Capitolul 2

Geometrie analitică

2.1 Vectori

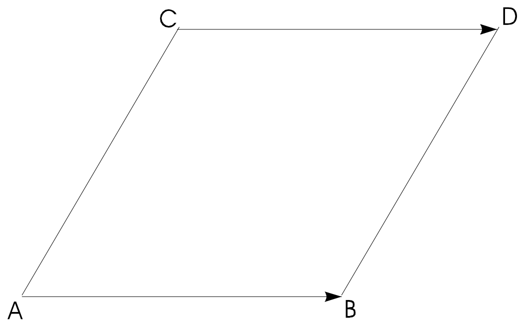
2.1.1 Definirea noţiunii de vector

Se presupune cunoscută noţiunea de segment orientat[1]. Vom nota un segment orientat cu două litere mari, cu săgeată deasupra, prima literă indicând originea iar cea de a doua extremitatea segmentului orientat (de exemplu $\overrightarrow{AB}$, A fiind originea iar B fiind extremitatea segmentului orientat $\overrightarrow{AB}$). Pe mulţimea segmentelor orientate, pe care o vom nota cu $\mathfrak{S}$, introducem următoarea relaţie:

Definitia 2.1.1 *Segmentele $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ sunt echipolente (şi vom nota acest lucru cu $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$) dacă şi numai dacă sunt verificate următoarele condiţii:*

1. *au aceeaşi lungime ($AB = CD$);*
2. *dreptele AB şi CD sunt paralele sau coincid ($AB \| CD$);*
3. *$\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{CD}$ au acelaşi sens (dacă AB şi CD sunt paralele atunci $AC \cap BD = \emptyset$, iar dacă dreptele AB şi CD coincid atunci $[AC] \cap [BD]$ este sau mulţimea vidă, sau se reduce la un punct sau este egală cu $[AD]$ sau este egală cu $[BC]$)[2].*

Remarca 2.1.1 Condiţiile din definiţia 2.1.1 sunt echivalente, în cazul în care punctele A, B, C, D nu sunt coliniare cu faptul că $ABDC$ (punctele fiind luate în această ordine) este paralelogram, conform figurii de mai jos:



Două segmente orientate echipolente

Principalele proprietăţi ale relaţiei de echipolenţă dată de definiţia 2.1.1 sunt date de:

Teorema 2.1.1 *Relaţia de echipolenţă este:*

1. *reflexivă: pentru orice $\overrightarrow{AB} \in \mathfrak{S} : \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$;*
2. *simetrică: dacă $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ atunci şi $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$;*
3. *tranzitivă: dacă $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ şi $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$ atunci $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$.*

Demonstraţie. Demonstraţia acestor proprietăţi este imediată, ţinând cont de faptul că relaţia de egalitate între numere (care apare în condiţia 1. din definiţia 2.1.1) şi relaţia de paralelism între drepte (care apare în condiţia 2.) din aceeaşi definiţie au proprietăţile de reflexivitate, simetrie şi tranzitivitate. ■

[1] un segement orientat este un segment $\overline{AB}$ pe care s-a stabilit un sens de parcurgere de la A la B.
[2] sau, cum se exprimă o variantă de manual de geometrie de clasa a IX-a, segmentele AD şi BC au acelaşi mijloc.

Definitia 2.1.2 *Pentru un segment orientat $\overrightarrow{AB}$ vom numi clasă de echipolenţă corespunzătoare lui mulţimea tuturor segmentelor orientate echipolente cu el, mulţime notată cu $\left\{\overrightarrow{AB}\right\}$.*

Remarca 2.1.2 Cu simboluri matematice definţia de mai sus se scrie:

$$\left\{\overrightarrow{AB}\right\} \overset{def}{=} \left\{\overrightarrow{CD} \in \mathfrak{S} \middle| \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}\right\}.$$

În legătură cu clasele de echipolenţă este adevărată următoarea teoremă:

Teorema 2.1.2 *Orice clasă de echipolenţă este nevidă şi două clase de echivalenţă sau sunt disjuncte sau coincid.*

Demonstraţie. Fie clasa de echipolenţă $\left\{\overrightarrow{AB}\right\}$.Conform cu 1. din teorema 2.1.1 $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$ şi deci $\overrightarrow{AB} \in \left\{\overrightarrow{AB}\right\} \neq \varnothing$. Fie acum două clase de echipolenţă $\left\{\overrightarrow{AB}\right\}$ şi $\left\{\overrightarrow{CD}\right\}$. Dacă ele sunt disjuncte teorema este demonstrată. Dacă există un segment orientat $\overrightarrow{EF} \in \left\{\overrightarrow{AB}\right\} \cap \left\{\overrightarrow{CD}\right\}$ să demonstrăm că ele sunt egale. Fiind vorba de două mulţimi, arătăm că fiecare este inclusă în cealaltă. Să considerăm un element $\overrightarrow{A_1B_1} \in \left\{\overrightarrow{AB}\right\}$. Atunci, conform definiţiei 2.1.2 $\overrightarrow{A_1B_1} \sim \overrightarrow{AB}$. Dar din $\overrightarrow{EF} \in \left\{\overrightarrow{AB}\right\}$ rezultă că $\overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{AB}$. Aplicănd proprietăţile de simetrie şi tranzitivitate ale relaţiei de echipolenţă rezultă că $\overrightarrow{A_1B_1} \sim \overrightarrow{EF}$. Din $\overrightarrow{EF} \in \left\{\overrightarrow{CD}\right\}$ rezultă $\overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{CD}$. Din $\overrightarrow{A_1B_1} \sim \overrightarrow{EF}$ şi $\overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{CD}$ rezultă (tranzitivitatea relaţiei de echipolenţă) că $\overrightarrow{A_1B_1} \sim \overrightarrow{CD}$, adică conform aceleeaşi definiţii 2.1.2, $\overrightarrow{A_1B_1} \in \left\{\overrightarrow{CD}\right\}$, deci $\left\{\overrightarrow{AB}\right\} \subseteq \left\{\overrightarrow{CD}\right\}$. Reluând raţionamentul de mai sus de la coadă la cap, va rezulta şi incluziunea $\left\{\overrightarrow{AB}\right\} \supseteq \left\{\overrightarrow{CD}\right\}$, c.c.t.d. ■

Pe baza teoremei de mai sus suntem în măsură să dă următoarea definiţie:

Definitia 2.1.3 *Se numeşte vector o clasă de echipolenţă de segmente orientate. Pentru un vector dat un segment orientat din clasa respectivă de echipolenţă se numeşte reprezentant al său.*

Definitia 2.1.4 *Se numeşte lungimea unui vector lungimea oricărui reprezentant al său.*

Remarca 2.1.3 Vom nota vectorii cu litere mici din alfabetul latin cu bară deasupra ($\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{v}$, ..), şi dacă $\overrightarrow{AB} \in \overline{a}$ spunem că $\overrightarrow{AB}$ este un reprezentant al vectorului $\overline{a}$. Dacă nu este pericol de confuzie vom spune vectorul $\overrightarrow{AB}$, în loc de $\overrightarrow{AB}$ este un reprezentant al vectorului $\overline{a}$. Vom nota cu $\mathfrak{V}_3$ mulţimea tuturor vectorilor din spaţiu. Pentru vectorul $\overline{a}$ vom nota cu a sau cu $|\overline{a}|$ lungimea sa.

Remarca 2.1.4 Noţiunea de vector definită mai sus este ceea ce în fizică şi mecanică se numeşte **vector liber**, caracterizat prin mărime (lungimea vectorului respectiv), direcţie (toate dreptele paralele cu un reprezentant al său) şi sens.Dacă condiţia 2. din definiţia 2.1.1 se înlocuieşte cu ”dreptele AB şi CD coincid” se obţine noţiunea de **vector alunecător** iar noţiunea de segment orientat coincide cu cea de **vector legat.**

Remarca 2.1.5 Se poate demonstra că fiind dat un punct O din spaţiu şi un vector $\overline{a}$ există un singur punct A astfel încât $\overrightarrow{OA} \in \overline{a}$.

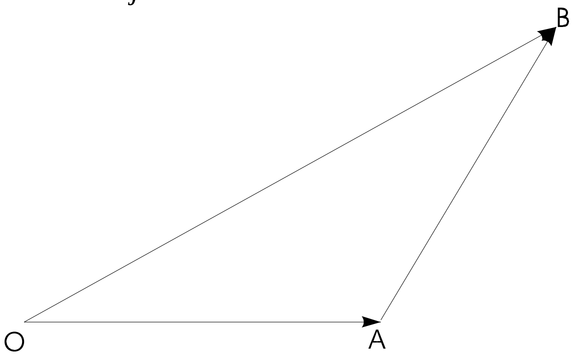
Remarca 2.1.6 În mulţimea vectorilor un rol important (ca ”etaloane” pentru măsurarea lungimilor) îl joacă versorii, definiţi ca vectori de lungime 1.

2.1.2 Operaţii cu vectori

Suma a doi vectori şi înmulţirea unui vector cu un scalar

Fiind daţi doi vectori, suma lor se defineşte ajutorul reprezentanţilor astfel:

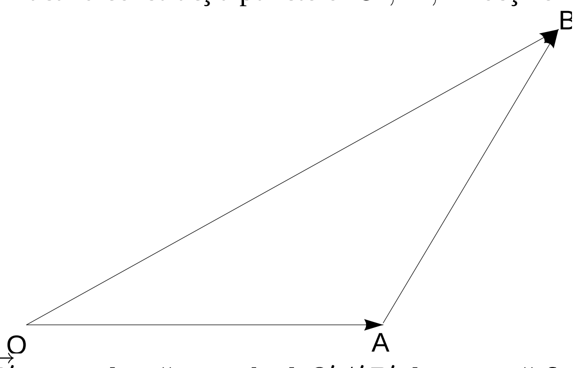
Definitia 2.1.5 *Dacă $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ sunt doi vectori având reprezentanţii $\overrightarrow{OA}$ respectiv $\overrightarrow{AB}$ atunci suma $\overline{a}+\overline{b}$ are reprezentantul $\overrightarrow{OB}$, conform figurii de mai jos:.*



În legătură cu definiţia de mai sus se pune întrebarea dacă nu cumva suma a doi vectori nu depinde de reprezentanţii aleşi (adică, conform remarcii 2.1.5 de punctul O). Răspunsul la această întrebare este negativ, după cum rezultă din următoarea teoremă:

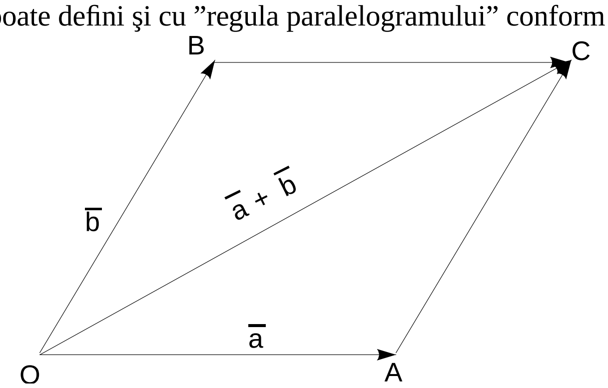
Teorema 2.1.3 *Suma a doi vectori $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ nu depinde de reprezentanţi.*

Demonstraţie[3]**.** Fie un alt punct O'. Conform remarcii 2.1.5 există un singur punct A' astfel încât $\overrightarrow{O'A'} \in \overline{a}$, şi un singur punct B' astfel încât $\overrightarrow{A'B'} \in \overline{b}$. Atunci, conform definiţiei 2.1.5 $\overrightarrow{O'B'} \in \overline{a}+\overline{b}$. Enunţul teoremei spune că trebuie să avem $\overrightarrow{O'B'} \sim \overrightarrow{OB}$. Făcând construcţia punctelor O', A', B' obţinem figura:



Din $\overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{O'A'}$ şi $\overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{O'B'}$ va rezulta că triunghiul $O'A'B'$ din această figură este congruent cu triunghiul OAB din figura 1., de unde va rezulta că $\overrightarrow{O'B'} \sim \overrightarrow{OB}$. ■

Remarca 2.1.7 Dacă punctele O, A, B nu sunt coliniare (adică vom spune că vectorii $\overline{a}$ şi $\overline{b}$ nu sunt coliniari) atunci adunarea vectorilor se poate defini şi cu "regula paralelogramului" conform figurii de mai jos:



[3] doar ideea demonstraţiei, demonstraţia (geometrică) riguroasă fiind lăsată pe seama cititorului.

unde vectorul sumă este diagonala paralelogramului având ca laturi vectorii daţi.

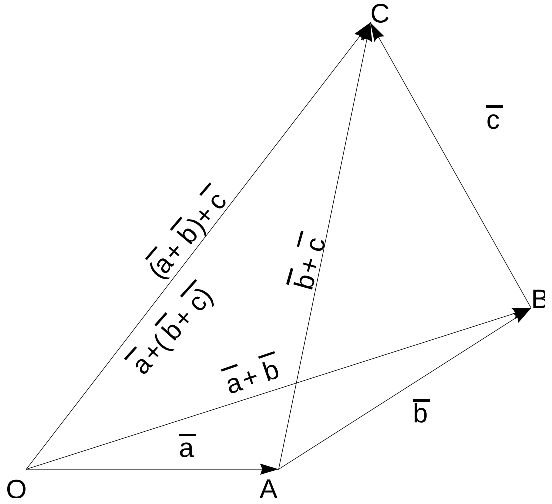
Principalele proprietăţi ale sumei sunt date de următoarea teoremă:

Teorema 2.1.4 $(\mathfrak{V}_3, +)$ *(mulţimea vectorilor înzestrată cu operaţia de adunare) formează un grup abelian.*

Demonstraţie:

1.Asociativitatea: rezultă urmărind cu atenţie următoarea figură şi scriind următoarele egalităţi:

$$\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$$



2.Comutativitatea: Dacă vectorii nu sunt coliniari rezultă din regula paralelogramului (vezi figura de la remarca 2.1.7), iar în caz de coliniaritate lăsăm demonstraţia pe seama cititorului.

3.Existenţa elementului neutru: definim vectorul nul $\overline{0} = \left\{\overrightarrow{AA}\right\}$.În acest caz (vezi de exemplu pe figura de mai sus:

$$\underbrace{\overrightarrow{OA}}_{\overline{a}} + \underbrace{\overrightarrow{AA}}_{\overline{0}} = \underbrace{\overrightarrow{OA}}_{\overline{a}} .$$

4.Existenţa elementului simetric: dacă $\overline{a} = \left\{\overrightarrow{OA}\right\}$ atunci definim $-\overline{a} \overset{def}{=} \left\{\overrightarrow{AO}\right\}$. Conform definiţiei 2.1.5 avem egalităţile:

$$\underbrace{\overrightarrow{OA}}_{\overline{a}} + \underbrace{\overrightarrow{AO}}_{(-\overline{a})} = \underbrace{\overrightarrow{OO}}_{\overline{0}} ,$$

ceea ce trebuia demonstrat. ∎

O altă operaţie (care se numeşte lege de compoziţie externă) este înmulţirea unui vector cu un scalar. Pentru a defini această operaţie precizăm că prin scalar vom înţelege un număr real, şi pentru a evita orice confuzie vom nota în cele ce urmează scalarii cu litere din alfabetul grecesc: $\alpha, \beta, \gamma, ... \in \mathbb{R}$.

Definitia 2.1.6 *Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $\overline{v} \in \mathfrak{V}_3$ atunci vom numi produsul dintre scalarul α şi vectorul $\overline{v}$ vectorul notat cu $\alpha\overline{v}$ definit astfel: dacă $\overrightarrow{OA} \in \overline{v}$ atunci $\overrightarrow{OA_1} \in \alpha\overline{v}$ verifică condiţiile:*

1. $OA_1 = |\alpha|\, OA$;
2. dacă $\alpha > 0$ atunci O este în exteriorul segmentului $[AA_1]$, iar dacă $\alpha < 0$ atunci O este între A şi A_1.

Remarca 2.1.8 Dacă avem daţi doi vectori $\overline{v}$ şi $\overline{w}$ atunci faptul că există $\alpha \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{w} = \alpha\overline{v}$ este echivalent cu afirmaţia ”$\overline{v}$ şi $\overline{w}$ sunt doi vectori coliniari (paraleli)” (vezi şi remarca 2.1.7).

Remarca 2.1.9 $\alpha\overline{v} = \overline{0}$ dacă şi numai dacă $\alpha = 0$ sau $\overline{v} = \overline{0}$

Următoarea teoremă arată legătura care există între înmulţirea unui vector cu un scalar şi operaţiile de adunare a vectorilor, respectiv de adunare şi înmulţire a scalarilor:

Teorema 2.1.5 *Pentru orice vectori $\overline{v}, \overline{v}_1, \overline{v}_2 \in \mathfrak{V}_3$ şi pentru orice scalari $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ sunt adevărate egalităţile:*

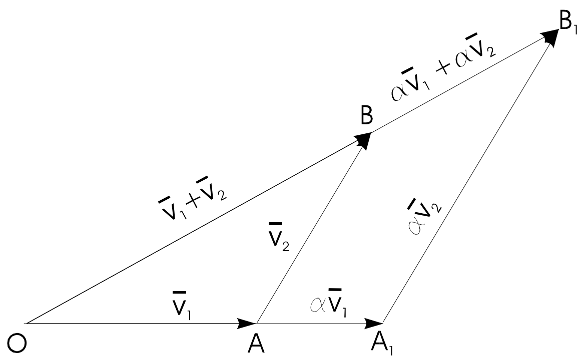
$$(\alpha_1 + \alpha_2)\,\overline{v} = (\alpha_1 \overline{v}) + (\alpha_2 \overline{v}) \tag{2.1.1}$$

$$\alpha\,(\overline{v}_1 + \overline{v}_2) = \alpha \overline{v}_1 + \alpha \overline{v}_2 \tag{2.1.2}$$

$$(\alpha_1 \alpha_2)\,\overline{v} = \alpha_1\,(\alpha_2 \overline{v}) \tag{2.1.3}$$

$$1\overline{v} = \overline{v} \tag{2.1.4}$$

Demonstraţie. Demonstraţiile egalităţilor (2.1.1), (2.1.3), (2.1.4) se reduc la distributivitatea înmulţirii faţă de adunare în $\mathbb{R}$, iar demonstraţia egalităţii (2.1.2) rezultă din asemănarea triunghiurilor OAB şi OA_1B_1 din figura de mai jos:



($\overrightarrow{OB_1} = \alpha\,\overrightarrow{OB}$ şi deci $\alpha\overline{v}_1 + \alpha\overline{v}_2 = \alpha\,(\overline{v}_1 + \overline{v}_2)$). ■

Remarca 2.1.10 Teoremele 2.1.4 şi 2.1.5 se puteau enunţa într-o singură teoremă, folosind noţiunea de spaţiu vectorial (vezi manualul [**?**]) astfel: "Mulţimea vectorilor din spaţiu împreună cu operaţia de adunare şi cea de înmulţire cu un scalar formează un spaţiu vectorial real".

Cu ajutorul operaţiei de înmulţire cu un scalar putem defini acum noţiunea de versor al unui vector:

Definitia 2.1.7 *Se numeşte versor al unui vector $\overline{v}$ vectorul obţinut prin înmulţirea vectorului $\overline{v}$ cu inversul lungimii sale (adică vectorul $\frac{\overline{v}}{v}$, care este un versor conform remarcii 2.1.6).*

O problemă care apare frecvent în aplicaţiile vectorilor este „descompunerea unui vectori după direcţiile a doi (sau trei) vectori". Posibilitatea unei astfel de descompuneri este dată de următoarele două teoreme. Pentru aceasta e necesar să precizăm noţiunea de vectori coplanari:

Definitia 2.1.8 *Trei vectori $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ se numesc vectori coplanari dacă reprezentanţii lor care au originea în acelaşi punct[4] sunt coplanari (adică pentru orice punct O dacă $\overrightarrow{OA_1} \in \overline{v}_1$, $\overrightarrow{OA_2} \in \overline{v}_2$, $\overrightarrow{OA_3} \in \overline{v}_3$ atunci punctele O, A_1, A_2, A_3. sunt coplanare).*

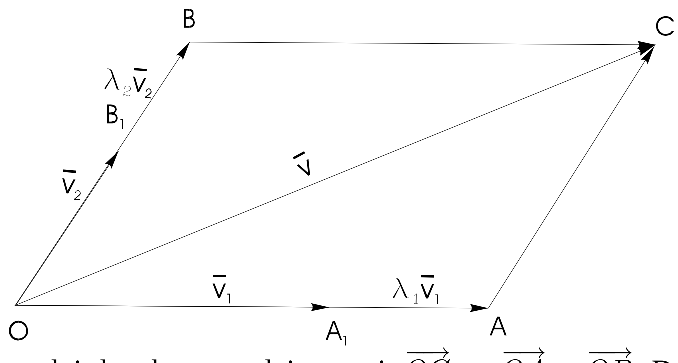
Teorema 2.1.6 *Dacă vectorii $\overline{v}, \overline{v}_1, \overline{v}_2$ sunt coplanari şi vectorii $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ nu sunt coliniari (vezi remarca 2.1.8) atunci există în mod unic doi scalari λ_1, λ_2 astfel încât:*

$$\overline{v} = \lambda_1 \overline{v}_1 + \lambda_2 \overline{v}_2. \tag{2.1.5}$$

Demonstraţie. Fie un punct O fixat şi reprezentanţii (vezi figura de mai jos): $\overrightarrow{OC} \in \overline{v}$, $\overrightarrow{OA_1} \in \overline{v}_1$, $\overrightarrow{OB_1} \in \overline{v}_1$. Prin C ducem paralela CB la OA_1 care intersectează (deoarece $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ nu sunt coliniari) pe OB_1 în B şi paralela CA la OB_1 care intersectează pe OA_1 în A.

---

[4] conform remarcii 2.1.5 aceşti reprezentanţi există.

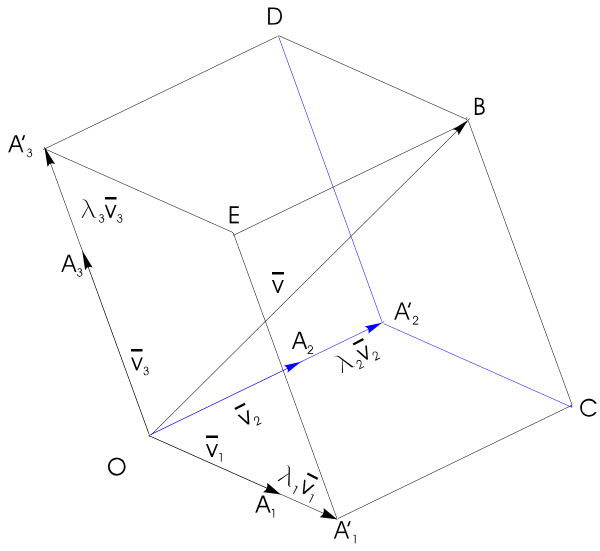


Conform regulii paralelogramului de adunare a doi vectori, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Dar, conform definiţiei 2.1.6, există scalarii λ_1, λ_2 astfel încât $\overrightarrow{OA} = \lambda_1\overrightarrow{OA}_1$, $\overrightarrow{OB} = \lambda_2\overrightarrow{OA}_2$. Din ultimele trei egalităţi rezultă că $\overrightarrow{OC} = \lambda_1\overrightarrow{OA}_1 + \lambda_2\overrightarrow{OA}_2$, adică tocmai egalitatea (2.1.5) scrisă cu ajutorul reprezentanţilor. Să demonstrăm acum unicitatea formulei (2.1.5). Presupunem că există şi scalarii λ_1', λ_2' (cu $\lambda_1' \neq \lambda_1$ sau $\lambda_2' \neq \lambda_2$) astfel încât $\overline{v} = \lambda_1'\overline{v}_1 + \lambda_2'\overline{v}_2$. Scăzând această egalitate din (2.1.5) rezultă $\left(\lambda_1 - \lambda_1'\right)\overline{v}_1 + \left(\lambda_2 - \lambda_2'\right)\overline{v}_2 = \overline{0}$. Dacă $\lambda_1' \neq \lambda_1$ împărţind ultima egalitate cu $\lambda_1 - \lambda_1'$ rezultă $\overline{v}_1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_2'}{\lambda_1 - \lambda_1'}\overline{v}_2$, deci, conform remarcii 2.1.8 vectorii $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ sunt coliniari, contradicţie. ■

Teorema 2.1.7 *(descompunerea unui vector după trei direcţii date) Dacă vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ nu sunt coplanari atunci pentru orice vector $\overline{v} \in \mathfrak{V}_3$ există unic constantele $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ astfel încât:*

$$\overline{v} = \lambda_1\overline{v}_1 + \lambda_2\overline{v}_2 + \lambda_3\overline{v}_3.$$

Demonstraţie. Este analoagă cu demonstraţia teoremei precedente (ca idee), după cum se constată urmărind figura de mai jos, în care s-a construit un paralelipiped cu diagonala $\overrightarrow{OB} \in \overline{v}$, cu laturile paralele cu $\overrightarrow{OA}_1 \in \overline{v}_1, \overrightarrow{OA}_2 \in \overline{v}_2, \overrightarrow{OA}_3 \in \overline{v}_3$.



Scrierea egalităţilor corespunzătoare acestei figuri se lasă pe seama cititorului. ■

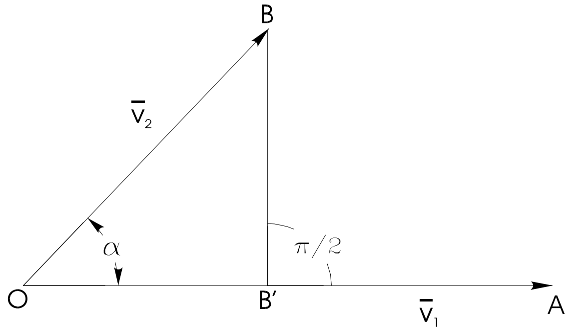
Produse de doi vectori

Fie doi vectori $\overline{v}_1, \overline{v}_2$.

Definitia 2.1.9 *Se numeşte produsul scalar al vectorilor $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ numărul (scalarul) notat cu $\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2$ definit prin:*

$$\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = v_1 v_2 \cos\alpha \tag{2.1.6}$$

unde α este unghiul (mai mic decât π) dintre cei doi vectori (vezi şi figura de mai jos, unde $\overrightarrow{OA} \in \overline{v}_1, \overrightarrow{OB} \in \overline{v}_2$, $OB' \perp OA$).



Remarca 2.1.11 Produsul scalar a doi vectori este egal cu produsul dintre lungimea unuia din vectori, lungimea proiecţiei celui de al doilea vector pe primul, şi $+1$ dacă unghiul dintre cei doi vectori este mai mic decât $\frac{\pi}{2}$ respectiv -1 dacă unghiul dintre cei doi vectori este obtuz. (pe figura de mai sus produsul scalar dintre $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ este egal cu $OA \cdot OB'$). Dacă nu este pericol de confuzie produsul scalar al vectorilor $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$ se notează şi $\overline{v}_1\overline{v}_2$.

Remarca 2.1.12 Din definiţia produsului scalar rezultă că lungimea unui vector (vezi, pentru notaţie remarca 2.1.3) se poate calcula cu formula: $v = \sqrt{\overline{v} \cdot \overline{v}}$ (de aceea în cazul în care se calculează produsul scalar al unui vector cu el însuşi se poate renunţa la bara de deasupra vectorului, adică $\overline{v} \cdot \overline{v} = v \cdot v$).

Remarca 2.1.13 Produsul scalar a doi vectori este nul dacă şi numai dacă unul din vectori este vectorul nul sau vectorii sunt perpendiculari, după cum rezultă din formula de definiţie 2.1.6. Cu formule matematice aceasta se poate scrie:

$$\overline{v}_1\overline{v}_2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \text{ sau} \\ v_2 = 0 \text{ sau} \\ \overline{v}_1 \perp \overline{v}_2 (\cos\alpha = 0) \end{cases} \tag{2.1.7}$$

INTERPRETARE MECANICĂ: Produsul scalar dintre vectorii $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_1$ este egal cu lucrul mecanic produs de o forţă egală cu $\overline{v}_2$ la deplasarea $\overline{v}_1$.

Principalele proprietăţi ale produsului scalar sunt date de următoarea teoremă:

Teorema 2.1.8 *Oricare sunt vectorii $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_3$şi oricare ar fi scalarul $\alpha \in \mathbb{R}$ sunt adevărate egalităţile:*

$$\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = \overline{v}_2 \cdot \overline{v}_1 \text{ (comutativitate)} \tag{2.1.8}$$

$$\overline{v}_1 \cdot (\overline{v}_2 + \overline{v}_3) = \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 + \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_3 \text{ (distributivitate faţă de adunarea vectorilor)} \tag{2.1.9}$$

$$(\alpha\overline{v}_1) \cdot \overline{v}_2 = \overline{v}_1 \cdot (\alpha\overline{v}_2) = \alpha(\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2). \tag{2.1.10}$$

Demonstraţie. Egalitatea 2.1.8, respectiv 2.1.10 rezultă imediat din formula 2.1.6 care defineşte produsul scalar, ţinând cont de comutativitatea, respectiv asociativitatea înmulţirii numerelor reale. Egalitatea 2.1.9 se demonstrează pe baza remarcii 2.1.11 şi a faptului că „proiecţia sumei este egală cu suma proiecţiilor“[5]. ■

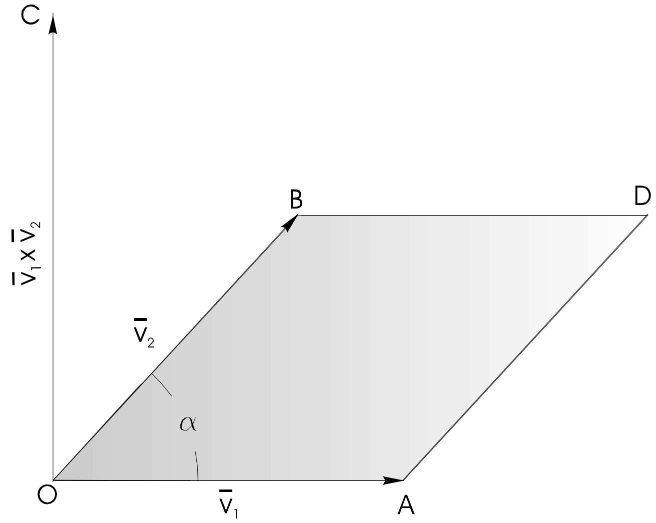
Fie acum vectorii $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$, cu unghiul dintre ei (mai mic decât π) notat cu α.

Definitia 2.1.10 *Se numeşte produsul vectorial al vectorilor $\overline{v}_1$ şi $\overline{v}_2$* ***vectorul*** *notat $\overline{v}_1 \times \overline{v}_2$ definit astfel:*

1. *lungimea produsului vectorial se calculează conform formulei:*
$$|\overline{v}_1 \times \overline{v}_2| = v_1 v_2 \sin\alpha; \tag{2.1.11}$$
2. *$\overline{v}_1 \times \overline{v}_2$ este perpendicular atât pe $\overline{v}_1$ cât şi pe $\overline{v}_2$;*
3. *sensul lui $\overline{v}_1 \times \overline{v}_2$ este dat de regula burghiului drept: sensul în care înaintează un burghiu când rotim $\overline{v}_1$ spre $\overline{v}_2$ sub un unghi minim (mai mic decât π).*

[5] exprimare nu prea riguroasă.

Remarca 2.1.14 Produsul vectorial a doi vectori este **un vector, a cărui lungime se calculează cu formula 2.1.11,** direcţia şi sensul său fiind precizate de celelalte două condiţii din definiţia de mai sus. Formula 2.1.11 defineşte lungimea vetorului produs vectorial ca fiind egală cu aria paralelogramului construit pe cei doi factori, după cum se observă şi în figura de mai jos, în care $\overrightarrow{OC} \in \overline{v}_1 \times \overline{v}_2$, $\overrightarrow{OA} \in \overline{v}_1$, $\overrightarrow{OB} \in \overline{v}_2$, $AD \parallel OB$, $BD \parallel OA$, iar aria paralelogramului $OADB$ este egală cu $OA \cdot OB \cdot \sin\alpha$:



Remarca 2.1.15 Produsul vectorial a doi vectori este nul dacă şi numai dacă unul din vectori este vectorul nul sau vectorii sunt coliniari (paraleli), după cum rezultă din formula 2.1.11. Cu formule matematice aceasta se poate scrie:

$$\overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = \overline{0} \Longleftrightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \text{ sau} \\ v_2 = 0 \text{ sau} \\ \overline{v}_1 \parallel \overline{v}_2 (\sin\alpha = 0) \end{cases} \tag{2.1.12}$$

INTERPRETARE MECANICĂ: Produsul vectorial dintre vectorii $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_1$ este egal cu momentul forţei $\overline{v}_2$ având braţul forţei $\overline{v}_1$, momentul având originea în originea braţului forţei, (vezi figura precedentă, forţa fiind $\overrightarrow{AD}$ iar braţul forţei $\overrightarrow{OA}$.

Principalele proprietăţi ale produsului vectorial sunt date de următoarea teoremă:

Teorema 2.1.9 *Oricare sunt vectorii $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_3$şi oricare ar fi scalarul $\alpha \in \mathbb{R}$ sunt adevărate egalităţile:*

$$\overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = -\overline{v}_2 \times \overline{v}_1 \text{ (anticomutativitate)} \tag{2.1.13}$$

$$\overline{v}_1 \times (\overline{v}_2 + \overline{v}_3) = \overline{v}_1 \times \overline{v}_2 + \overline{v}_1 \times \overline{v}_3 \text{ (distributivitate faţă de adunarea vectorilor)} \tag{2.1.14}$$

$$(\alpha\overline{v}_1) \times \overline{v}_2 = \overline{v}_1 \times (\alpha\overline{v}_2) = \alpha\,(\overline{v}_1 \times \overline{v}_2)\,. \tag{2.1.15}$$

Demonstraţie. Formulele (2.1.13) şi (2.1.15) sunt evidente pe baza definiţiei produsului vectorial, iar demonstraţia formulei (2.1.14) este o demonstraţie geometrică destul de laborioasă pe care nu o reproducem aci (pentru cei intertesaţi ea se poate găsi în [**?**]). ■

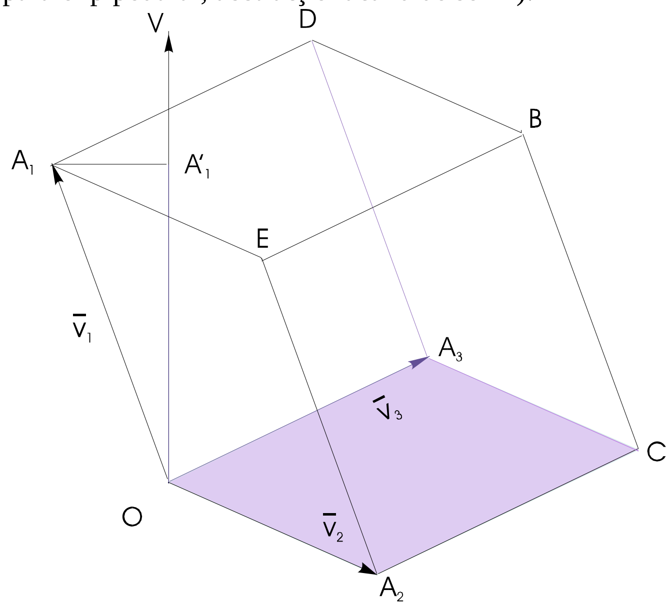
Produse de trei vectori

Fie acum trei vectori $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$.

Definitia 2.1.11 *Se numeşte produsul mixt al vectorilor $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ scalarul notat cu $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3)$ definit de formula:*

$$(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3) = \overline{v}_1 \cdot (\overline{v}_2 \times \overline{v}_3)\,. \tag{2.1.16}$$

INTERPRETARE GEOMETRICĂ: Produsul mixt a trei vectori este egal cu $\pm$volumului paralelipipedului construit pe cei trei vectori, după cum se constată pe figura **??** de mai jos (în care $\overrightarrow{OV} = \overline{v}_2 \times \overline{v}_3$, înălţimea paralelipipedului $OA_2CA_3A_1EBD$ fiind egală cu OA_1', care este proiecţia pe $\overrightarrow{OV}$ a vectorului $\overline{v}_1$, şi deci produsul scalar $\overline{v}_1 \cdot \overrightarrow{OV}$ este chiar volumul paralelipipedului, abstracţie făcând de semn):



Interpretare geometrică a produsului mixt.

Remarca 2.1.16 Dacă vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ sunt nenuli, atunci produsul lor mixt este egal cu 0 dacă sau produsul vectorial $\overline{v}_2 \times \overline{v}_3$ este nul (adică, conform remarcii 2.1.12 $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_3$ sunt coliniari) sau vectorul $\overline{v}_1$ este perpendicular pe $\overline{v}_2 \times \overline{v}_3$, adică $\overline{v}_1$ este coplanar cu $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_3$. În ambele cazuri constatăm că $(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3) = 0$ este echivalent cu faptul că cei trei vectori sunt coplanari.

Principalele proprietăţi ale produsului mixt sunt date de următoarea teoremă:

Teorema 2.1.10 *Produsul mixt este invariant la o permutare circulară*[6] *a factorilor, iar dacă se schimbă ordinea a doi factori se schimbă semnul produsului.*

Demonstraţie. Din interpretarea geometrică a produsului mixt rezultă că produsul mixt a trei vectori poate lua doar două valori. Care sunt permutările vectorilor pentru care produsul mixt ia fiecare din cele două valori va rezulta mai simplu din paragraful următor, pe baza formulei (2.2.7) din teorema 2.2.4. ■

Pentru aceiaşi trei vectori ca mai sus putem defini încă un produs:

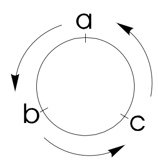
Definitia 2.1.12 *Se numeşte dublul produs vectorial al vectorilor* $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ *vectorul* $\overline{v}_1 \times (\overline{v}_2 \times \overline{v}_3)$.

În legătură cu acest produs menţionăm următoarea teoremă:

Teorema 2.1.11 *Oricare sunt vectorii* $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ *este adevărată următoarea formulă (cunoscută sub numele de formula lui Gibs):*

$$\overline{v}_1 \times (\overline{v}_2 \times \overline{v}_3) = (\overline{v}_1 \overline{v}_3)\, \overline{v}_2 - (\overline{v}_1 \overline{v}_2)\, \overline{v}_3. \tag{2.1.17}$$

[6] prin permutare circulară a trei numere a, b, c se înţelege o permutare în care fiecare element este înlocuit cu următorul, iar ultimul cu primul, conform schemei:



Demonstraţie. Să observăm că $\overline{v}_1 \times (\overline{v}_2 \times \overline{v}_3)$ este un vector perpendicular pe $\overline{v}_2 \times \overline{v}_3$ şi deoarece $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_3$ sunt la rândul lor perpendiculari pe $\overline{v}_2 \times \overline{v}_3$ (vezi definiţia produsului vectorial) rezultă că vectorii $\overline{v}_1 \times (\overline{v}_2 \times \overline{v}_3)$, $\overline{v}_2$ şi $\overline{v}_3$ sunt coplanari, ceea ce implică (vezi teorema 2.1.6) existenţa scalarilor λ şi μ astfel încât:

$$\overline{v}_1 \times (\overline{v}_2 \times \overline{v}_3) = \lambda\overline{v}_2 + \mu\overline{v}_3. \tag{2.1.18}$$

Să înmulţim acum scalar această egalitate cu vectorul $\overline{v}_1$. Pe baza proprietăţilor produsului scalar va rezulta: $0 = \lambda(\overline{v}_1\overline{v}_2) + \mu(\overline{v}_1\overline{v}_3)$. Din această egalitate rezultă $-\frac{\mu}{(\overline{v}_1\overline{v}_2)} = \frac{\lambda}{(\overline{v}_1\overline{v}_3)}$. Notând valoarea comună a acestor rapoarte cu κ şi înlocuind pe λ şi μ în (2.1.18) rezultă:

$$\overline{v}_1 \times (\overline{v}_2 \times \overline{v}_3) = \kappa\left((\overline{v}_1\overline{v}_3)\overline{v}_2 - (\overline{v}_1\overline{v}_2)\overline{v}_3\right).$$

Lăsăm pe seama cititorului să demonstreze egalitatea $\kappa = 1$. ■

2.2 Bază, coordonate, exprimarea operaţiilor cu vectori folosind coordonatele

2.2.1 Bază şi coordonate

În acest paragraf vom generaliza noţiunea de vectori coliniari şi vectori coplanari, pornind de la remarca 2.1.8 şi teorema 2.1.6:

Definitia 2.2.1 *Vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n$ se numesc liniar dependenţi dacă există n scalari $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, nu toţi nuli (adică $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \neq 0$) astfel încât:*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\overline{v}_k = \overline{0}, \tag{2.2.1}$$

şi liniar independenţi în caz contrar.

Remarca 2.2.1 Doi vectori coliniari sunt liniari dependenţi, căci conform remarcii mai sus amintite dacă $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ sunt coliniari atunci există un scalar α astfel încât $\overline{v}_1 = \alpha\overline{v}_2$ sau $\overline{v}_2 = \alpha\overline{v}_1$ deci este verificată (2.2.1) cu $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \alpha$ sau $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = 1$. Invers, dacă doi vectori sunt liniar dependenţi atunci ei sunt coliniari, deoarece din $\lambda_1\overline{v}_1 + \lambda_2\overline{v}_2$ dacă $\lambda_1 \neq 0$ rezultă $\overline{v}_1 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1}\overline{v}_2$, iar dacă $\lambda_1 \neq 0$ rezultă $\overline{v}_2 = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2}\overline{v}_1$. Analog se arată (folosind teorema 2.1.6) că trei vectori coplanari sunt liniari dependenţi şi reciproc, trei vectori liniar dependenţi sunt coplanari.

Remarca 2.2.2 Suma din mebrul stâng al egalităţii (2.2.1) se numeşte combinaţie liniară a vectorilor $\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n$, iar liniar independenţa lor este echivalentă cu afirmatia: "dacă a combinaţie liniară a vectorilor este egală cu vectorul nul, atunci toţi scalarii din combinaţia liniară sunt nuli".

Remarca 2.2.3 Dacă unul din vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n$ este vectorul nul atunci ei sunt liniar independenţi, deoarece putem lua scalarul corespunzător vectorului nul egal cu 1 iar ceilalţi scalari egali cu 0 şi egalitatea (2.2.1) este adevărată.

Folosind noţiunea de liniar dependenţă teorema 2.1.7 se reenunţă astfel:

Teorema 2.2.1 *Orice patru vectori din $\mathfrak{V}_3$ sunt liniar dependenţi.*

Demonstraţie. Fie vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4$. Dacă $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ sunt coplanari atunci, conform remarcii 2.2.1 ei sunt liniari dependenţi, de unde rezultă că (vezi remarca precedentă) $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4$ sunt liniari dependenţi. Dacă $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ nu sunt coplanari, atunci conform teoremei 2.1.7, există scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ astfel încât:

$$\overline{v}_4 = \lambda_1\overline{v}_1 + \lambda_2\overline{v}_2 + \lambda_3\overline{v}_3, \tag{2.2.2}$$

de unde rezultă $\lambda_1\overline{v}_1 + \lambda_2\overline{v}_2 + \lambda_3\overline{v}_3 - 1 \cdot \overline{v}_4 = 0$, deci $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4$ sunt liniari dependenţi ($\lambda_4 = -1 \neq 0$). ■

Folosind noţiunile de liniar dependenţă şi liniar dependenţă suntem în măsură să definim noţiunea de bază:

Definitia 2.2.2 *O mulţime de vectori $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n\} \subset \mathfrak{V}_3$ se numeşte* **bază** *dacă verifică următoarele condiţii:*

1. *Vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n$ sunt liniar independenţi.*
2. *Oricare ar fi vectorul $\overline{v} \in \mathfrak{V}_3$ vectorii $\overline{v}, \overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_n$ sunt liniar dependenţi.*

Bineînţeles că se pune probleme dacă în $\mathfrak{V}_3$ există o bază şi dacă existe mai multe baze, prin ce se aseamănă ele. Răspunsul la aceste probleme este dat de următoarea teoremă:

Teorema 2.2.2 *Orice mulţime formată din trei vectori necoplanari formează o bază în $\mathfrak{V}_3$.*

Demonstraţie. Fie $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ trei vectori necoplanari. Repetând raţionamentul de la demonstraţia teoremei precedente rezultă că pentru orice vector $\overline{v}_4$există scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ astfel încât egalitatea (2.2.2) să fie adevărată, deci $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4$ sunt liniari dependenţi. ■

Remarca 2.2.4 Teorema precedentă precizează că există baze în $\mathfrak{V}_3$ şi că orice bază are exact trei elemente.

În legătură cu formula (2.2.2), este adevărată următoarea teoremă:

Teorema 2.2.3 *Dacă $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ este o bază în $\mathfrak{V}_3$ atunci pentru orice $\overline{v}_4 \in \mathfrak{V}_3$ scalarii care apar în (2.2.2) sunt unici.*

Demonstraţie. Presupunem că există scalarii $\lambda_1', \lambda_2', \lambda_3'$ astfel încât $\overline{v}_4 = \lambda_1'\overline{v}_1 + \lambda_2'\overline{v}_2 + \lambda_3'\overline{v}_3$. Scăzând din această egalitate egalitatea 2.2.2 rezultă $\left(\lambda_1' - \lambda_1\right)\overline{v}_1 + \left(\lambda_2' - \lambda_2\right)\overline{v}_2 + \left(\lambda_3' - \lambda_3\right)\overline{v}_3 = \overline{0}$. Din liniar independenţa vectorilor $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ rezultă (vezi remarca 2.2.2) că $\lambda_1' - \lambda_1 = 0, \lambda_2' - \lambda_2 = 0, \lambda_3' - \lambda_3 = 0$, deci $\lambda_1' = \lambda_1, \lambda_2' = \lambda_2, \lambda_3' = \lambda_3$. ■

Teorema precedentă ne permite să dăm următoarea definiţie:

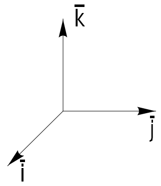
Definitia 2.2.3 *Dacă $\mathcal{B} = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ este o bază în mulţimea $\mathfrak{V}_3$ atunci pentru un vector $\overline{v}_4$scalarii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ din formula (2.2.2) se numesc coordonatele vectorului $\overline{v}_4$ în baza $\mathcal{B}$.*

Dacă asupra vectorilor care formează baza punem condiţi suplimentare, obţinem baze cu diferite denumiri, conform definiţiei de mai jos:

Definitia 2.2.4 *O bază $\mathcal{B} = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ se numeşte:*

1. *ortogonală dacă fiecare dintre vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ este perpendicular pe ceilalţi;*
2. *ortonormată dacă este ortogonală şi vectorii care o formează sunt versori;*
3. *ortonormată direct orientată dacă este ortonormată şi $\overline{v}_3 = \overline{v}_1 \times \overline{v}_2$.*

Vectorii care formează o bază ortonormată direct orientată îi vom nota cu $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$, ca şi în figura de mai jos:



şi în acest caz vom nota coordonatele unui vector $\overline{v}$ cu literele x, y, z (adică $\overline{v} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$).

Exprimarea operaţiilor cu vectori folosind coordonatele

Deoarece legătura dintre operaţiile cu vectori şi operaţiile cu coordonatele lor într-o bază arbitrară nu este chiar atât de simplă în cazul produselor, vom utiliza în cele ce urmează doar baze ortonormate direct orientate. În acest caz este adevărată următoarea teoremă:

Teorema 2.2.4 *Dacă $\left\{\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}\right\}$ este o bază ortonormată direct orientată şi vectorii $\overline{v}_l, l = \overline{1,3}$ au coordonatele (x_l, y_l, z_l) atunci sunt adevărate următoarele egalităţi:*

$$\overline{v}_1 + \overline{v}_2 = (x_1 + x_2)\,\overline{i} + (y_1 + y_2)\,\overline{j} + (z_1 + z_2)\,\overline{k}; \tag{2.2.3}$$

$$\alpha\overline{v}_1 = (\alpha x_1)\,\overline{i} + (\alpha y_1)\,\overline{j} + (\alpha z_1)\,\overline{k}; \tag{2.2.4}$$

$$\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2; \tag{2.2.5}$$

$$\overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = (y_1z_2 - y_2z_1)\,\overline{i} + (z_1x_2 - z_2x_1)\,\overline{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\overline{k}; \tag{2.2.6}$$

$$(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{2.2.7}$$

Demonstraţie. Demonstraţia egalităţilor (2.2.3) şi (2.2.4) rezultă din proprietăţile operaţiilor de adunare a doi vectori (vezi teorema 2.1.4) şi înmulţirea unui vector cu un scalar (vezi teorema 2.1.5), precum şi din unicitatea coordonatelor unui vector într-o bază dată. Astfel (2.2.3) rezultă din următorul şir de egalităţi:

$$\begin{aligned} \overline{v}_1 + \overline{v}_2 &= \left(x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}\right) + \left(x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}\right) = \\ &= x_1\overline{i} + x_2\overline{i} + y_1\overline{j} + y_2\overline{j} + z_1\overline{k} + z_2\overline{k} = \\ &= (x_1 + x_2)\,\overline{i} + (y_1 + y_2)\,\overline{j} + (z_1 + z_2)\,\overline{k}. \end{aligned}$$

Egalitatea (2.2.5). rezultă din proprietăţile (2.1.8), (2.1.9), (2.1.10) ale produsului scalar, precum şi din egalităţile $\overline{i} \cdot \overline{i} = \overline{j} \cdot \overline{j} = \overline{k} \cdot \overline{k} = 1, \overline{i} \cdot \overline{j} = \overline{i} \cdot \overline{k} = \overline{j} \cdot \overline{k} = 0$, (baza fiind ortonormată):

$$\begin{aligned} &\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = \left(x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}\right) \cdot \left(x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}\right) = \\ &= x_1x_2\left(\overline{i} \cdot \overline{i}\right) + x_1y_2\left(\overline{i} \cdot \overline{j}\right) + x_1z_2\left(\overline{i} \cdot \overline{k}\right) + y_1x_2\left(\overline{j} \cdot \overline{i}\right) + y_1y_2\left(\overline{j} \cdot \overline{j}\right) + y_1z_2\left(\overline{j} \cdot \overline{k}\right) + \\ &+ z_1x_2\left(\overline{k} \cdot \overline{i}\right) + z_1y_2\left(\overline{k} \cdot \overline{j}\right) + z_1z_2\left(\overline{k} \cdot \overline{k}\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \end{aligned}$$

Egalitatea (2.2.6). rezultă rezultă din proprietăţile (2.1.11), (2.1.14), (2.1.15) ale produsului vectorial, precum şi din egalităţile $\overline{i} \times \overline{i} = \overline{j} \times \overline{j} = \overline{k} \times \overline{k} = \overline{0}, \overline{i} \times \overline{j} = \overline{k}, \overline{i} \cdot \overline{k} = -\overline{j}, \overline{j} \times \overline{k} = \overline{i}$ (baza fiind ortonormată):

$$\begin{aligned} &\overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = \left(x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k}\right) \times \left(x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}\right) = \\ &= x_1x_2\left(\overline{i} \times \overline{i}\right) + x_1y_2\left(\overline{i} \times \overline{j}\right) + x_1z_2\left(\overline{i} \times \overline{k}\right) + y_1x_2\left(\overline{j} \times \overline{i}\right) + y_1y_2\left(\overline{j} \times \overline{j}\right) + y_1z_2\left(\overline{j} \times \overline{k}\right) + \\ &+ z_1x_2\left(\overline{k} \times \overline{i}\right) + z_1y_2\left(\overline{k} \times \overline{j}\right) + z_1z_2\left(\overline{k} \times \overline{k}\right) = (y_1z_2 - y_2z_1)\,\overline{i} + (z_1x_2 - z_2x_1)\,\overline{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\,\overline{k}. \end{aligned}$$

Ultima egalitate din teoremă rezultă din aplicarea precedentelor două şi din dezvoltarea determinatului din membrul drept după prima linie. ■

Remarca 2.2.5 Formula 4. se poate reţine mai uşor astfel:

$$\overline{v}_1 \times \overline{v}_2 = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \tag{2.2.8}$$

căci membrul drept al formulei este (formal) tocmai determinantul de mai sus dezvoltat după prima linie.

Remarca 2.2.6 Formula lui Gibs (2.1.17) rezultă şi prin calcul, aplicând pentru membrul stâng de două ori formula pentru produsul vectorial, iar pentru membrul drept formulele 3. şi 2. din teorema precedentă.

Din teorema precedentă rezultă următoarele consecinţe:

Corolarul 2.2.1 *Dacă $\overline{v} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ atunci $x = \overline{v} \cdot \overline{i}, y = \overline{v} \cdot \overline{j}, z = \overline{v} \cdot \overline{k}$.*

Demonstraţie. Aplicând formula (3.) rezultă:

$$\overline{v} \cdot \overline{i} = \left(x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}\right) \cdot \overline{i} = \left(x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}\right)\left(1 \cdot \overline{i} + 0 \cdot \overline{j} + 0 \cdot \overline{k}\right) = x \cdot 1 = x. \blacksquare$$

Corolarul 2.2.2 *Dacă $\overline{v} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ atunci lungimea sa este:*

$$v = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{2.2.9}$$

Demonstraţie. Din definiţia produsului scalar rezultă $v = \sqrt{\overline{v} \cdot \overline{v}}$, şi aplicând formula 3. din teorema precedentă rezultă egalitatea (2.2.9). ■

Corolarul 2.2.3 *Dacă $\overline{v}_l, l = \overline{1,2}$ au coordonatele x_l, y_l, z_l şi α este unghiul dintre ei atunci:*

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{2.2.10}$$

Demonstraţie. Din definţia produsului scalar rezultă că $\cos\alpha = \frac{\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2}{v_1 v_2}$,şi se aplică formula 3. din teorema precedentă precum şi corolarul precedent.

O consecinţă a corolarului precedent este:

Corolarul 2.2.4 *Oricare ar fi numerele $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ este adevărată următoarea inegalitate:*

$$(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 \leq \left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2\right)\left(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2\right), \tag{2.2.11}$$

inegalitatate care este un caz particular al inegalităţii Cauchy-Buniakovski-Schwarz.

Demonstraţie. Se consideră vectorii $\overline{v}_l, l = \overline{1,2}$ care au coordonatele x_l, y_l, z_l şi notând cu α unghiul dintre ei rezultă $\cos^2\alpha \leq 1$. În această inegalitate se înlocuieşte $\cos\alpha$ conform formulei (2.2.10), şi aducând la acelaşi numitor rezultă (2.2.11).

Remarca 2.2.7 Din (2.2.10) rezultă că vectorii $\overline{v}_1, \overline{v}_2$ sunt perpendiculari dacă şi numai dacă:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \tag{2.2.12}$$

Corolarul 2.2.5 *Oricare ar fi numerele $x_1, y_1, z1$, x$_2, y_2, z_2$ este adevărată următoarea identitate (**identitatea lui Lagrange**):*

$$\begin{aligned}&(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)^2 + (y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (z_1x_2 - z_2x_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = \\ &= \left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2\right)\left(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2\right)\end{aligned}$$

Demonstraţie. Raţionând ca şi la corolarul 2.2.4 rezultă pentru unghiul α egalitatea $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$,şi înlocuind aci $\cos\alpha$ conform (2.2.10) şi $\sin\alpha$ cu $\frac{|\overline{v}_1 \times \overline{v}_2|}{v_1 v_2}$, pe baza formulelor 3. şi 4. din teorema precedentă rezultă identitatea de mai sus. ■

2.3 Geometria analitică liniară în spaţiu

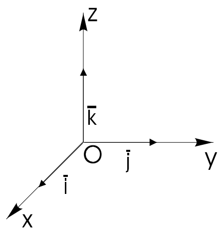
Pentru început să definim câteva noţiuni de bază în geometria analitică.

Definitia 2.3.1 *Se numeşte reper în spaţiu o mulţime formată dintr-un punct O (numit originea reperului) şi o bază din $\mathfrak{V}_3$. Dacă baza este ortonormată reperul se va numi ortonormat.*

Remarca 2.3.1 În cele ce urmează vom considera numai repere în care baza este ortonormată şi direct orientată. Un astfel de reper, conform notaţiilor din sectiunea 2 se va nota cu $\left\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$.

Definitia 2.3.2 *Se numeşte vector de poziţie al unui punct M din spaţiu într-un reper vectorul care are ca reprezentant segmentul orientat $\overrightarrow{OM}$. Se numesc coordonatele unui punct M într-un reper coordonatele vectorului de poziţie al punctului M în baza din reper.*

Remarca 2.3.2 Dacă avem dat reperul $\left\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$ atunci coordonatele punctului M se notează (x, y, z) şi sunt definite de egalitatea: $\overrightarrow{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Vom scrie în continuare $M(x, y, z)$ şi vom citi ”punctul M de coordonate (x, z, y)”. Dreptele orientate determinate de O şi versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$ respectiv $\bar{k}$ se vor nota cu Ox, Oy respectiv Oz şi se vor numi axele de coordonate, iar uneori vom folosi denumirea ”reperul $Oxyz$” în loc de reperul $\left\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\right\}$, denumire ”justificată” şi de desenul de mai jos:



2.3.1 Planul în spaţiu

În această secţiune vom studia planul din punct de vedere al geometrie analitice, adică vom răspunde la întrebările: Dacă un punct $M(x, y, z)$ este într-un anumit plan, ce relaţii există între coordonatele sale? Cum se reflectă asupra coordonatelor punctelor din plan proprietăţi geometrice ale planului respectiv?. Pentru început vom răspunde la prima întrebare:

Diferite determinări ale planului

Vom studia ce condiţii verifică coordonatele unui punct situat într-un plan care este definit prin anumite condiţii geometrice:

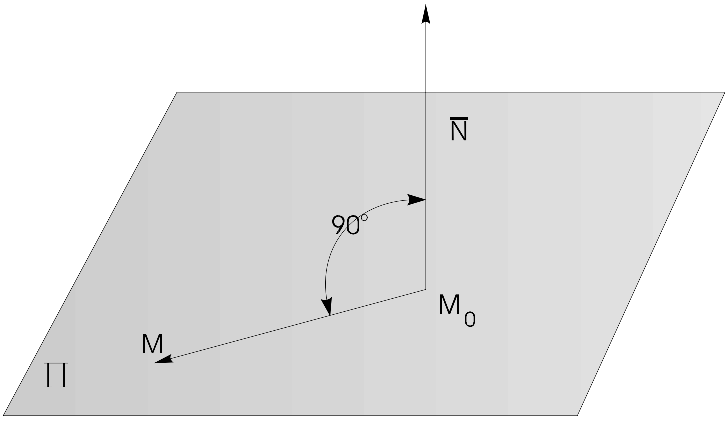
Plan determinat de un punct şi un vector perpendicular pe plan

Fie punctul M_0 şi vectorul $\overline{N}$ ($\overline{N} \neq \overline{0}$). Din geometria de liceu se ştie că există un singur plan, pe care îl vom nota cu Π care trece prin punctul M_0 şi este perpendicular pe vectorul $\overline{N}$. Fie acum un punct M arbitrar din planul Π. Este adevărată următoarea teoremă:

Teorema 2.3.1 $M \in \Pi$ *dacă şi numai dacă este adevărată următoarea egalitate:*

$$\overrightarrow{MM_0} \cdot \overline{N} = 0. \tag{2.3.1}$$

Demonstraţie. Conform figurii de mai jos (în care $M_0 \in \Pi$, $\overline{N} \perp \Pi$,sunt date, iar M este un punct arbitrar din planul Π):



punctul M aparţine planului Π dacă şi numai dacă vectorii $\overline{N}$ şi $\overrightarrow{M_0M}$ sunt perpendiculari[7], ceea ce, conform remarcii 2.1.13 este echivalent cu egalitatea (2.3.1). ■

Să transcriem acum egalitatea (2.3.1) folosind coordonatele. Pentru aceasta să notăm coordonatele punctului M_0 cu (x_0, y_0, z_0) , coordonatele punctului M cu (x, y, z) şi coordonatele vectorului $\overline{N}$ cu (A, B, C) . Atunci, pe baza teoremei 2.2.4 şi a definiţiei coordonatelor unui punct (definiţia 2.3.2) $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0)\,\overline{i} + (y - y_0)\,\overline{j} + (z - z_0)\,\overline{k}$ şi deci $\overrightarrow{M_0M} \cdot \overline{N} = (x - x_0)\,A + (y - y_0)\,B + (z - z_0)\,C$, care înlocuită în membrul stâng al egalităţii (2.3.1) ne conduce la ecuaţia:

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C\,(z - z_0) = 0 \tag{2.3.2}$$

Dacă în ecuaţia de mai sus notăm $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$ rezultă că punctul $M\,(x, y, z)$ aparţine planului Π dacă şi numai dacă coordonatele sale verifică ecuaţia:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{EGP}$$

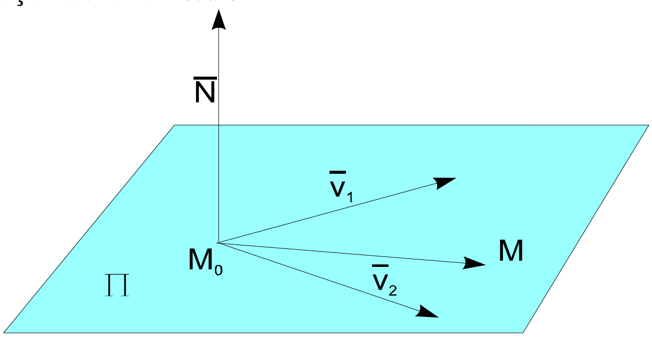
Ecuaţia (EGP) se numeşte ecuaţia generală a planului în spaţiu (cu condiţia $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, pentru că $\overline{N} \neq \overline{0}$).

Example 2.3.1 *Ne propunem să aflăm ecuaţia planului xOy. Acest plan este determinat de punctul $O\,(0, 0, 0)$ şi are ca vector normal versorul $\overline{k}$, deci $A = 0, B = 0, C = 1$. Înlocuind în formula (2.3.2) obţinem ecuaţia planului xOy :*

$$z = 0. \tag{2.3.3}$$

Plan determinat de un punct şi doi vectori necoliniari paraleli cu planul

Fie un punct $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ şi vectorii $\bar{v}_1 = a_1\overline{i} + b_1\overline{j} + c_1\overline{k}$, $\bar{v}_2 = a_2\overline{i} + b_2\overline{j} + c_2\overline{k}$ necoliniari (adică, conform remarcii 2.1.15 $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 \neq \bar{0}$). Ne propunem să aflăm ce ecuaţie (sau ecuaţii) verifică coordonatele unui punct $M\,(x, y, z)$ care aparţine unui plan Π care conţine punctul M_0 şi este paralel cu vectorii $\bar{v}_1$ şi $\bar{v}_2$. Figura de mai jos ilustrează ideea demonstraţiei teoremei 2.3.2:



Analogul teoremei 2.3.1 este:

[7] conform geometriei din liceu, o dreaptă este peroendiculară pe un plan dacă şi numai dacă este perpendiculară pe orice dreaptă din plan.

Teorema 2.3.2 *Punctul M aparţine planului Π dacă şi numai dacă este verificată ecuaţia:*

$$\left(\overrightarrow{MM_0}, \bar{v}_1, \bar{v}_2\right) = 0 \tag{2.3.4}$$

Demonstraţie. Punctul M aparţine planului Π dacă şi numai dacă vectorii $\overrightarrow{MM_0}, \bar{v}_1, \bar{v}_2$ sunt coplanari, ceea ce este echivalent cu egalitatea (2.3.4), conform remarcii 2.1.16.

Folosind coordonatele egalitatea (2.3.4) se scrie, conform operaţiilor cu vectori (vezi formula (2.2.7)):

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0. \blacksquare \tag{2.3.5}$$

Plan determiant de trei puncte necoliniare

Fie punctele $M_i\,(x_i, y_i, z_i)\,,\, i = \overline{1,3}$ necoliniare (adică vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$ şi $\overrightarrow{M_1M_3}$ sunt necoliniari, sau folosind operaţii cu vectori, conform remarcii 2.1.12, $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} \neq \bar{0}$). Ecuaţia planului determinat de cele trei puncte este dată de:

Teorema 2.3.3 *Planul Π care trece prin punctele $M_i\,(x_i, y_i, z_i)\,,\, i = \overline{1,3}$ necoliniare are ecuaţia:*

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.3.6}$$

Demonstraţie.Varianta 1. (geometrică) Reducem problema la cazul precedent, considerând că planul Π este determinat de punctul M_1 şi vectorii $\overrightarrow{M_1M_2}$ şi $\overrightarrow{M_1M_3}$. Conform formulei (2.3.5) ecuaţia planului este:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ecuaţie care se poate scrie:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

adunând în determinantul de mai sus linia a doua la celelalte linii obţinem ecuaţia (2.3.6).

Varianta a 2-a. (algebrică) Ecuaţia planului Π (vezi (EGP)) este:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2.3.7}$$

A determina ecuaţia planului Π se reduce la a determina coeficienţii A, B, C, D din ecuaţia de mai sus. Scriind că punctele $M_i,\, i = \overline{1,3}$ verifică această ecuaţie rezultă:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0. \end{cases} \tag{2.3.8}$$

Rezolvând acest sistem cu necunoscutele A, B, C (care are determinantul nenul din condiţia de necoliniaritate a punctelor M_1, M_2, M_3) şi înlocuind în (2.3.7) rezultă ecuaţia palnului Π . În loc să procedăm aşa, cosiderăm sistemul omogen (cu necunoscutele A, B, C, D) format din sistemul (2.3.8) şi ecuatia (2.3.7), sistem care are soluţie nenulă. Condiţia ca acest sistem să aibă soluţie nenulă este ca determinantul său să fie egal cu 0 , adică tocmai ecuaţia (2.3.6). $\blacksquare$

Poziţia relativă a două plane, unghiul a două plane

Fie planele Π_1, Π_2 de ecuaţii:

$$\begin{array}{c} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{array} \tag{2.3.9}$$

Poziţia relativă a celor două plane, determinată pe baza ecuaţiilor (2.3.9), este dată de :

Teorema 2.3.4 *Planele* Π_1, Π_2 *sunt paralele, dacă*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}, \tag{2.3.10}$$

coincid dacă:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \tag{2.3.11}$$

şi au o dreaptă comună dacă rangul matricei $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}$ *este doi.*

Demonstraţie. Dacă rangul matricei $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}$ este doi atunci sistemul (2.3.9) format din ecuaţiile celor două plane este simplu nederminat, iar soluţile sale sunt coordonatele punctelor de pe o dreaptă (va urma). Dacă rangul matricei precedente este unu, atunci sistemul (2.3.9) este incompatibil, dacă rangul matricei extinse este doi, ceea ce este echivalent cu (2.3.10), şi deci planele sunt paralele, sau sistemul (2.3.9) este compatibil cu rangul matricei extinse egal cu doi, ceea ce e echivalent cu (2.3.11), şi în acest caz cele două ecuaţii se obţin una din cealaltă prin înmulţirea cu o constantă, deci reprezintă acelaşi plan. ■

Remarca 2.3.3 Dacă se ţine cont de semnificaţia geometrică a coeficienţilor lui x, y, z din (EGP) (ei sunt coordonatele normalei la plan), atunci egalitatea primelor trei rapoarte din (2.3.10),(2.3.11) nu este altceva decât paralelismul normalelor la plane.

Unghiul a două plane se defineşte astfel:

Definitia 2.3.3 *Unghiul planelor* Π_1, Π_2 *date prin ecuaţiile (2.3.9) este unghiul dintre normalele la cele două plane* $\overline{N_1} = A_1\overline{i} + B_1\overline{j} + C_1\overline{k}$, $\overline{N_2} = A_2\overline{i} + B_2\overline{j} + C_2\overline{k}$.

Teorema 2.3.5 *Dacă notăm cu* α *unghiul celor două plane, atunci:*

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Demonstraţia formulei de mai sus este simplă, rezultând direct din definiţia precedentă şi din formula (2.2.10) care dă unghiul a doi vectori pe baza coordonatelor.

Din teorema de mai sus rezultă:

Corolarul 2.3.1 *Planele* Π_1, Π_2 *date prin ecuaţiile (2.3.9) sunt perpendiculare dacă şi numai dacă:*

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

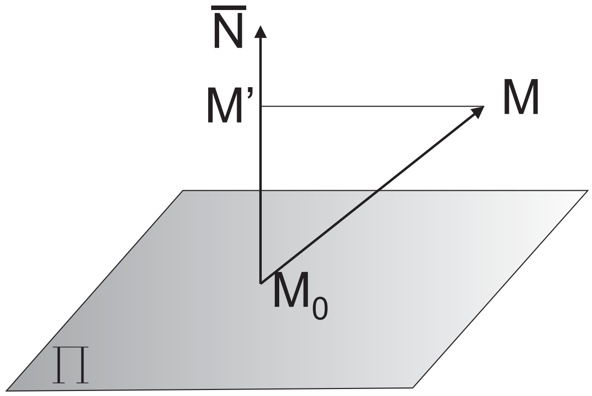
Distanţa de la un punct la un plan

Fie planul Π de ecuaţie (EGP), şi punctul $M\left(x_1, y_1, z_1\right)$.

Teorema 2.3.6 *Distanţa de la punctul* M_1 *la planul* Π *este egală cu:*

$$dist(M, \Pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{2.3.12}$$

Demonstraţie. Să facem figura:

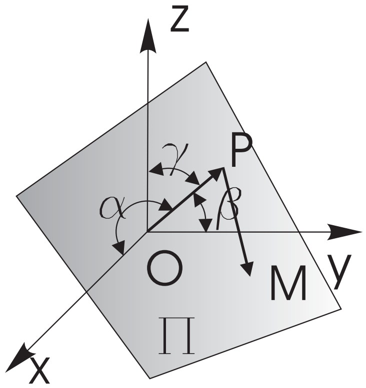


în figura de mai sus $\overline{N} = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}$ este normala la planul Π, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ este un punct din plan (deci coordonatele sale verifică ecuaţia planului), iar M' este proiecţia punctului M pe normală. Conform geometriei "clasice" distanţa de la M la planul Π este egală cu lungimea segmentului M_0M'. Dar din proprietăţile produsului scalar avem:

$$\begin{aligned} M_0M' &= \frac{\left|\overline{N}\cdot\overrightarrow{M_0M}\right|}{N} = \\ &= \frac{\left|A\left(x_1-x_0\right)+B\left(y_1-y_0\right)+C\left(z_1-z_0\right)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \\ &= \frac{\left|Ax_1+By_1+Cy_1-\left(Ax_0+By_0+Cz_0\right)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \\ &= \frac{\left|Ax_1+By_1+Cz_1+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \blacksquare \end{aligned}$$

Ecuaţia normală a unui plan (Hesse)

Fie Π un plan pentru care se cunoaşte distanţa de la origine la plan d şi unghiurile α, β, γ făcute de perpendiculara coborâtă din origine pe plan. Să notăm cu P piciorul perpendicularei coborâte din origine pe plan şi cu $M\left(x, y, z\right)$ un punct arbitrar din plan.



Din datele cunoscute avem $\overrightarrow{OP} = d\left(\cos\alpha\overline{i} + \cos\beta\overline{j} + \cos\gamma\overline{k}\right)$, iar condiţia ca $M \in \Pi$ este echivalentă cu $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PM} = 0$. Transcriind această egalitate în coordonate avem:

$$d\left(\cos\alpha(-d\cos\alpha + x) + \cos\beta\left(-d\cos\beta + y\right) + \cos\gamma\left(-d\cos\gamma + z\right)\right) = 0$$

sau făcând calculele şi ţinând cont că $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, rezultă că coordonatele punctului M verifică ecuaţia:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - d = 0 \qquad (2.3.13)$$

Ecuaţia (2.3.13) se numeşte ecuaţia normală a planului (sau forma Hesse).

Remarca 2.3.4 Din ecuaţia generală a planului se ajunge la ecuaţia normală a planului prin împărţirea ecuaţiei (EGP) cu $\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, alegând semnul astfel ca în ecuaţia obţinută termenul liber să fie negativ.

Remarca 2.3.5 O altă formă a ecuaţiei planului este aşa numita "ecuaţia planului prin tăieturi" de forma:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$$

care se obţine din (EGP) prin împărţirea cu $-D$. Numitorii din ecuaţia de mai sus sunt tocmai coordonatele punctelor de intersecţie cu axele (adică planul intersectează axa Ox în punctul $(a,0,0)$, axa Oy în punctul $(0,b,0)$ şi axa Oz în $(0,0,c)$).

Exercitiul 3.1 Să se afle latura cubului care are două feţe în planele $x+2y+2z-6=0, x+2y+2z+3=0.$