2.3 Geometria analitică liniară în spaţiu

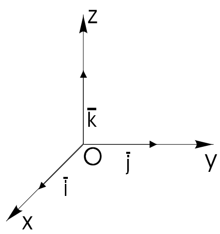
Pentru început să definim câteva noţiuni de bază în geometria analitică.

Definitia 2.3.1 *Se numeşte reper în spaţiu o mulţime formată dintr-un punct O (numit originea reperului) şi o bază din $\mathfrak{V}_3$. Dacă baza este ortonormată reperul se va numi ortonormat.*

Remarca 2.3.1 În cele ce urmează vom considera numai repere în care baza este ortonormată şi direct orientată. Un astfel de reper, conform notaţiilor din sectiunea 2 se va nota cu $\left\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$.

Definitia 2.3.2 *Se numeşte vector de poziţie al unui punct M din spaţiu într-un reper vectorul care are ca reprezentant segmentul orientat $\overrightarrow{OM}$. Se numesc coordonatele unui punct M într-un reper coordonatele vectorului de poziţie al punctului M în baza din reper.*

Remarca 2.3.2 Dacă avem dat reperul $\left\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$ atunci coordonatele punctului M se notează (x, y, z) şi sunt definite de egalitatea: $\overrightarrow{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Vom scrie în continuare $M\,(x, y, z)$ şi vom citi ”punctul M de coordonate (x, z, y)”. Dreptele orientate determinate de O şi versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$ respectiv $\bar{k}$ se vor nota cu Ox, Oy respectiv Oz şi se vor numi axele de coordonate, iar uneori vom folosi denumirea ”reperul $Oxyz$” în loc de reperul $\left\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$, denumire ”justificată” şi de desenul de mai jos:



2.3.1 Planul în spaţiu

În această secţiune vom studia planul din punct de vedere al geometrie analitice, adică vom răspunde la întrebările: Dacă un punct $M\,(x, y, z)$ este într-un anumit plan, ce relaţii există între coordonatele sale? Cum se reflectă asupra coordonatelor punctelor din plan proprietăţi geometrice ale planului respectiv?. Pentru început vom răspunde la prima întrebare:

Diferite determinări ale planului

Vom studia ce condiţii verifică coordonatele unui punct situat într-un plan care este definit prin anumite condiţii geometrice:

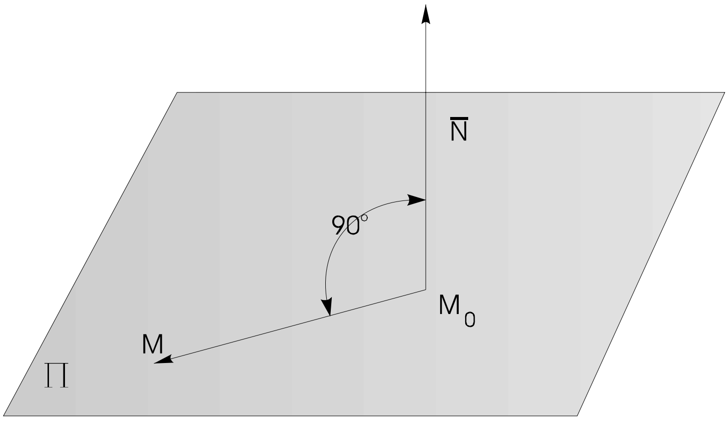
Plan determinat de un punct şi un vector perpendicular pe plan

Fie punctul M_0 şi vectorul $\overline{N}$ ($\overline{N} \neq \overline{0}$). Din geometria de liceu se ştie că există un singur plan, pe care îl vom nota cu Π care trece prin punctul M_0 şi este perpendicular pe vectorul $\overline{N}$. Fie acum un punct M arbitrar din planul Π. Este adevărată următoarea teoremă:

Teorema 2.3.1 $M \in \Pi$ *dacă şi numai dacă este adevărată următoarea egalitate:*

$$\overrightarrow{MM_0} \cdot \overline{N} = 0. \tag{2.3.1}$$

Demonstraţie. Conform figurii de mai jos (în care $M_0 \in \Pi$, $\overline{N} \perp \Pi$,sunt date, iar M este un punct arbitrar din planul Π):



punctul M aparţine planului Π dacă şi numai dacă vectorii $\overline{N}$ şi $\overrightarrow{M_0M}$ sunt perpendiculari[7], ceea ce, conform remarcii 2.1.13 este echivalent cu egalitatea (2.3.1). ■

Să transcriem acum egalitatea (2.3.1) folosind coordonatele. Pentru aceasta să notăm coordonatele punctului M_0 cu (x_0, y_0, z_0), coordonatele punctului M cu (x, y, z) şi coordonatele vectorului $\overline{N}$ cu (A, B, C). Atunci, pe baza teoremei 2.2.4 şi a definiţiei coordonatelor unui punct (definiţia 2.3.2) $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\,\overline{i} + (y - y_0)\,\overline{j} + (z - z_0)\,\overline{k}$ şi deci $\overrightarrow{M_0M} \cdot \overline{N} = (x - x_0)\,A + (y - y_0)\,B + (z - z_0)\,C$, care înlocuită în membrul stâng al egalităţii (2.3.1) ne conduce la ecuaţia:

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0 \tag{2.3.2}$$

Dacă în ecuaţia de mai sus notăm $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$ rezultă că punctul $M\,(x, y, z)$ aparţine planului Π dacă şi numai dacă coordonatele sale verifică ecuaţia:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{EGP}$$

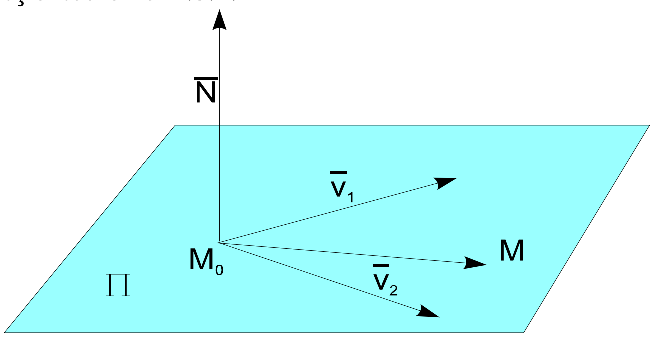
Ecuaţia (EGP) se numeşte ecuaţia generală a planului în spaţiu (cu condiţia $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, pentru că $\overline{N} \neq \overline{0}$).

Example 2.3.1 *Ne propunem să aflăm ecuaţia planului xOy. Acest plan este determinat de punctul $O\,(0, 0, 0)$ şi are ca vector normal versorul $\overline{k}$, deci $A = 0, B = 0, C = 1$. Înlocuind în formula (2.3.2) obţinem ecuaţia planului xOy* :

$$z = 0. \tag{2.3.3}$$

Plan determinat de un punct şi doi vectori necoliniari paraleli cu planul

Fie un punct $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ şi vectorii $\overline{v}_1 = a_1\overline{i} + b_1\overline{j} + c_1\overline{k}$, $\overline{v}_2 = a_2\overline{i} + b_2\overline{j} + c_2\overline{k}$ necoliniari (adică, conform remarcii 2.1.15 $\overline{v}_1 \times \overline{v}_2 \neq \overline{0}$). Ne propunem să aflăm ce ecuaţie (sau ecuaţii) verifică coordonatele unui punct $M\,(x, y, z)$ care aparţine unui plan Π care conţine punctul M_0 şi este paralel cu vectorii $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$. Figura de mai jos ilustrează ideea demonstraţiei teoremei 2.3.2:



Analogul teoremei 2.3.1 este:

[7] conform geometriei din liceu, o dreaptă este peroendiculară pe un plan dacă şi numai dacă este perpendiculară pe orice dreaptă din plan.

Teorema 2.3.2 *Punctul M aparţine planului Π dacă şi numai dacă este verificată ecuaţia:*

$$\left(\overrightarrow{MM_0}, \bar{v}_1, \bar{v}_2\right) = 0 \tag{2.3.4}$$

Demonstraţie. Punctul M aparţine planului Π dacă şi numai dacă vectorii $\overrightarrow{MM_0}, \bar{v}_1, \bar{v}_2$ sunt coplanari, ceea ce este echivalent cu egalitatea (2.3.4), conform remarcii 2.1.16.

Folosind coordonatele egalitatea (2.3.4) se scrie, conform operaţiilor cu vectori (vezi formula (2.2.7)):

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0. \blacksquare \tag{2.3.5}$$

Plan determiant de trei puncte necoliniare

Fie punctele $M_i\left(x_i, y_i, z_i\right), i = \overline{1,3}$ necoliniare (adică vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$ şi $\overrightarrow{M_1M_3}$ sunt necoliniari, sau folosind operaţii cu vectori, conform remarcii 2.1.12, $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} \neq \overline{0}$). Ecuaţia planului determinat de cele trei puncte este dată de:

Teorema 2.3.3 *Planul Π care trece prin punctele $M_i\left(x_i, y_i, z_i\right), i = \overline{1,3}$ necoliniare are ecuaţia:*

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.3.6}$$

Demonstraţie.Varianta 1. (geometrică) Reducem problema la cazul precedent, considerând că planul Π este determinat de punctul M_1 şi vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$ şi $\overrightarrow{M_1M_3}$. Conform formulei (2.3.5) ecuaţia planului este:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ecuaţie care se poate scrie:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

adunând în determinantul de mai sus linia a doua la celelalte linii obţinem ecuaţia (2.3.6).

Varianta a 2-a. (algebrică) Ecuaţia planului Π (vezi (EGP)) este:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2.3.7}$$

A determina ecuaţia planului Π se reduce la a determina coeficienţii A, B, C, D din ecuaţia de mai sus. Scriind că punctele $M_i, i = \overline{1,3}$ verifică această ecuaţie rezultă:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0. \end{cases} \tag{2.3.8}$$

Rezolvând acest sistem cu necunoscutele A, B, C (care are determinantul nenul din condiţia de necoliniaritate a punctelor M_1, M_2, M_3) şi înlocuind în (2.3.7) rezultă ecuaţia palnului Π . În loc să procedăm aşa, cosiderăm sistemul omogen (cu necunoscutele A, B, C, D) format din sistemul (2.3.8) şi ecuatia (2.3.7), sistem care are soluţie nenulă. Condiţia ca acest sistem să aibă soluţie nenulă este ca determinantul său să fie egal cu 0 , adică tocmai ecuaţia (2.3.6). $\blacksquare$

Poziţia relativă a două plane, unghiul a două plane

Fie planele Π_1, Π_2 de ecuaţii:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Poziţia relativă a celor două plane, determinată pe baza ecuaţiilor (2.3.9), este dată de :

Teorema 2.3.4 *Planele* Π_1, Π_2 *sunt paralele, dacă*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}, \tag{2.3.10}$$

coincid dacă:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \tag{2.3.11}$$

şi au o dreaptă comună dacă rangul matricei $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}$ *este doi.*

Demonstraţie. Dacă rangul matricei $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}$ este doi atunci sistemul (2.3.9) format din ecuaţiile celor două plane este simplu nederminat, iar soluţile sale sunt coordonatele punctelor de pe o dreaptă (va urma). Dacă rangul matricei precedente este unu, atunci sistemul (2.3.9) este incompatibil, dacă rangul matricei extinse este doi, ceea ce este echivalent cu (2.3.10), şi deci planele sunt paralele, sau sistemul (2.3.9) este compatibil cu rangul matricei extinse egal cu doi, ceea ce e echivalent cu (2.3.11), şi în acest caz cele două ecuaţii se obţin una din cealaltă prin înmulţirea cu o constantă, deci reprezintă acelaşi plan. ■

Remarca 2.3.3 Dacă se ţine cont de semnificaţia geometrică a coeficienţilor lui x, y, z din (EGP) (ei sunt coordonatele normalei la plan), atunci egalitatea primelor trei rapoarte din (2.3.10),(2.3.11) nu este altceva decât paralelismul normalelor la plane.

Unghiul a două plane se defineşte astfel:

Definitia 2.3.3 *Unghiul planelor* Π_1, Π_2 *date prin ecuaţiile (2.3.9) este unghiul dintre normalele la cele două plane* $\overline{N_1} = A_1\overline{i} + B_1\overline{j} + C_1\overline{k}$, $\overline{N_2} = A_2\overline{i} + B_2\overline{j} + C_2\overline{k}$.

Teorema 2.3.5 *Dacă notăm cu* α *unghiul celor două plane, atunci:*

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Demonstraţia formulei de mai sus este simplă, rezultând direct din definiţia precedentă şi din formula (2.2.10) care dă unghiul a doi vectori pe baza coordonatelor.

Din teorema de mai sus rezultă:

Corolarul 2.3.1 *Planele* Π_1, Π_2 *date prin ecuaţiile (2.3.9) sunt perpendiculare dacă şi numai dacă:*

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

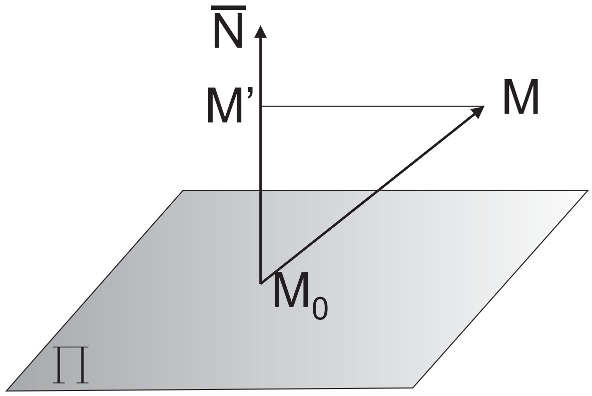
Distanţa de la un punct la un plan

Fie planul Π de ecuaţie (EGP), şi punctul $M\,(x_1, y_1, z_1)$.

Teorema 2.3.6 *Distanţa de la punctul* M_1 *la planul* Π *este egală cu:*

$$dist(M, \Pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{2.3.12}$$

Demonstraţie. Să facem figura:

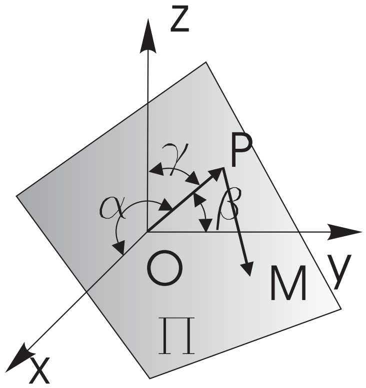


în figura de mai sus $\overline{N} = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}$ este normala la planul Π, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct din plan (deci coordonatele sale verifică ecuaţia planului), iar M' este proiecţia punctului M pe normală. Conform geometriei "clasice" distanţa de la M la planul Π este egală cu lungimea segmentului M_0M'. Dar din proprietăţile produsului scalar avem:

$$\begin{aligned} M_0M' &= \frac{\left|\overline{N} \cdot \overrightarrow{M_0M}\right|}{N} = \\ &= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\ &= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cy_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\ &= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \blacksquare \end{aligned}$$

Ecuaţia normală a unui plan (Hesse)

Fie Π un plan pentru care se cunoaşte distanţa de la origine la plan d şi unghiurile α, β, γ făcute de perpendiculara coborâtă din origine pe plan. Să notăm cu P piciorul perpendicularei coborâte din origine pe plan şi cu $M(x, y, z)$ un punct arbitrar din plan.



Din datele cunoscute avem $\overrightarrow{OP} = d\left(\cos\alpha\overline{i} + \cos\beta\overline{j} + \cos\gamma\overline{k}\right)$, iar condiţia ca $M \in \Pi$ este echivalentă cu $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PM} = 0$. Transcriind această egalitate în coordonate avem:

$$d\left(\cos\alpha(-d\cos\alpha + x) + \cos\beta\left(-d\cos\beta + y\right) + \cos\gamma\left(-d\cos\gamma + z\right)\right) = 0$$

sau făcând calculele şi ţinând cont că $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, rezultă că coordonatele punctului M verifică ecuaţia:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - d = 0 \tag{2.3.13}$$

Ecuaţia (2.3.13) se numeşte ecuaţia normală a planului (sau forma Hesse).

Remarca 2.3.4 Din ecuaţia generală a planului se ajunge la ecuaţia normală a planului prin împărţirea ecuaţiei (EGP) cu $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, alegând semnul astfel ca în ecuaţia obţinută termenul liber să fie negativ.

Remarca 2.3.5 O altă formă a ecuaţiei planului este aşa numita "ecuaţia planului prin tăieturi" de forma:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$$

care se obţine din (EGP) prin împărţirea cu $-D$. Numitorii din ecuaţia de mai sus sunt tocmai coordonatele punctelor de intersecţie cu axele (adică planul intersectează axa Ox în punctul $(a,0,0)$, axa Oy în punctul $(0,b,0)$ şi axa Oz în $(0,0,c)$).

Exercitiul 3.1 Să se afle latura cubului care are două feţe în planele $x+2y+2z-6=0, x+2y+2z+3=0.$