şi normala la o curbă plană

Fie Γ o curbă plană dată parametric:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}$$

şi un punct $M(x(t), y(t))$ pe curbă.

Definitia 2.1 *Se numeşte tangentă la curba Γ în punctul M poziţia limită a dreptei determinată de punctele M şi M_1 de pe curbă când punctul M_1 tinde către M_1. (dacă această limită există).*

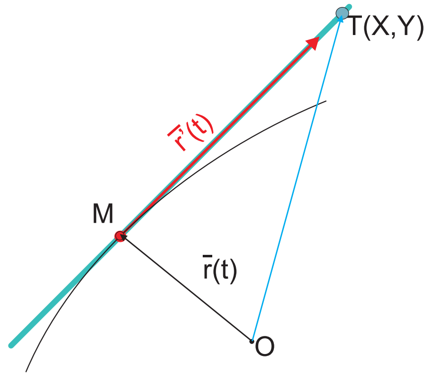
Teorema 2.1 *Dacă funcţiile x, y sunt derivabile în t şi*

$$x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$$

atunci ecuaţia tangentei la curbă este (coordonatele unui punct de pe curbă fiind notate *cu* (X, Y) *):*

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} \tag{ETP}$$

Demonstraţie:



Conform definiţiei derivatei unui vector şi a tangentei, dacă T aparţine tangentei (vezi figura precedentă) atunci vectorii $\overrightarrow{MT}$ şi $\overline{r'}(t)$ sunt coliniari, deci coordonatele lor sunt proporţionale:

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)}$$

adică tocmai ecuaţia (ETP).

Remarca 2.3 *Dacă curba este dată explicit, ecuaţia tangentei este:*

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x)$$

iar dacă curba este dată implicit (EiCP):

$$F'_x(x, y)(X - x) + F'_y(Y - y) = 0.$$

Definitia 2.2 *Se mumeşte normala la curba Γ în punctul $M \in \Gamma$ perpendiculara pe tangenta în M (prin punctul M).*

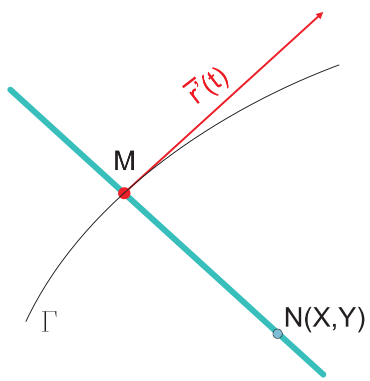
Teorema 2.2 *Dacă funcţiile x, y sunt derivabile în t şi*

$$x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$$

atunci ecuaţia normalei la curbă este (coordonatele unui punct de pe curbă fiind notate cu (X, Y)):

$$x'(t)(X - x(t)) + y'(t)(Y - y(t)) = 0. \tag{ENP}$$

Demonstraţie:



Dacă N este un punct pe normală atunci vectorul $\overrightarrow{MN}$ este perpendicular pe $\overline{r'}(t)$ deci

$$\overline{r'}(t) \cdot \overrightarrow{MN} = 0$$

care transpusă analitic dă tocmai ecuaţia (ENP).

Remarca 2.4 *Dacă curba* Γ *este dată explicit ecuaţia normalei este:*

$$(X-x)+f'(x)(Y-f(x))=0$$

iar dacă e dată implicit ecuaţia normalei este::

$$\frac{X-x}{F'_x(x,y)}=\frac{Y-y}{F'_y(x,y)}.$$

Exemplul 2.4 *Fie cicloida:*

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases} t\in\mathbb{R}$$

Ecuaţiile tangentei, respectiv normalei sunt:

$$\frac{X-a(t-\sin t)}{a(1-\cos t)}=\frac{Y-a(1-\cos t)}{a\sin t}$$

$$a(1-\cos t)(X-a(t-\sin t))+a\sin t(Y-a(1-\cos t))=0$$

Exemplul 2.5 *Fie cercul:*

$$x^2+y^2=1$$

Ecuaţiile tangentei, respectiv normalei, într-un punct (x,y) *de pe cerc sunt:*

$$2x(X-x)+2y(Y-y)=0$$

$$\frac{X-x}{2x}=\frac{Y-y}{2y}$$

Făcând calculele rezultă forma simplificată:

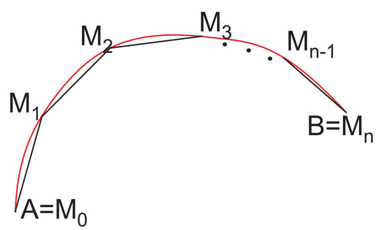
$$\begin{aligned} xX + yY &= 1 \\ xY - yX &= 0. \end{aligned}$$

2.4 Lungimea unui arc de curbă, parametrul natural al unei curbe

Fie curba Γ dată parametric:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} t \in [a, b]$$

Ne propunem să definim lungimea acestei curbe, precum şi o formulă de calcul pentru lungime.



Pentru aceasta înscriem în curba Γ linia poligonală $M_0M_1...M_n$ (vezi figura precedentă).

Definitia 2.3 *Se numeşte lungimea curbei* Γ *limita lungimii liniei poligonale* $M_0M_1...M_n$ *când* $n \to \infty$ *şi lungimea celui mai mare segment de pe linia poligonală tinde la zero.*

Teorema 2.3 *Dacă funcţiile* $x(t), y(t)$ *au derivată continuă atunci curba* Γ *are lungime finită, dată de:*

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\mathrm{dt} \tag{LC}$$

Demonstraţie: lungimea liniei poligonale $M_0M_1...M_n$ este dată de (t_i este valoarea parametrului t corespunzătoare punctului M_i):

$$\begin{aligned} l_n &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\zeta_i)} \end{aligned}$$

unde $\xi_i, \zeta_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Se demonstrează la analiză matematică că limita lui l_n când $n \to \infty$ şi $\max_{i=\overline{1,n}} |t_i - t_{i-1}| \to 0$ este tocmai integrala din partea dreaptă a egalităţii (LC).$\square$

Definitia 2.4 *Se numeşte parametrul natural* s *al curbei* Γ *lungimea arcului de curbă* AM, A *fiind punctul de coordonate* $(x(a), y(a))$, *iar* M *punctul de coordonate* $(x(t), y(t))$.

Din teorema precedentă rezultă imediat:

Propozitia 2.1 *Parametrul natural al curbei este dat de:*

$$s = \int_a^t \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)}d\tau. \tag{1.2.2}$$

Remarca 2.5 *Dacă în loc de parametrul t se consideră ca şi parametru parametrul natural s se obţine o parametrizare echivalentă a curbei (vezi remarca 2.2), numită parmetrizarea naturală:*

$$\overline{r}(s) = x(s)\,\overline{i} + y(s)\,\overline{j}, s \in [0, l(\Gamma)]. \tag{1.2.3}$$

Teorema 2.4 *Dacă curba Γ este parametrizată natural atunci:*

$$\left|\overline{r'}(s)\right| = 1. \tag{1.2.4}$$

Demonstraţie:

$$\begin{aligned}
\overline{r'}(s) &= x'(s)\,\overline{i} + y'(s)\,\overline{j} = \\
&= \frac{dt}{ds}x'(t)\,\overline{i} + \frac{dt}{ds}y'(t)\,\overline{j} = \\
&= \frac{x'(t)\,\overline{i} + y'(t)\,\overline{j}}{\frac{ds}{dt}} = \\
&= \frac{x'(t)\,\overline{i} + y'(t)\,\overline{j}}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}
\end{aligned}$$

de unde calculând modulul rezultă formula (1.2.4).

Din teorema precedentă şi corolarul 1.1 rezultă:

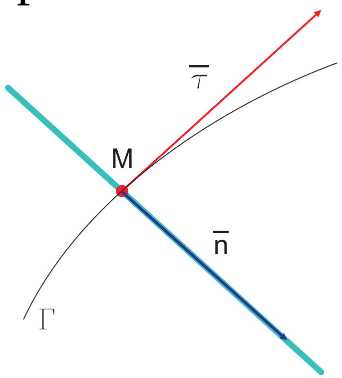
Corolarul 2.1 *Vectorul* $\overline{r''}(s)$ *este perpedicular pe* $\overline{r'}(s)$.

Din acest corolar şi definiţia normalei rezultă că vectorul $\overline{r''}(s)$ este pe normala la curbă.

Dacă notăm cu $\overline{\tau}$ şi $\overline{n}$ versorii tangentei la curbă teorema şi corolarul precdent se pot scrie astfel:

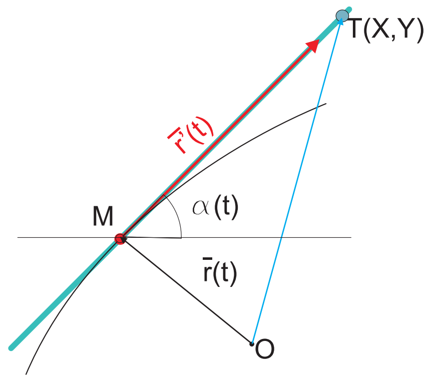
(1.2.5)
$$\frac{d\overline{r}}{ds} = \overline{\tau}$$
$$\frac{d\overline{\tau}}{ds} = K\overline{n}$$

unde K este funcţie de s care se va preciza.



2.5 Curbura unei curbe plane, ecuaţia intrinsecă a unei curbe plane

Fie Γ o curbă plană, $M(x(t), y(t))$ un punct de pe curbă, $\alpha(t)$ unghiul făcut de tangenta la curbă în punctul M cu axa Ox.



Definitia 2.5 *Se numeşte curbura curbei Γ în punctul M derivata unghiului α în raport cu parametrul natural al curbei:*

$$K = \frac{d\alpha}{ds}. \tag{1.2.6}$$

Teorema 2.5 *Dacă curba Γ este dată parametric atunci:*

$$K = \frac{x'(t)\, y''(t) - x''(t)\, y'(t)}{\left(\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\right)^3} \tag{1.2.7}$$

Demonstraţie: Deoarece

$$\alpha(t) = \operatorname{arctg} \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

avem:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} =$$

$$= \frac{\frac{\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'}{1+\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} =$$

$$= \frac{x'(t)\, y''(t) - x''(t)\, y'(t)}{\left(\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\right)^3}.$$

Remarca 2.6 *Dacă curba* Γ *este dată explicit atunci curbura se calculează conform:*

$$K = \frac{f''(x)}{\left(\sqrt{1 + f'^2(x)}\right)^3}$$

iar dacă este dată în coordonate polare:

$$K = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}.$$

Definitia 2.6 *Inversa curburii se numeşte raza de curbură.*

Definitia 2.7 *Se numeşte ecuaţia intrinsecă a unei curbe plane ecuaţia care defineşte curbura funcţie de* s *:*

$$K = K(s) \tag{EINCP}$$

Teorema 2.6 *O curbă plană este perfect determinată de ecuaţia ei intrinsecă.*

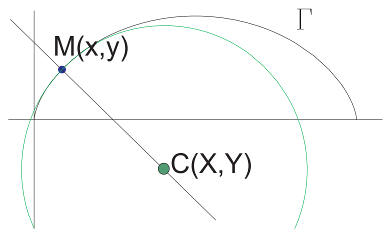
Demonstraţie: Din definiţia curburii rezultă:

$$\alpha(s) = \int K(s)\,ds$$

iar cu α astfel determinat, avem (de verificat):

$$\begin{cases} x(s) = \int \cos(\alpha(s))\,ds \\ y(s) = \int \sin(\alpha(s))\,ds \end{cases}.$$

Definitia 2.8 *Se numeşte cerc osculator la curba* Γ *în punctul* M *cercul care are centrul pe normala la curbă (în sensul determinat de versorul* $\overline{n}$ *) şi raza egală cu raza de curbură.*



Teorema 2.7 *Centrul cercului osculator are coordonatele:*

$$X = x(t) - y'(t)\frac{x'^2(t)+y'^2(t)}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}$$
(1.2.8)
$$Y = y(t) + x'(t)\frac{x'^2(t)+y'^2(t)}{x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)}$$

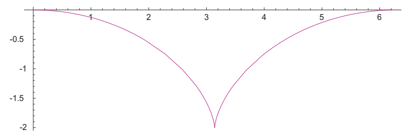
Definitia 2.9 *Se numeşte evoluta unei curbe plane locul geometric al centrelor de curbură.*

Remarca 2.7 *Ecuaţiile (1.2.8) reprezintă ecuaţiile parametrice ale evolutei.*

Exemplul 2.6 *Evoluta cicloidei*

$$\begin{cases} x = (t - \sin t) \\ y = (1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

este curba din desenul de mai jos:



Remarca 2.8 *Se poate demonstra că cercul osculator este poziţia limită a unui cerc care trece prin punctele M, M_1, M_2 de pe curbă când M_1 şi M_2 tind către M.*

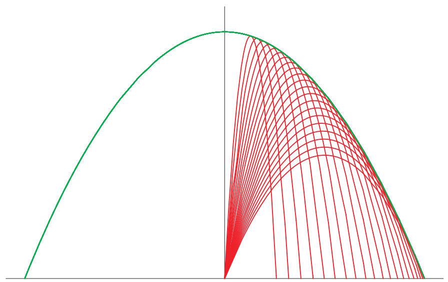
Definitia 2.10 *Se numeşte evolventa unei curbe* Γ *o curbă* Γ_1 *cu proprietatea că* Γ *este evoluta curbei* Γ_1.

2.6 Infăşurătoarea unei familii de curbe plane

Fie o familie de curbe plane care depind de un parametru p :

(1.2.9) $$F(x, y, p) = 0$$

Definitia 2.11 *Se numeşte înfăşurătoarea familie de curbe (1.2.9) o curbă cu proprietatea că fiecare punct al ei se află pe una din curbele familiei şi are aceeaşi tangentă cu curba respectivă din familie.*



Teorema 2.8 *Punctele de pe înfăşurătoarea familiei (1.2.9) verifică sistemul:*

(1.2.10) $$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ F'_p(x, y, p) = 0 \end{cases}.$$

Demonstraţie: Căutăm ecuaţia curbei sub forma:

$$F\left(x, y, p\left(x\right)\right) = 0$$

Panta tangentei la curbă pentru un x fixat este:

$$m = -\frac{F_x'\left(x, y, p\right) + F_p'\left(x, y, p\right) p'\left(x\right)}{F_y'\left(x, y, p\right)}$$

iar panta tangentei la curba din familie care trece prin acelaşi punct este:

$$m = -\frac{F_x'\left(x, y, p\right)}{F_y'\left(x, y, p\right)}$$

Egalând cele două fracţii rezultă că $F_p'\left(x, y, p\right) = 0$, care împreună cu ecuaţia familie de curbe implică (1.2.10).

Teorema 2.9 *Evoluta unei curbe este înfăşurătoarea familiei de normale la curbă.*