

2.1 Sfera

Definitia 1.1 Se numește sferă mulțimea tuturor punctelor din spațiu pentru care distanța la un punct fix numit centrul sferei este egală cu un număr numit raza sferei.

Fie centrul sferei $C(a, b, c)$ și raza sferei R .

Teorema 1.1 Punctul $M(x, y, z)$ aparține sferei dacă și numai dacă coordonatele sale verifică ecuația:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \quad (2.1.1)$$

Demonstrație: distanța de la M la C este egală cu $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$ care egalată cu R este echivalentă cu (2.1.1). \square

Dacă în ecuația de mai sus se fac calculele și se reduc termenii asemenea obținem:

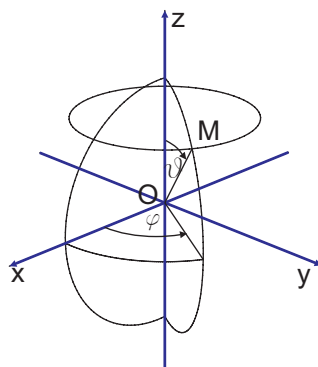
$$x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0 \quad (EGS)$$

ecuație care poartă denumirea de **ecuația generală a sferei**. (EGS) reprezintă o sferă cu centrul în punctul $C(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, -\frac{p}{2})$ și de rază $R = \sqrt{(\frac{m}{2})^2 + (\frac{n}{2})^2 + (\frac{p}{2})^2 - q}$ dacă expresia de sub radical este pozitivă.

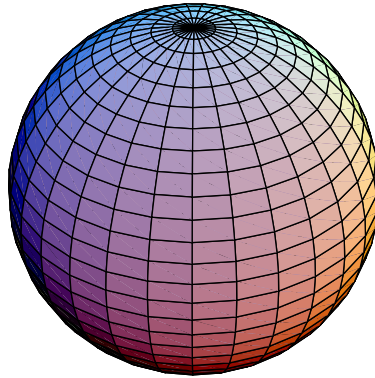
Remarca 1.1 Sfera se mai poate da și folosind ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \sin \vartheta + a \\ y = R \sin \varphi \sin \vartheta + b \\ z = R \cos \vartheta + c \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, \pi] \quad (EPS)$$

unde parametrii sunt unghiurile φ, ϑ din figura de mai jos:



pentru φ constant se obțin pe sferă jumătăți de cercuri mari ("meridiane"), iar pentru ϑ constant se obțin pe sferă cercuri ("paralele").



Legat de sferă ne propunem să determinăm ecuația unui plan tangent la sferă într-un punct de pe sferă. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct pe sferă.

Teorema 1.2 Ecuația planului tangent la sferă în punctul M_0 este:

$$(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) + (z - c)(z_0 - c) = R^2 \quad (\text{EPTS})$$

Demonstrație: Planul tangent la sferă în M_0 este determinat de M_0 și normala $\overrightarrow{CM_0}$ (planul este perpendicular pe rază), deci ecuația sa este:

$$(x - x_0)(x_0 - a) + (y - y_0)(y_0 - b) + (z - z_0)(z_0 - c) = 0$$

Dar $x - x_0 = (x - a) - (x_0 - a)$, .. care înlocuite în ecuația de mai sus dau:

$$(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) + (z - c)(z_0 - c) - \left((x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2 \right) = 0$$

Ținând cont de faptul că coordonatele lui M_0 verifică ecuația sferei, rezultă (EPTS). \square

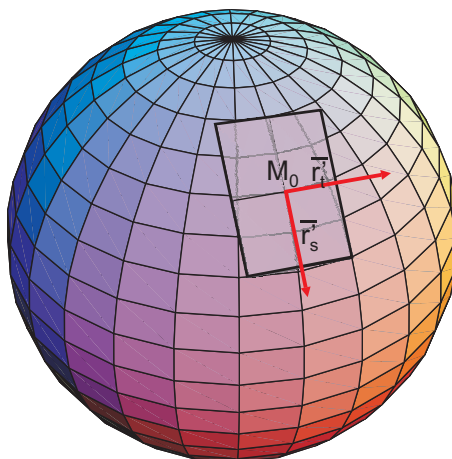
Remarca 1.2 Ecuația planului tangent la sferă se obține din (EGS) prin dedublare :

$$(x - a)^2 = (x - a)(x - a) \rightarrow (x - a)(x_0 - a), \dots$$

Remarca 1.3 Dacă sfera este dată sub formă generală atunci ecuația planului tangent în punctul M_0 de pe sferă este:

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 + m \frac{x + x_0}{2} + n \frac{y + y_0}{2} + p \frac{z + z_0}{2} + q = 0$$

dedublarea fiind: $x^2 = xx \rightarrow xx_0$, $x = \frac{x+x}{2} \rightarrow \frac{x+x_0}{2}$.



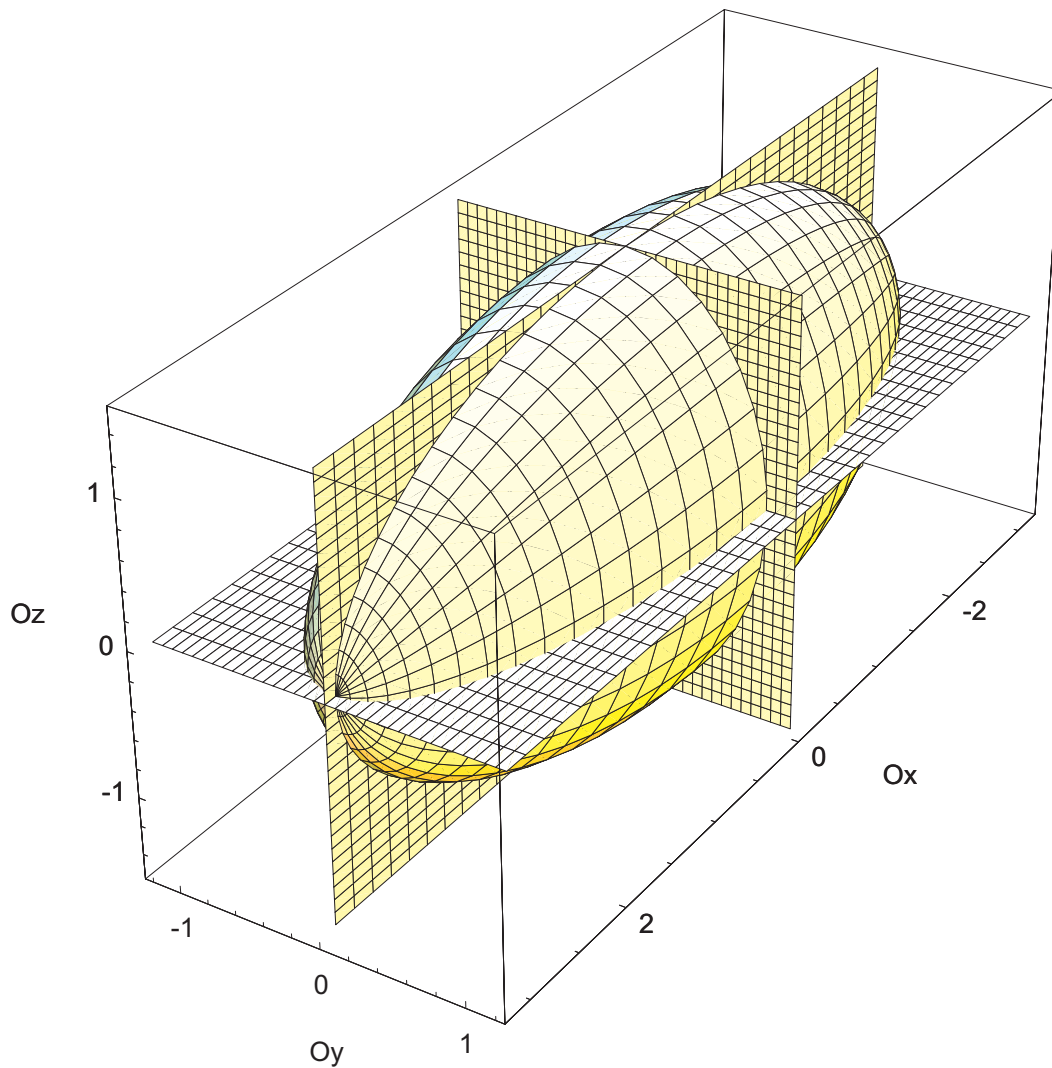
Remarca 1.4 In general un plan este tangent la sferă dacă distanța de la centrul sferei la plan este egală cu raza.

2.2 Cuadrice pe ecuații reduse

2.2.1 Elipsoid

Definitia 2.1 Se numește elipsoid mulțimea punctelor din spațiu care într-un sistem de coordonate bine ales verifică ecuația:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (\text{Elips})$$



Pentru a studia suprafața dată vom afla intersecțiile ei cu planele de coordonate și cu plane paralele cu planele de coordonate. Un calcul simplu ne conduce la:

Teorema 2.1 *Intersecția elipsoidului cu planul xOy este elipsa de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, iar cu plane paralele cu xOy , $z = \gamma$, este elipsa de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\gamma^2}{c^2}$, pentru $|\gamma| < c$, un punct pentru $|\gamma| = c$ și vidă pentru $|\gamma| > c$.*

Remarca 2.1 Este devărată o teoremă analogă pentru intersecția cu plane paralele cu celelate plane de coordonate.

Remarca 2.2 Axele de coordonate și planele de coordonate sunt axe, respectiv plane de simetrie pentru elipsoid. (adică dacă un punct se află pe elipsoid și simetricu său față de axe, respectiv plane se află pe elipsoid (două puncte sunt simetrice față de o dreaptă sau plan dacă mijlocul segmentului care le unește este pe dreaptă sau plan și acest segment este perpendicular pe dreaptă, respectiv plan).

Dacă avem un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pe elipsoid, atunci:

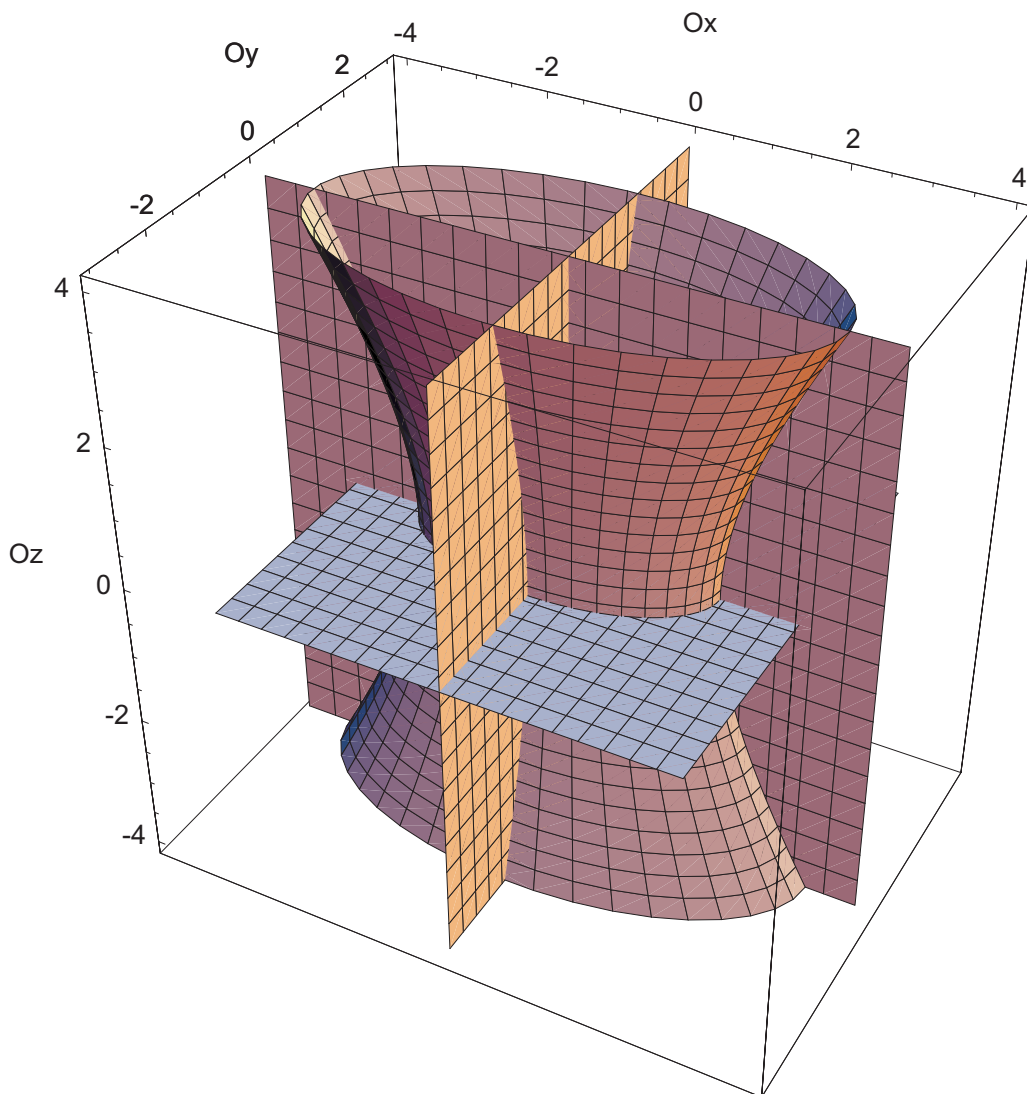
Teorema 2.2 *Ecuația planului tangent la elipsoid în M_0 este:*

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

2.2.2 Hiperboloidul cu o pânză

Definiția 2.2 Se numește hiperboloid cu o pânză mulțimea punctelor din spațiu care într-un sistem de coordonate bine ales verifică ecuația:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (\text{HIP1})$$



Un calcul simplu ne conduce la:

Teorema 2.3 Intersecția hiperboloidului cu o pânză cu plane paralele cu xOy , $z = \gamma$, este o familie de elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\gamma^2}{c^2}.$$

Teorema 2.4 Intersecția hiperboloidului cu o pânză cu plane paralele cu xOz , $y = \beta$, este o familie de hiperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{\beta^2}{b^2}.$$

Teorema 2.5 Intersecția hiperboloidului cu o pânză cu plane paralele cu yOz , $x = \alpha$, este o familie de hiperbole:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{a^2}.$$

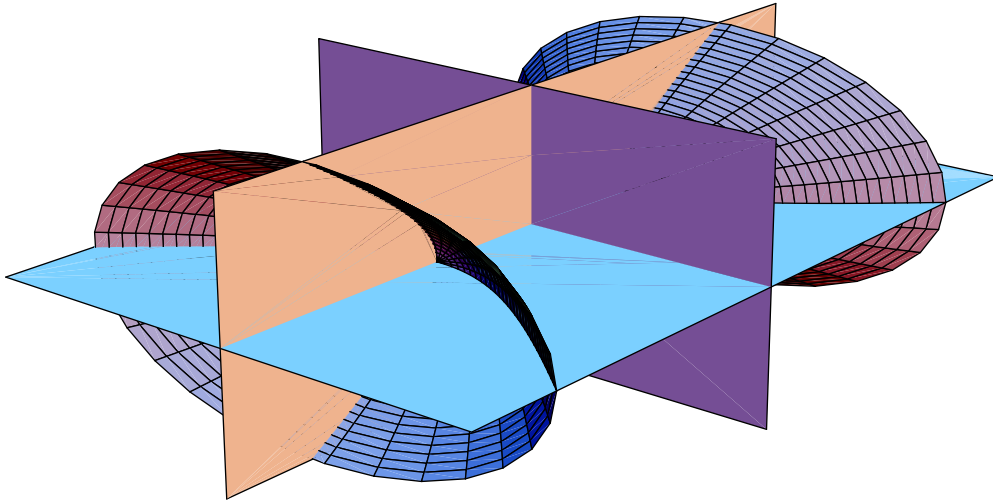


Figura 2.2.1.

Remarca 2.3 Axele și planele e simetrie sunt aceleași ca la elipsoid.

2.2.3 Hiperboloidul cu două pânze

Definitia 2.3 Se numește hiperboloid cu două pânze mulțimea punctelor din spațiu care într-un sistem de coordonate bine ales verifică ecuația:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (\text{HIP2})$$

Un calcul simplu ne conduce la:

Teorema 2.6 Intersecția hiperboloidului cu o pânză cu plane paralele cu xOy , $z = \gamma$, este o familie de hiperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\gamma^2}{c^2}.$$

Teorema 2.7 Intersecția hiperboloidului cu o pânză cu plane paralele cu xOz , $y = \beta$, este o familie de hiperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{\beta^2}{b^2}.$$

Teorema 2.8 Intersecția hiperboloidului cu o pânză cu plane paralele cu yOz , $x = \alpha$, (pentru $|\alpha| > a$) este o familie de elipse:

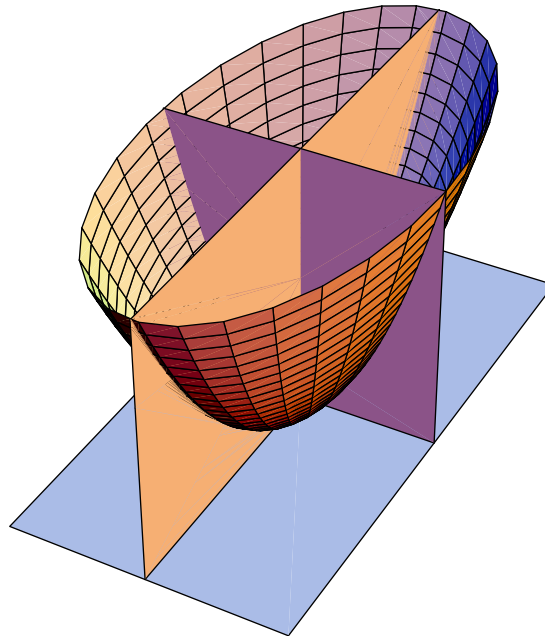
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{\alpha^2}{a^2} - 1.$$

Remarca 2.4 Axele și planele e simetrie sunt aceleași ca la elipsoid.

2.2.4 Paraboloidul eliptic

Definiția 2.4 Se numește paraboloid eliptic mulțimea punctelor a căror coordonate, într-un sistem bine ales, verifică ecuația:

$$2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \quad (\text{PE})$$



UN calcul simplu ne conduce la:

Teorema 2.9 Intersecția paraboloidului eliptic cu plane paralele cu xOy , $z = \gamma > 0$, este o familie de elipse:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 2\gamma \\ z &= \gamma \end{aligned}$$

Teorema 2.10 Intersecția paraboloidului eliptic cu plane paralele cu xOz , $y = \beta$, este o familie de parabole:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} &= 2z \\ y &= \beta. \end{aligned}$$

Teorema 2.11 Intersecția paraboloidului eliptic cu plane paralele cu yOz , $x = \alpha$, este o familie de parabole:

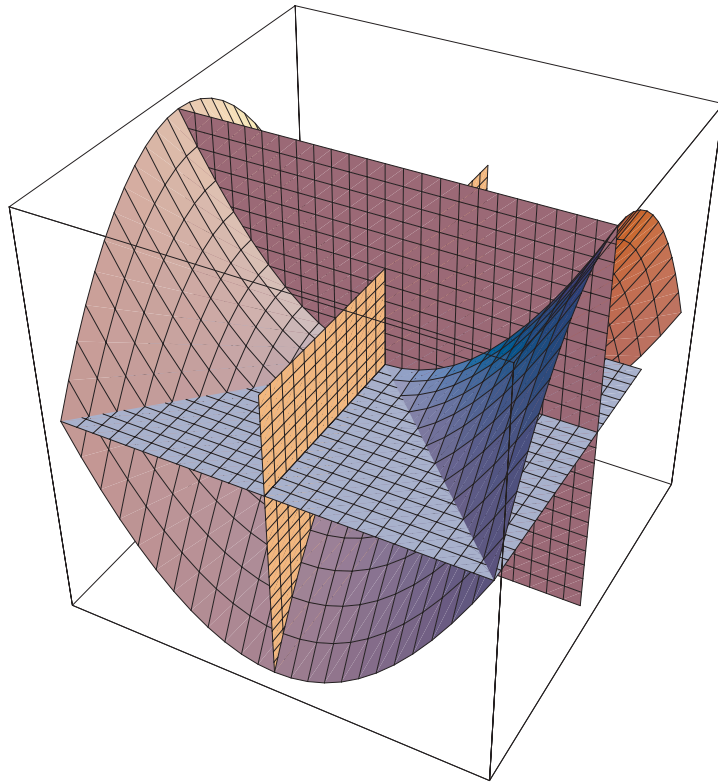
$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 2z \\ x &= \alpha. \end{aligned}$$

Remarca 2.5 Axa de simetrie e doar Oz , iar plane de simetrie xOz , yOz .

2.2.5 Paraboloidul hiperbolic

Definiția 2.5 Se numește paraboloid hiperbolic mulțimea punctelor a căror coordonate, într-un sistem bine ales, verifică ecuația:

$$2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \quad (\text{PH})$$



Un calcul simplu ne conduce la:

Teorema 2.12 *Intersecția paraboloidului hiperbolic cu plane paralele cu xOy , $z = \gamma$, este formată din hiperbole:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2\gamma.$$

Teorema 2.13 *Intersecția paraboloidului hiperbolic cu plane paralele cu xOz , $y = \beta$, este formată din parabole:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 2z.$$

Teorema 2.14 *Intersecția paraboloidului hiperbolic cu plane paralele cu yOz , $x = \alpha$, este formată din parabole:*

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

Remarca 2.6 Axa de simetrie e doar Oz , iar plane de simetrie xOz , yOz .

2.2.6 Generatoare rectilinii pentru hiperboloidul cu o pânză

Fie ecuația hiperboloidului cu o pânză (HIP1). Ea se poate pune sub forma:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

care este echivalentă cu:

$$\frac{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}}{1 - \frac{y}{b}} = \frac{1 + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}} \quad (2.2.1)$$

sau:

$$\frac{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}}{1 + \frac{y}{b}} = \frac{1 - \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}} \quad (2.2.2)$$

Dacă egalăm rapoartele din (2.2.1) cu λ , pentru λ fixat ele sunt ecuațiile unei drepte, aflată în întregime pe suprafață.

Definiția 2.6 Se numește prima familie de generatoare rectilinii pentru hiperboloidul cu o pânză mulțimea dreptelor din spațiu de ecuații:

$$\frac{\frac{x-z}{a} - \frac{y}{b}}{1 - \frac{y}{b}} = \frac{1 + \frac{y}{b}}{\frac{x+z}{a} + \frac{z}{c}} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{G1})$$

și a doua familie de generatoare rectilinii pentru hiperboloidul cu o pânză mulțimea dreptelor din spațiu de ecuații:

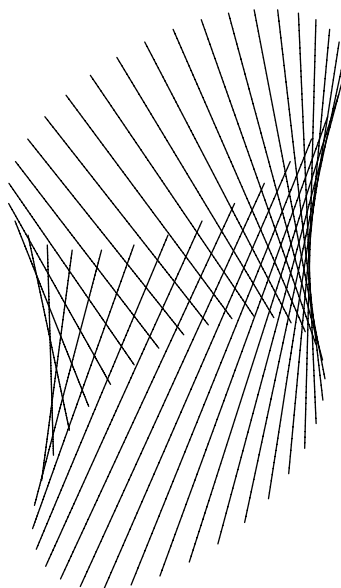
$$\frac{\frac{x-z}{a} - \frac{y}{b}}{1 + \frac{y}{b}} = \frac{1 - \frac{y}{b}}{\frac{x+z}{a} + \frac{z}{c}} = \mu \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (\text{G2})$$

Proprietățile generatoarelor rectilinii sunt date de:

Teorema 2.15 Prin orice punct de pe hiperboloid trece câte o generatoare din fiecare familie.

Teorema 2.16 Două generatoare din aceeași familie nu se intersectează.

Teorema 2.17 Două generatoare din familii diferite au un singur punct comun.



2.2.7 Generatoare rectilini pentru paraboloidul hiperbolic

Fie ecuația paraboloidului hiperbolic (PH). ea se poate pune sub forma:

$$2z = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

care este echivalentă cu:

$$\frac{2}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}} = \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{z} \quad (\text{2.2.3})$$

sau:

$$\frac{2}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}} = \frac{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}}{z} \quad (\text{2.2.4})$$

Dacă egalăm rapoartele din (2.2.3) cu λ , pentru λ fixat ele sunt ecuațiile unei drepte, aflată în întregime pe suprafață.

Definitia 2.7 Se numește prima familie de generatoare rectilinii pentru hiperboloidul cu o pânză mulțimea dreptelor din spațiu de ecuații:

$$\frac{2}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}} = \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{z} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{G1})$$

și a doua familie de generatoare rectilinii pentru hiperboloidul cu o pânză mulțimea dreptelor din spațiu de ecuații:

$$\frac{2}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}} = \frac{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}}{z} = \mu \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (\text{G2})$$

Proprietățile generatoarelor rectilinii sunt date de:

Teorema 2.18 Prin orice punct de pe hiperboloid trece câte o generatoare din fiecare familie.

Teorema 2.19 Două generatoare din aceeași familie nu se intersectează.

Teorema 2.20 Două generatoare din familii diferite au un singur punct comun.

