Geometria diferenţială a curbelor în spaţiu

A. U. Thor

0.1 Generalităţi

Definitia 1.1 *Se numeşte curbă în spaţiu dată parametric mulţimea punctelor* $M(x,y,z)$ *din spaţiu a căror coordonate sunt date de*

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad t \in [a,b] \\ z = z(t) \end{cases} \tag{0.1.1}$$

funcţiile reale x, y, z *fiind continue pe* $[a,b]$.

Definitia 1.2 *Se numeşte curbă în spaţiu dată vectorial mulţimea punctelor* $M(x,y,z)$ *din spaţiu pentru care vectorul de poziţie* $\overrightarrow{OM} = \overline{r}$ *este dat de:*

$$\overline{r} = \overline{r(t)} = x(t)\,\overline{i} + y(t)\,\overline{j} + z(t)\,\overline{k},\ t \in [a,b]$$

Remarca 1.1 *O curbă în spaţiu poate fi dată şi ca intersecţie de două suprafeţe, în anumit condiţii putându-se pune şi sub forma parametrică, ca în următorul exemplu:*

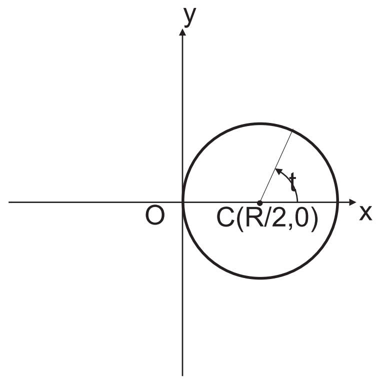
Exemplul 1.1 *(curba lui VIVIANI) Fie curba obţinută din intersecţia unei sfere cu un cilindru circular drept care trece prin centrul sferei şi are raza jumătate raza sferei. Să aflăm ecuaţiile parametrice, considerând că sfera are centrul în origine, raza* R *iar cilindrul are generatoarele paralele cu* Oz *şi centrul în* $(R/2, 0, 0)$ *.*
ecuaţia sferei este:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

iar a cilindrului:

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

Alegem ca şi parametru unghiul t *in parametrizarea cercului după care cilindrul intersectează planul* xOy *:*



$$x=\frac{R}{2}\cos t+\frac{R}{2}, y=\frac{R}{2}\sin t,\ t\in[0,2\pi]$$

înlocuind în ecuaţia sferei obţinem:

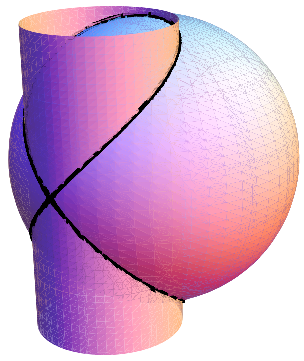
$$\left(\frac{R}{2}\cos t+\frac{R}{2}\right)^2+\left(\frac{R}{2}\sin t\right)^2+z^2=R^2$$

Făcând calculele rezultă:

$$z^2=\frac{R^2}{2}(1-\cos t)=R^2\sin^2\frac{t}{2}$$

deci curba VIVIANI are ecuaţiile parametrice:

$$x=\frac{R}{2}\cos t+\frac{R}{2}, y=\frac{R}{2}\sin t, z=\pm R\sin\frac{t}{2},\ t\in[0,2\pi]$$

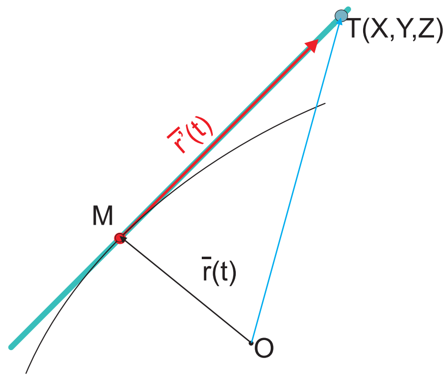


Remarca 1.2 *în cele ce urmează vom nota cu litere mici coordonatele unui punct de pe curbă şi cu litere mari coordonatele unui punct de pe planele sau dreptele ataşate curbei în punctul respectiv.*

0.2 Tangenta şi planul normal la o curbă în spaţiu

Definiţia tangentei la o curbă în spaţiu este aceeaşi ca la o curbă plană:

Definitia 2.1 *Se numeşte tangentă la curba* Γ *în punctul* M *poziţia limită a dreptei determinată de punctele* M *şi* M_1 *de pe curbă când punctul* M_1 *tinde către* M_1*. (dacă această limită există).*



1

Teorema 2.1 *Dacă funcţiile x, y, z sunt derivabile în t şi*

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0$$

atunci ecuaţia tangentei la curbă este (coordonatele unui punct de pe tangentă fiind notate cu (X, Y, Z)):

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t)}{z'(t)} \qquad \text{(ETPS)}$$

Demonstraţie: Conform definiţiei derivatei unui vector şi a tangentei, dacă T aparţine tangentei (vezi figura precedentă) atunci vectorii $\overrightarrow{MT}$ şi $\overline{r'}(t)$ sunt coliniari, deci coordonatele lor sunt proporţionale:

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t)}{z'(t)}$$

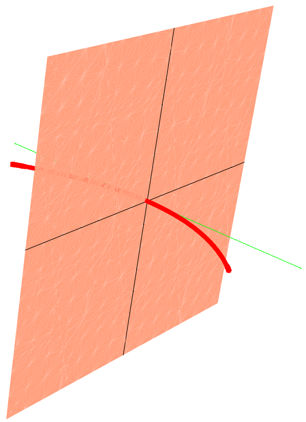
adică tocmai ecuaţia (ETPS).

Definitia 2.2 *Se numeşte* plan normal *la curba* Γ *în punctul* M *planul care trece prin* M *şi este perpendicular pe tangenta la* Γ *în* M.

Teorema 2.2 *Ecuaţia planului normal la curba* Γ *în punctul* M *este:*

$$x'(t)(X - x(t)) + y'(t)(Y - y(t)) + z'(t)(Z - z(t)) = 0.$$

Demonstraţie: Rezultă din definiţia planului normal şi ecuaţia planului determinat de un punct şi un vector perpendicular pe el.



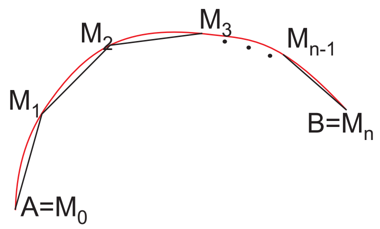
0.3 Lungimea unui arc de curbă, parametrul natural al unei

curbe

Fie curba Γ dată parametric:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad t \in [a,b] \\ z = z(t) \end{cases}$$

Ne propunem să definim lungimea acestei curbe, precum şi o formulă de calcul pentru lungime.



Pentru aceasta înscriem în curba Γ linia poligonală $M_0 M_1 ... M_n$ (vezi figura precedentă).

Definitia 3.1 *Se numeşte lungimea curbei Γ limita lungimii liniei poligonale $M_0 M_1 ... M_n$ când $n \to \infty$ şi lungimea celui mai mare segment de pe linia poligonală tinde la zero.*

Teorema 3.1 *Dacă funcţiile $x(t), y(t), z(t)$ au derivată continuă atunci curba Γ are* *lungime finită, dată de:*

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\mathrm{dt} \tag{LCS}$$

Demonstraţie: lungimea liniei poligonale $M_0 M_1 ... M_n$ este dată de (t_i este valoarea parametrului t corespunzătoare punctului M_i):

$$\begin{aligned} l_n &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(x(t_i) - x(t_{i-1})\right)^2 + \left(y(t_i) - y(t_{i-1})\right)^2 + \left(z(t_i) - z(t_{i-1})\right)^2} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\zeta_i) + z'^2(\theta_i)} \end{aligned}$$

unde $\xi_i, \zeta_i, \theta_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Se demonstrează la analiză matematică că limita lui l_n când $n \to \infty$ şi $\max_{i=\overline{1,n}} |t_i - t_{i-1}| \to 0$ este tocmai integrala din partea dreaptă a egalităţii (LCS).$\square$

Definitia 3.2 *Se numeşte parametrul natural s al curbei Γ lungimea arcului de curbă AM, A fiind punctul de coordonate $(x(a), y(a), z(a))$, iar M punctul de coordonate $(x(t), y(t), z(t))$.*

Din teorema precedentă rezultă imediat:

Propozitia 3.1 *Parametrul natural al curbei este dat de:*

$$s=\int_a^t \sqrt{x'^2(\tau)+y'^2(\tau)+z'^2(\tau)}d\tau. \tag{0.3.1}$$

Remarca 3.1 *Dacă în loc de parametrul t se consideră ca şi parametru parametrul natural s se obţine o parametrizare echivalentă a curbei (vezi remarca* **??***), numită parametrizarea naturală:*

$$\overline{r}(s)=x(s)\,\overline{i}+y(s)\,\overline{j}+z(s)\,\overline{k},\ s\in[0,l(\Gamma)]\,. \tag{0.3.2}$$

Teorema 3.2 *Dacă curba Γ este parametrizată natural atunci:*

$$\left|\overline{r'}(s)\right|=1. \tag{0.3.3}$$

Demonstraţie:

$$\begin{aligned}
\overline{r'}(s) &= x'(s)\,\overline{i}+y'(s)\,\overline{j}+z'(s)\,\overline{k}= \\
&= \frac{dt}{ds}x'(t)\,\overline{i}+\frac{dt}{ds}y'(t)\,\overline{j}+\frac{dt}{ds}z'(t)\,\overline{k}= \\
&= \frac{x'(t)\,\overline{i}+y'(t)\,\overline{j}+z'(t)\,\overline{k}}{\frac{ds}{dt}}= \\
&= \frac{x'(t)\,\overline{i}+y'(t)\,\overline{j}+z'(t)\,\overline{k}}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}}
\end{aligned}$$

de unde calculând modulul rezultă formula (0.3.3).

Din teorema precedentă şi corolarul 3.1 rezultă:

Corolarul 3.1 *Vectorul* $\overline{r''}\left(s\right)$ *este perpedicular pe* $\overline{r'}\left(s\right)$ *.*

0.4 Reperul şi formulele lui Frenet

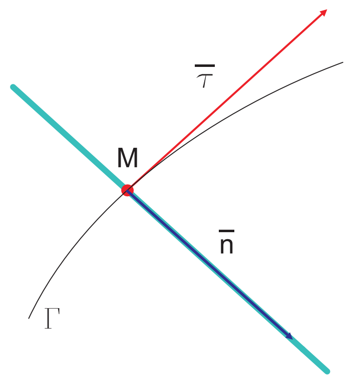
Din corolarul 3.1 rezultă, notând cu $\overline{\tau}$ versorul tangentei şi cu $\overline{n}$ versorul lui $\overline{r''}\left(s\right)$, :

(0.4.1)
$$\frac{d\overline{\tau}}{ds} = K\overline{n}$$

unde K este funcţie de s care se va preciza.

Definitia 4.1 *Se numeşte* normala principală *la curba* Γ *în punctul* M *dreapta care trece prin* M *şi are ca vector director versorul* $\overline{n}$*(versorul normlei principale).*

Definitia 4.2 *Se numeşte* curbura *curbei* Γ *în punctul* M *lungimea vectorului* $\frac{d\overline{\tau}}{ds}$ *(adică* K *din formula (0.4.1))*

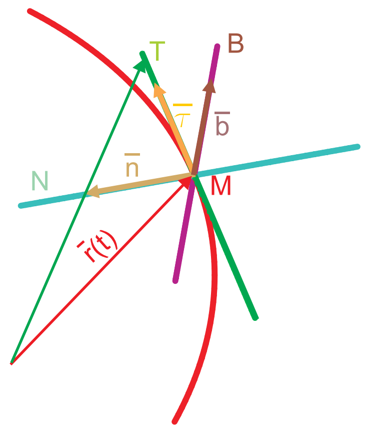


Definitia 4.3 *Se numeşte* versorul binormalei *la curba* Γ *în punctul* M *versorul* $\overline{b}$ *definit de:*

$$\overline{b} = \overline{\tau} \times \overline{n}$$

şi se numeşte binormala *la curba* Γ *în punctul* M *dreapta dreapta care trece prin* M *şi are ca vector director versorul* $\overline{b}$.

Definitia 4.4 *Se numeşte* reperul lui Frenet *la curba* Γ *în punctul* M *reperul* $\left\{M, \overline{\tau}, \overline{n}, \overline{b}\right\}$.



Reperul lui Frenet

Să calculăm acum derivatele versorilor reperului lui Frenet în raport cu parametrul natural al curbei Γ. Derivata lui $\overline{\tau}$ este(vezi 0.4.1):

$$\frac{d\overline{\tau}}{ds} = K\overline{n}$$

Derivata lui $\overline{b}$ este un vector perpendicular pe $\overline{b}$ şi:

$$\begin{aligned}\frac{d\overline{b}}{ds} &= \frac{d\overline{\tau}}{ds} \times \overline{n} + \overline{\tau} \times \frac{d\overline{n}}{ds} = \\ &= K\overline{n} \times \overline{n} + \overline{\tau} \times \frac{d\overline{n}}{ds} = \\ &= \overline{\tau} \times \frac{d\overline{n}}{ds}\end{aligned}$$

deci $\frac{d\overline{b}}{ds}$ este perpendicular şi pe $\overline{\tau}$. Prin urmare $\frac{d\overline{b}}{ds}$ este coliniar cu $\overline{n}$ (a doua formulă a lui Frenet):

(0.4.2)
$$\frac{d\overline{b}}{ds} = -T\overline{n}$$

Definitia 4.5 *Se numeşte* torsiunea *curbei* Γ *în punctul* M *funcţia* T *de* s *definită de* $(0.4.2)$.

Să calculăm acum $\frac{d\overline{n}}{ds}$. Deoarece
$$\overline{n} = \overline{b} \times \overline{\tau}$$
avem:
$$\begin{aligned} \frac{d\overline{n}}{ds} &= \frac{d\overline{b}}{ds} \times \overline{\tau} + \overline{b} \times \frac{d\overline{\tau}}{ds} = \\ &= -T\overline{n} \times \overline{\tau} + \overline{b} \times K\overline{n} = \\ &= T\overline{b} - K\overline{\tau}. \end{aligned}$$
Am obţinut astfel cea de a treia formulă a lui Frenet:

(0.4.3)
$$\frac{d\overline{n}}{ds} = -K\overline{\tau} + T\overline{b}.$$

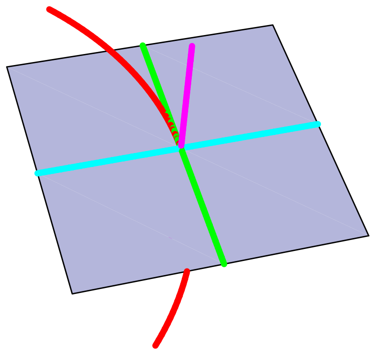
Remarca 4.1 *Cele trei formule a lui Frenet se pot reţine uşor sub forma unui tabel:*

(0.4.4)

	$\overline{\tau}$	$\overline{n}$	$\overline{b}$
$\frac{d\overline{\tau}}{ds}$	0	K	0
$\frac{d\overline{n}}{ds}$	$-K$	0	T
$\frac{d\overline{b}}{ds}$	0	$-T$	0

0.5 Triedrul lui Frenet

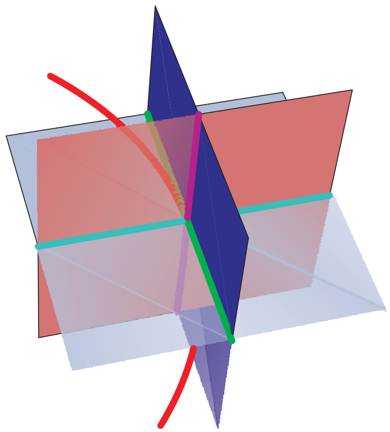
Definitia 5.1 *Se numeşte* plan osculator *la curba* Γ *în punctul* M *planul determinat de punctul* M *şi versorii* $\overline{\tau}, \overline{n}$.



Remarca 5.1 *Se demonstrează că planul osculator este poziţia limită a unui plan care trece prin punctele* M, M_1, M_2 *când* M_1, M_2 *tind (pe* Γ) *către* M.

Definitia 5.2 *Se numeşte* plan rectifiant *la curba* Γ *în punctul* M *planul determinat de punctul* M *şi versorii* $\overline{\tau}$, $\overline{b}$.

Definitia 5.3 *Se numeşte* triedrul lui Frenet *la curba* Γ *în punctul* M *triedrul format din planul osculator, planul normal şi planul rectifiant în punctul* M, *precum şi din dreptele de intersecţie ale acestor plane: binormala, tangenta, normala principală.*



Triedrul lui Frenet

Să presupunem acum că curba Γ este dată parametric:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \quad t \in [a, b] \\ z = z(t) \end{cases}$$

Ne propunem să aflăm ecuaţiile elementelor triedrului lui Frenet în funcţie de t.
Ecuaţiile tangenta şi planului normal sunt deja aflate.
Avem:

$$\overline{\tau} = \frac{d\overline{r}}{ds} = \frac{\overline{r'(t)}}{\frac{ds}{dt}}$$

$$\frac{d\overline{\tau}}{ds} = \frac{\left(\frac{\overline{r'(t)}}{\frac{ds}{dt}}\right)'_t}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\overline{r''(t)}\frac{ds}{dt} - \frac{d^2s}{dt^2}\overline{r'(t)}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}$$

Din ultima egalitate şi prima formulă a lui Frenet rezultă că $\overline{n}$ este coplanar cu $\overline{r''(t)}$ şi $\overline{r'(t)}$, deci planul osculator este planul determinat de M, $\overline{r''(t)}$ şi $\overline{r'(t)}$, prin urmare ecuaţia sa este:

$$\begin{vmatrix} X - x(t) & Y - y(t) & Z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(EPLO)}$$

Din ecuaţia precedentă rezultă ecuaţiile binormalei, ca dreaptă perpendiculară pe planul osculator:

$$\frac{X-x(t)}{\begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix}}=\frac{Y-y(t)}{\begin{vmatrix} z'(t) & x'(t) \\ z''(t) & x''(t) \end{vmatrix}}=\frac{Z-z(t)}{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}} \tag{EB}$$

Planul rectifiant are ca şi normală normala principală:

$$\overline{n}=\overline{b}\times\overline{\tau}$$

Din cele de mai sus rezultă că $\overline{n}$ este paralel cu

$$\left(\overline{r'(t)}\times\overline{r''(t)}\right)\times\overline{r'(t)} = \begin{array}{ccc} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z'(t) & x'(t) \\ z''(t) & x''(t) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix} \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \end{array} =$$

$$= A\overline{i}+B\overline{j}+C\overline{k}$$

Prin urmare ecuaţia planului rectifiant este:

$$A\left(X-x(t)\right)+B\left(Y-y(t)\right)+C\left(Z-z(t)\right)=0 \tag{EPR}$$

iar ecuaţiile normalei principale sunt:

$$\frac{X-x(t)}{A}=\frac{Y-y(t)}{B}=\frac{Z-z(t)}{C} \tag{ENP}$$

0.6 Calculul curburii şi torsiunii

Teorema 6.1 *Dacă curba Γ este dată vectorial:*

$$\overline{r\left(t\right)}=x\left(t\right)\overline{i}+y\left(t\right)\overline{j}+z\left(t\right)\overline{k},\ t\in\left[a,b\right]$$

atunci:

$$K=\frac{\left|\overline{r'\left(t\right)}\times\overline{r''\left(t\right)}\right|}{\left|\overline{r'\left(t\right)}\right|^{3}}$$

$$T=\frac{\left(\overline{r'\left(t\right)},\overline{r''\left(t\right)},\overline{r'''\left(t\right)}\right)}{\left|\overline{r'\left(t\right)}\times\overline{r''\left(t\right)}\right|^{2}}$$

Teorema 6.2 *Dacă curbura unei curbe este identic nulă, atunci curba este un segment dintr-o dreaptă.*

Teorema 6.3 *Dacă torsiunea unei curbe este identic nulă, atunci curba este o curbă plană, planul curbei fiind planul osculator în un punct arbitrar.*