Technical University of Cluj - Napoca
Computer Science Department

Pocesarea Imaginilor

Curs nr. 6

Prelucrari pe imagini multinivel (grayscale) (I)

Proprietati statistice ale imaginilor grayscale si aplicatii. Imbunatatirea calitatii imaginilor

Statistical features / Trasaturi statistice

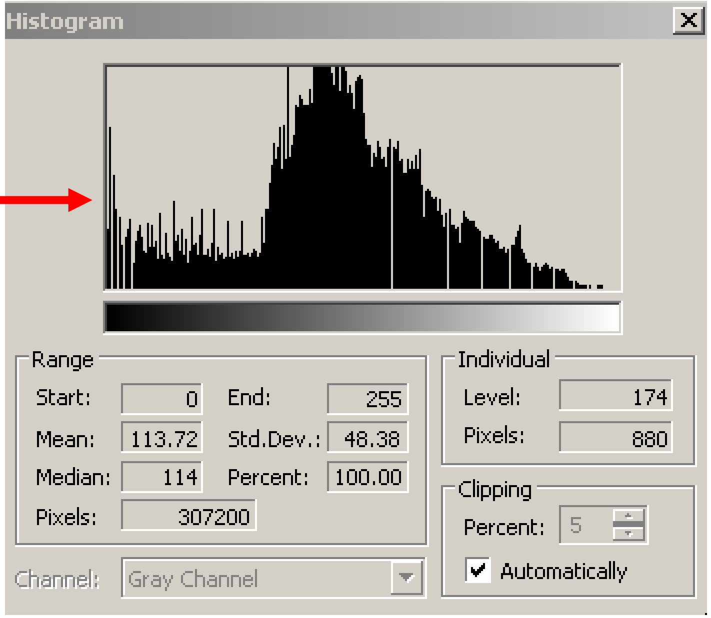
Trasaturi statistice $\Rightarrow$ trasaturi globale (calculate pe intreaga imagine sau pe o regiune de interes – ROI)

Gray-levels histogram (histograma nivelurilor de gri/intensitate)

Nivele de gri: $g \in [0 \ldots L]$, L – nivelul max. (imagini 8biti/pixel : L=255)

$$h(g)=N_g$$

N_g – numarul de pixeli din imagine/ROI care au nivelul de intensitate egal cu g



Statistical features / Trasaturi statistice

Probability distribution function (of the gray-levels)

(functia distributiei de probabilitate a nivelurilor de gri)

P(g) := probabilitatea ca nivelul de intensitate dintr-o regiune sa fie mai mica sau egala cu g:

$0 <= P(g) <= 1$

P(g) – monoton crescatoare $\Rightarrow$ *dP/dg >=0*

Probability density function (of the gray-levels): *p(g)*

(functia densitatii de probabilitate a nivelurilor de gri)

p(g)Δg := probabilitatea ca nivelul de intensitate dintr-o regiune sa fie cuprins intre *g* si *g+Δg*

$$p(g)\cdot\Delta g = \left(\frac{dP(g)}{dg}\right)\Delta g$$

p(g) – histograma normalizata:

$$p(g) = \frac{h(g)}{M}, \quad with: \begin{cases} p(g) >= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} p(g)dg = 1, \quad \sum_{g=0}^{L} \frac{h(g)}{M} = \frac{M}{M} = 1 \end{cases}$$

M = image_height x image_width

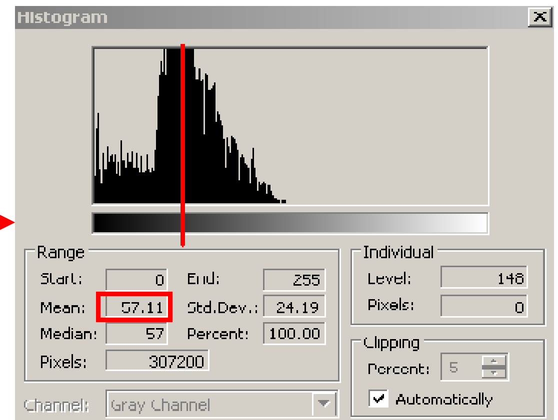
Statistical features / Trasaturi statistice

Mean (media)

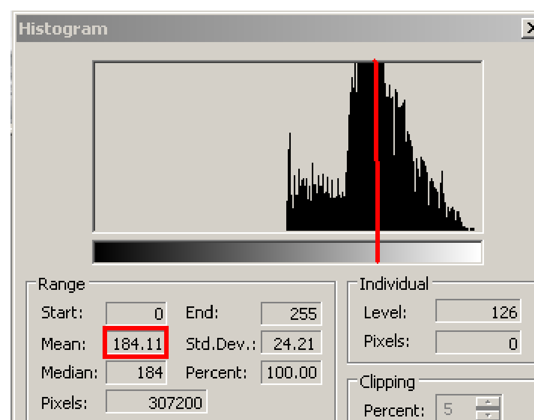
$\Rightarrow$ Masura a intensitatii medii dintr-o imagine / ROI

$$\bar{g} = \mu = \int g \cdot p(g) dg = \sum_{g=0}^{L} g \cdot p(g) = \frac{1}{M} \sum_{g=0}^{L} g \cdot h(g) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{H-1} \sum_{j=0}^{W-1} I(i,j)$$

Image "intunecata"



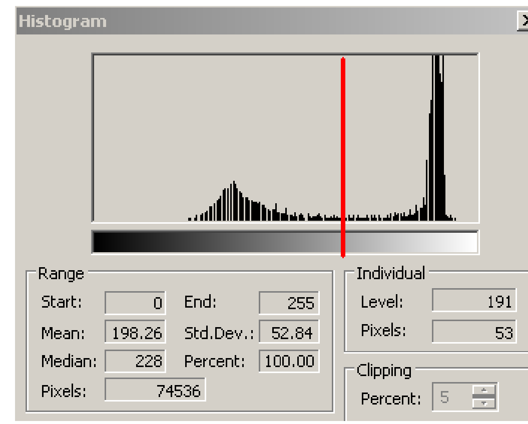
Imagine "luminoasa"

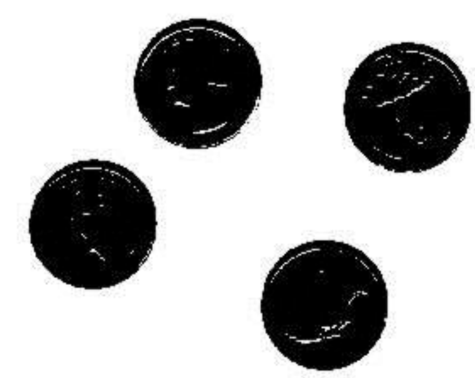


Aplicatie: segmentare imagini grayscale

Basic global thresholding algorithm

- Calculeaza automat pragul de binarizare (T)
- Se poate aplica pe imagini cu histograma bimodala





Algoritmul

1. Take an initial value for T:

   $T_0 = \mu$ (object area = background area)

   $T_0 = (g_{MAX} + g_{MIN})/2$

2. *Step k*: segment the image after T_{k-1} by dividing the image pixels in 2 groups:

   $$G1: I[i,j] < T_{k-1} \Rightarrow \mu_{G1}$$

   $$G2: I[i,j] > T_{k-1} \Rightarrow \mu_{G2}$$

3. $T_k = (\mu_{G1} + \mu_{G2})/2$

4. Repeat 2-3 until $T_k - T_{k-1} < \varepsilon$

Implementare eficienta $\Rightarrow$ se va calcula mai intai histograma imaginii iar apoi toate calculele (μ_{Gi}) se vor face pe histograma !!!

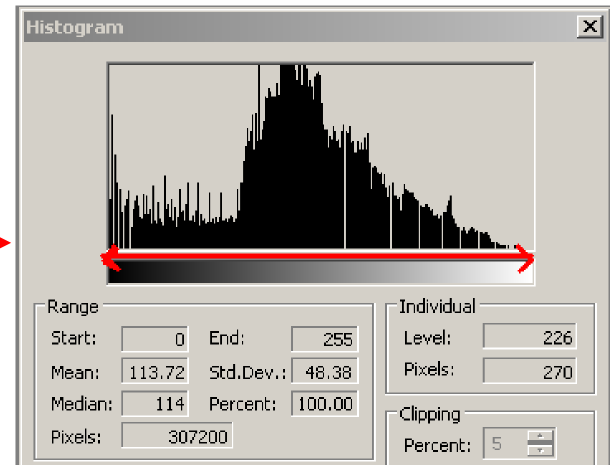
Statistical features / Trasaturi statistice

Standard deviation (deviatia standard)

⇒ Masura a contrastului mediu al imaginii / ROI

$$\sigma = \sqrt{\sum_{g=0}^{L}(g-\mu)^2 \cdot p(g)} = \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{H-1}\sum_{j=0}^{W-1}\left(I(i,j)-\mu\right)^2}$$

Contrast ridicat



Contrast scazut

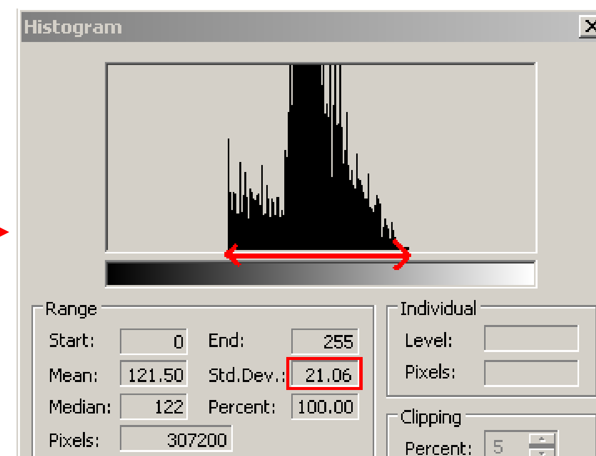
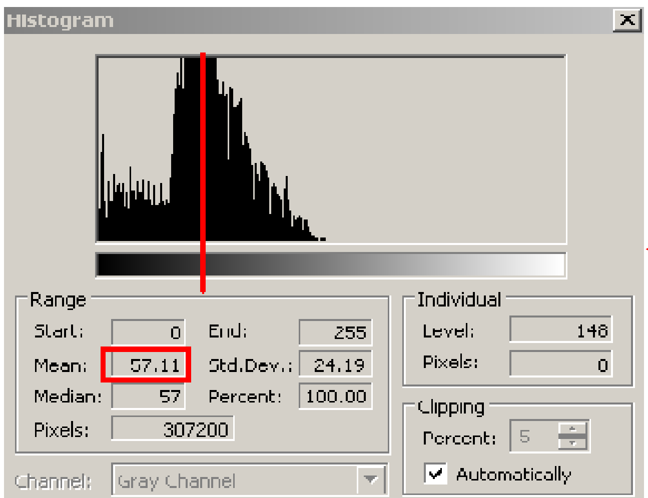


Image enhancement / Imbunatatirea calitatii imaginilor

Histogram slide / deplasarea histogramei

$$Slide(\mathrm{I}[i,j]) = \mathrm{I}[i,j] + offset$$

offset > 0 ⇒ imagine mai “luminoasa”
offset < 0 ⇒imagine mai “intunecata”



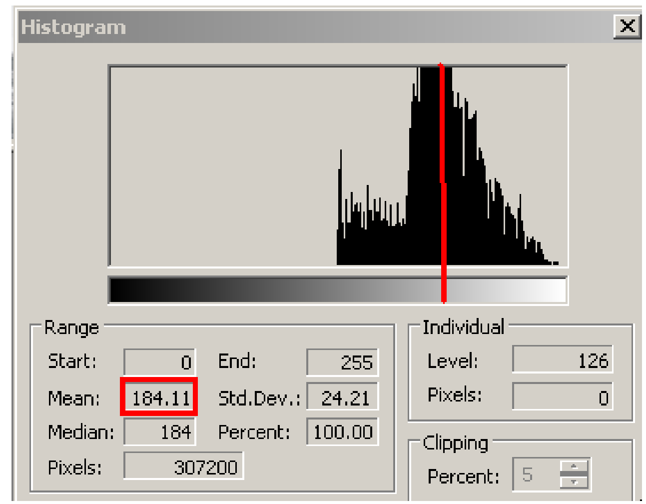
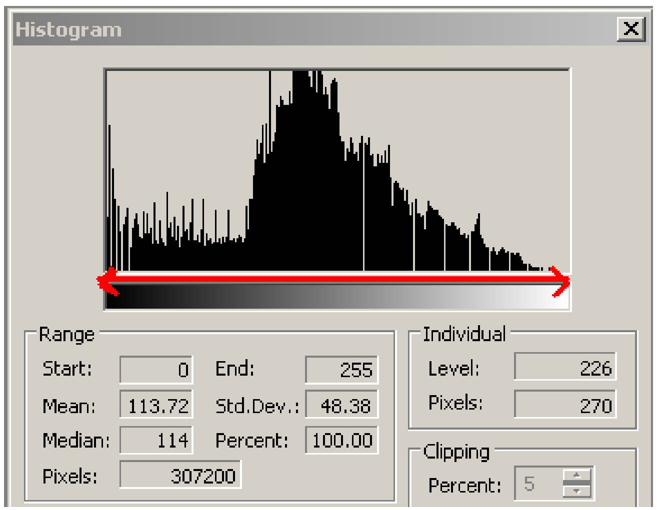


Image enhancement / Imbunatatirea calitatii imaginilor

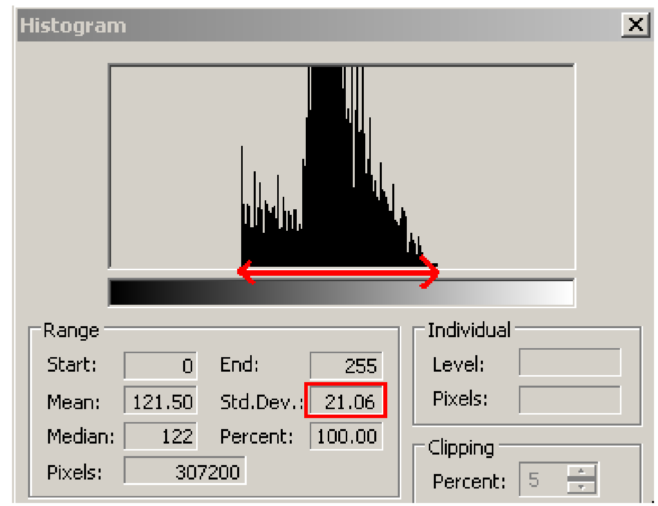
Histogram stretch/shrink (latire/ingustare a histogramei)

$$\textit{Strecth/Shrink}(I[i,j]) = Final_{MIN} + (Final_{MAX} - Final_{MIN}) * (I[i,j] - g_{MIN}) / (g_{MAX} - g_{MIN})$$



shrink →

← stretch



shrink →

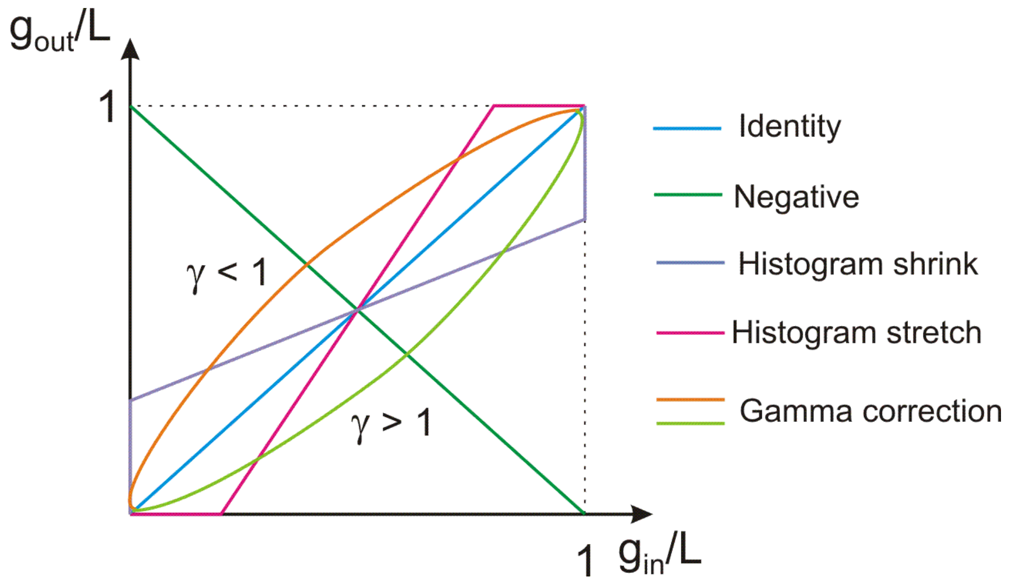
← stretch

Re-maparea nivelelor de gri folosind o functie de transformare

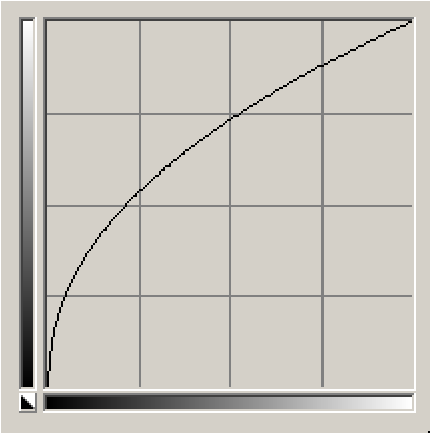
$g_{output} = T(g_{input})$

Ex. - gamma correction:

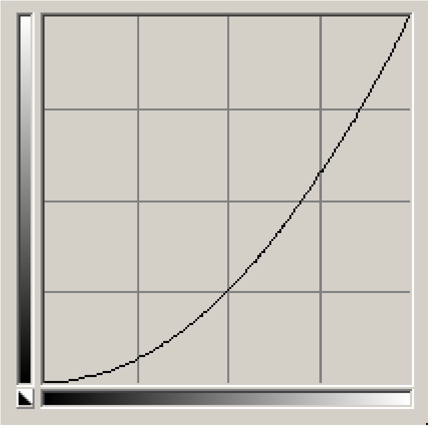
$$g_{out} = c \cdot g_{in}^{\gamma} \qquad \text{sau} \qquad \frac{g_{out}}{L} = c \cdot \left(\frac{g_{in}}{L}\right)^{\gamma}$$



Ex. - gamma correction:



γ< 1: codificare/compresie gamma



γ> 1: decodificare/decompresie gamma

Statistical features / Trasaturi statistice

Informatia – informatia asociata nivelului de intensitate g:

$$I_g = -\log_2 p(g) \quad [bits]$$

$\Rightarrow$ informatia este ridicata cand este generat un nivel de gri cu probabilitate mica

Entropy – informatia medie din imagine:

$$H = -\sum_{g=0}^{L} p(g) \cdot \log_2 p(g) \quad [bits]$$

$\Rightarrow$ Cati biti avem nevoie pentru a codifica datele din imagine:

H (mare) – val. pixelilor sunt distribuite pe multe nivele de gri

$H_{max} = \log_2 L$ [bits] (uniform PDF)

Energy –cum sunt distribuite nivelele de gri:

$$E = \sum_{g=0}^{L} [p(g)]^2$$

E (mica) – numarul de nivele de gri este mare

$E_{max} = 1$ (un singur nivel de gri)

Technical University of Cluj Napoca
Computer Science Department

Histogram equalization/ Egalizarea histogramei

Nivele de gri normalizate:

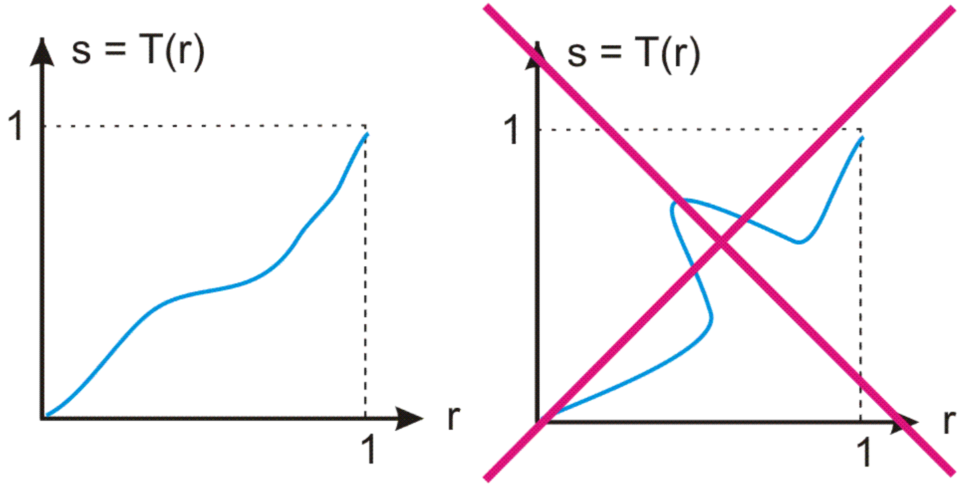
$g \in [0 \ldots L] \Rightarrow r \in [0 \ldots 1]$

Functie de transformare:

$s = T(r)$

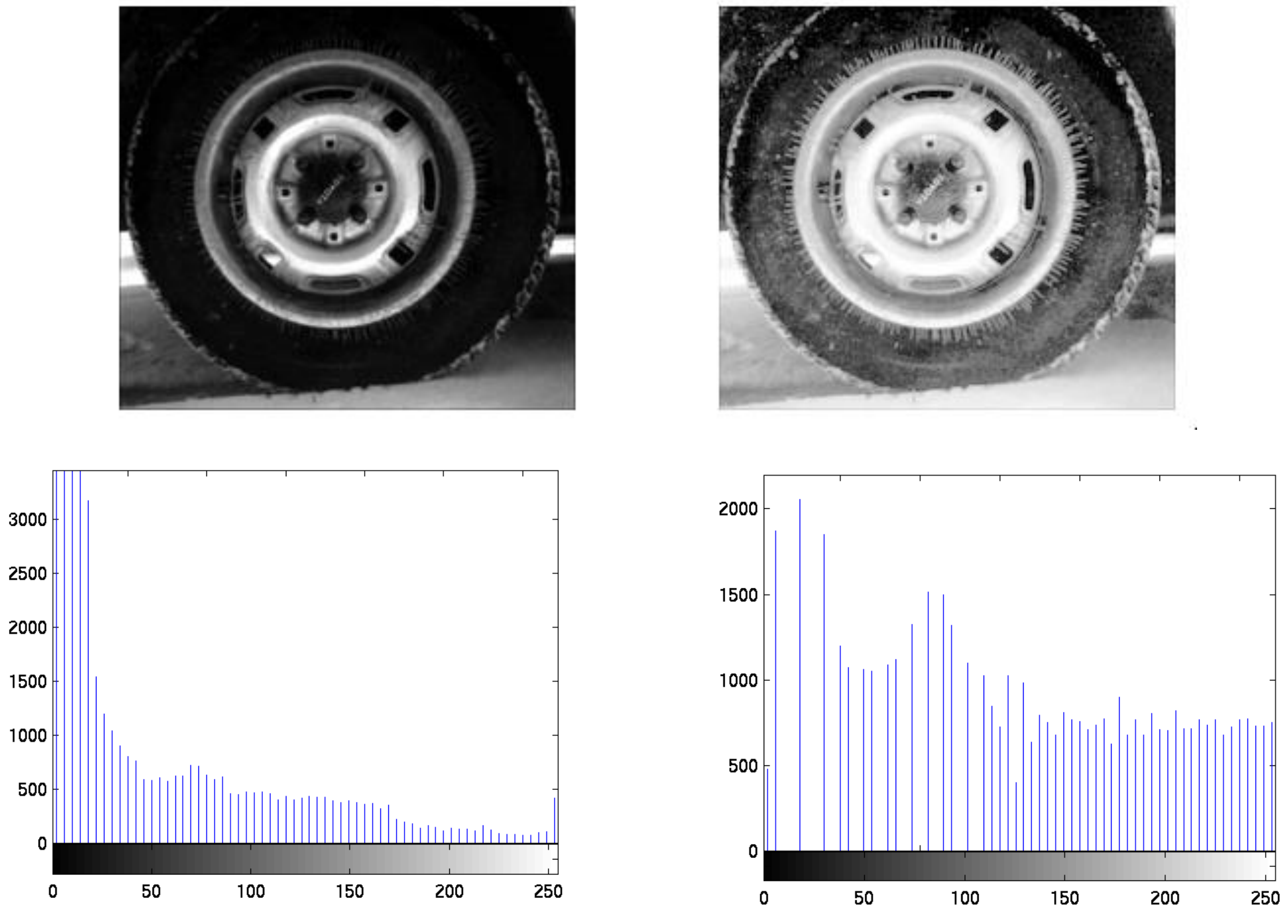
(a). Bijectiva si monoton crescatoare $\Rightarrow \exists\; r = T^{-1}(s)$

(b). $0 <= T(r) <= 1$



Histogram processing / Procesari pe histograma

Histogram equalization/ Egalizarea histogramei: rezultate



Histogram processing / Procesari pe histograma

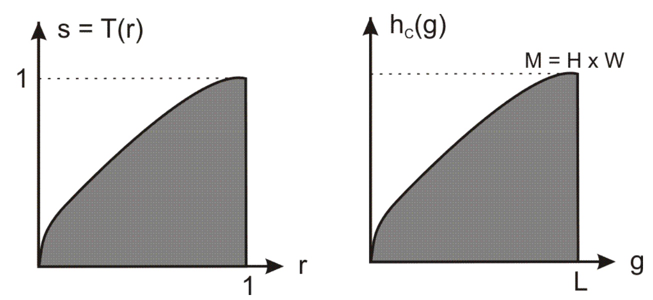
Histogram equalization/ Egalizarea histogramei

- $p_r(r)$, $p_s(s)$ – FDP ale imagini de intrare si iesire
- $p_r(r)$, $T(r)$ sunt cunoscute si T^{-1} satisface conditia (a)

$$p_s(s) = p_r(r)\left|\frac{dr}{ds}\right| \qquad (1)$$

Historama cumulativa / FDP cumulativa (CDF)

$$s = T(r) = \int_0^r p_r(w)dw \qquad (2)$$



T satisface (a) & (b)

Regula Leibniz: derivata unei integrale definite superior este chiar functia integrata evaluata in acea limita:

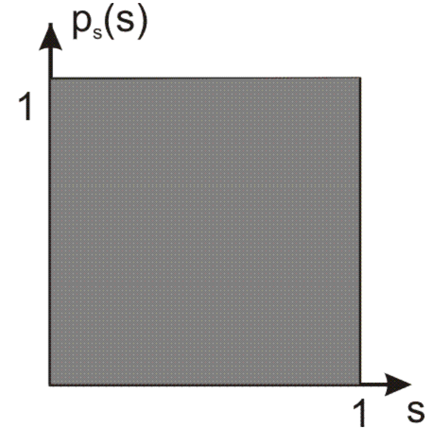
$$\frac{ds}{dr} = \frac{dT(r)}{dr} = \frac{d}{dr}\left[\int_0^r p_r(w)dw\right] = p_r(r) \qquad (3)$$

Technical University of Cluj Napoca
Computer Science Department

Histogram equalization/ Egalizarea histogramei

(1) + (3) $\Rightarrow$

$$p_s(s) = p_r(r)\left|\frac{dr}{ds}\right| = p_r(r)\left|\frac{1}{p_r(r)}\right| = 1 \quad , \quad 0 <= s <= 1$$



$p_s(s)$:

- PDF uniforma
- independenta de $p_r(r)$

Algoritmul de egalizare a histogramei

$$p_r(r_k) = \frac{n_k}{n} \quad , \quad k = 0...L, \quad r_k = k/L$$

$$s_k = T(r_k) = \sum_{j=0}^{k} p_r(r_j) = \sum_{j=0}^{k} \frac{n_j}{n} \quad , \quad k = 0...L$$

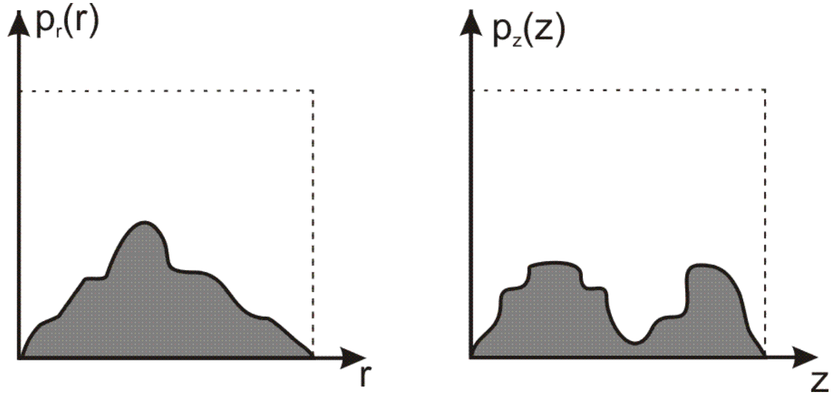
$\Rightarrow$ remapare nivele de gri ale imaginii de iesire: r_k -> s_k

Egalizarea histogramei - exemplu

Egalizare

Histogram processing / Procesari pe histograma

Histogram specification / matching (Specificarea histogramei)



input image $\Rightarrow$ output image

Pentru imaginea de intrare : $s = T(r) = \int_0^r p_r(w)dw$ (1)

Se defineste o variabila aleatoare z cu propriatatile:

$$G(z) = \int_0^z p_z(t)dt = s \qquad (2)$$

(1) + (2) $\Rightarrow$ $G(z) = T(r)$

$$z = G^{-1}(s) = G^{-1}[T(r)]$$

Histogram processing

Histogram specification / matching (Specificarea histogramei)

$r_k \leftrightarrow z_k$

Nu se poate deduce o expresie analitica pt. G^{-1} !?

Algorithm:

1. $r_k \leftrightarrow s_k$: $$s_k = T(r_k) = \sum_{j=0}^{k} p_r(r_j) = \sum_{j=0}^{k} \frac{n_j}{n} \quad , \quad k = 0 \ldots L$$

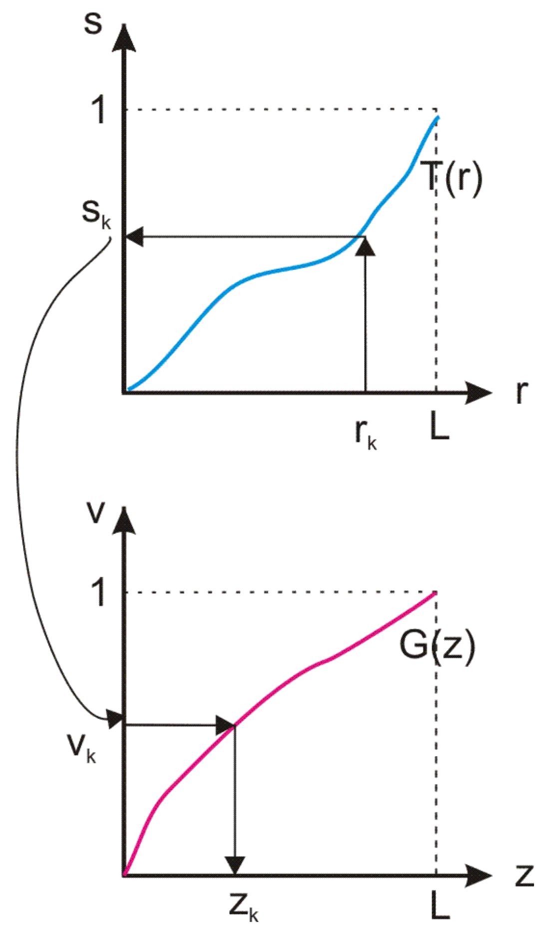
2. $z_k \leftrightarrow v_k$: $$v_k = G(z_k) = \sum_{j=0}^{k} p_z(z_j) = s_k \quad , \quad k = 0 \ldots L$$

3. $s_k \leftrightarrow z_k$:

   Fie $z' = z_k$, $k = 0, \ldots L$

   z_k va fi cea mai mica valoare a lui z' care satisface conditia:

   $$(G(z') - s_k) >= 0$$



Metoda Otsu (calculul pragului de binarizare)

Definirea problemei

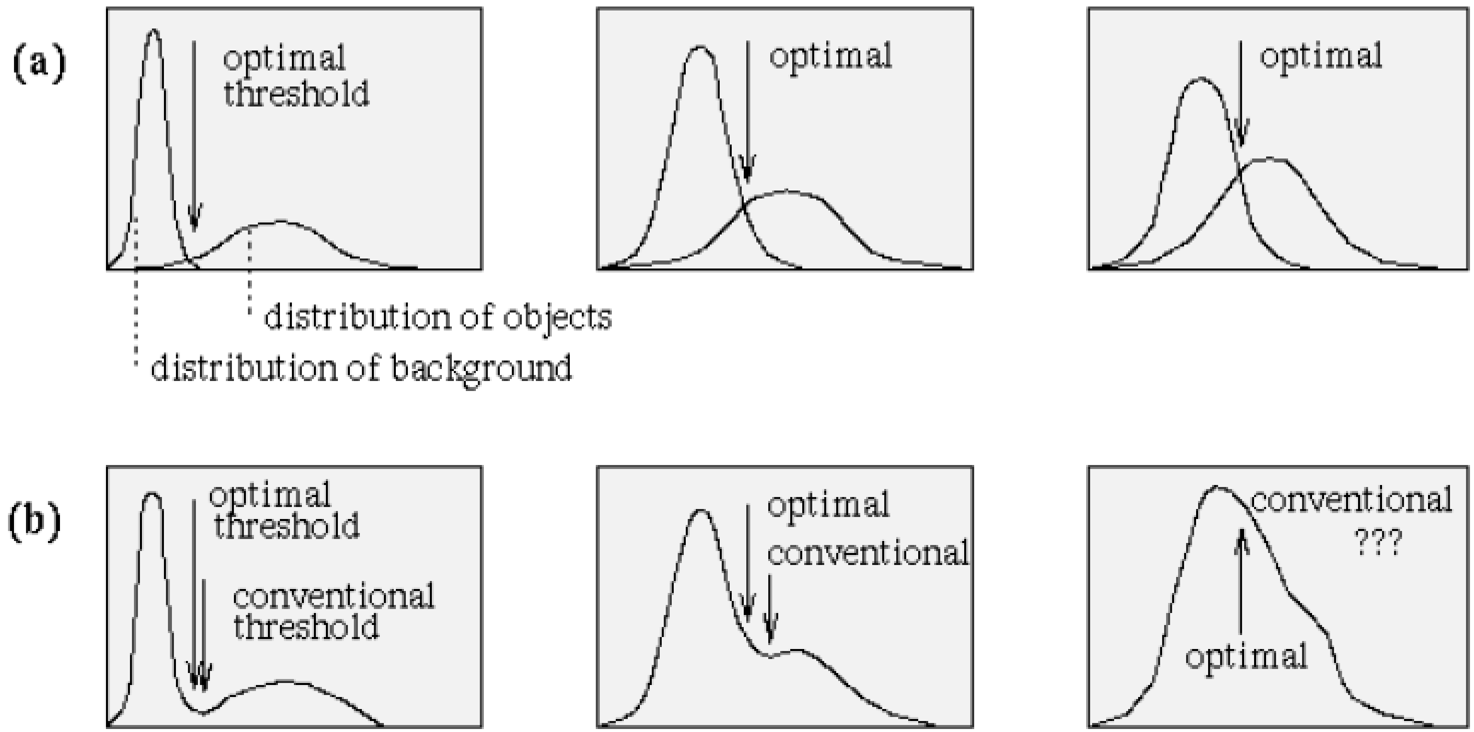
- Avem două grupuri de pixeli, care se întind pe domenii de intensităţi diferite (ex: obiecte şi fundal). Problema selecţiei unui prag este complicată de faptul că aceste domenii de intensitate uneori se suprapun parţial. Se doreşte minimizarea erorilor de clasificare a unui pixel obiect ca fundal, şi viceversa.

- Pentru realizarea acestui deziderat, încercăm să minimizăm aria de sub histograma unei regiuni, care pe baza pragului calculat va fi atribuită celeilalte regiuni. Vom considera aceste două regiuni ca două grupuri.

- Pragul va fi ales astfel ca cele două grupuri să fie cât mai "strânse", minimizând astfel suprapunerea.

- O măsură a omogenităţii grupului este varianţa. Un grup cu omogenitate mare are o varianţă mică, un grup cu omogenitate mică are varianţă mare.

Metoda Otsu



Histograme de nivele de gri aproximate prin două distribuţii normale. Pragul se alege pentru a avea probabilitatea minimă de a segmenta greşit.

a) Distribuţia de probabilitate a fundalului şi a obiectelor
b) Histograma rezultată, şi pragurile optime

Metoda Otsu

Varianţa ponderată intra-clasă este: $\sigma_w^2(t) = q_1(t)\sigma_1^2(t) + q_2(t)\sigma_2^2(t)$

Probabilităţile asociate claselor sunt estimate ca: $q_1(t) = \sum_{i=1}^{t} P(i)$ $\quad q_2(t) = \sum_{i=t+1}^{I} P(i)$

unde

$$P(i) = \frac{H(i)}{N^2}$$

$$q_2 = 1 - q_1$$

Mediile claselor sunt definite ca: $\mu_1(t) = \sum_{i=1}^{t} \frac{iP(i)}{q_1(t)}$ $\quad \mu_2(t) = \sum_{i=t+1}^{I} \frac{iP(i)}{q_2(t)}$

Varianţele individuale ale claselor sunt definite ca:

$$\sigma_1^2(t) = \sum_{i=1}^{t} [i - \mu_1(t)]^2 \frac{P(i)}{q_1(t)} \qquad \sigma_2^2(t) = \sum_{i=t+1}^{I} [i - \mu_2(t)]^2 \frac{P(i)}{q_2(t)}$$

În acest moment avem toate ecuaţiile necesare pentru a măsura varianţa ponderată intra-clasă. Am putea să verificăm fiecare posibilă valoare a pragului t, şi să o alegem pe cea care minimizează această varianţă.

- Totuşi, relaţia dintre varianţa intra-clasă şi varianţa dintre clase se poate exploata pentru a găsi o recursivitate ce permite un calcul mai rapid.

Notatii: P – FDP, q – probabilitate (q(t) – FDP cumulativa a lui P)

Metoda Otsu

Varianţa totală a imaginii este:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{I}\left[(i-\mu)^2 P(i)\right] \qquad \mu = \sum_{i=1}^{I} iP(i)$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{t}[i-\underbrace{\mu_1(t)+\mu_1(t)}-\mu]^2 P(i) + \sum_{i=t+1}^{I}[i-\underbrace{\mu_2(t)+\mu_2(t)}-\mu]^2 P(i)$$

$$= \sum_{i=1}^{t}\{[i-\mu_1(t)]^2 + 2[i-\mu_1(t)][\mu_1(t)-\mu]+[\mu_1(t)-\mu]^2\}P(i)$$

$$+ \sum_{i=t+1}^{I}\{[i-\mu_2(t)]^2 + 2[i-\mu_2(t)][\mu_2(t)-\mu]+[\mu_2(t)-\mu]^2\}P(i)$$

Dar: $\sum_{i=1}^{t}[i-\mu_1(t)][\mu_1(t)-\mu]P(i)=0 \qquad \sum_{i=t+1}^{I}[i-\mu_2(t)][\mu_2(t)-\mu]P(i)=0$

Astfel $\Rightarrow$ $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{t}[i-\mu_1(t)]^2 P(i) + [\mu_1(t)-\mu]^2 q_1(t) + \sum_{i=t+1}^{I}[i-\mu_2(t)]^2 P(i) + [\mu_2(t)-\mu]^2 q_2(t)$

$$\sigma^2 = [q_1(t)\sigma_1^2(t) + q_2(t)\sigma_2^2(t)] + \{q_1(t)[\mu_1(t)-\mu]^2 + q_2(t)[\mu_2(t)-\mu]^2\}$$

$$\mu = q_1(t)\mu_1(t) + q_2(t)\mu_2(t) \qquad 1-q_1(t)=q_2(t)$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \sigma_w^2(t) + q_1(t)[1-q_1(t)][\mu_1(t)-\mu_2(t)]^2$$

Metoda Otsu

Pentru orice prag, varianţa totală a imaginii este suma dintre varianţa intra-clasă, şi varianţa dintre clase.

$$\sigma^2 = \underbrace{\sigma_w^2(t)}_{\text{varianţa intra-clasă}} + \underbrace{q_1(t)[1 - q_1(t)][\mu_1(t) - \mu_2(t)]^2}_{\text{varianţa dintre clase}}$$

-Deoarece varianţa totală este constantă, independentă de pragul t, efectul alegerii pragului este doar de a schimba ponderea celor două varianţe.
-**Problema minimizării varianţei intra-clasă este astfel echivalentă cu problema maximizării varianţei dintre clase**.
-Acest lucru se poate face recursiv.

Technical University of Cluj Napoca
Computer Science Department

Metoda Otsu

Iniţializare: $q_1(1) = P(1) \quad ; \quad \mu_1(0) = 0$

Recursivitate: $q_1(t+1) = q_1(t) + P(t+1)$

$$\mu_1(t+1) = \frac{q_1(t)\mu_1(t) + (t+1)P(t+1)}{q_1(t+1)}$$

$$\mu_2(t+1) = \frac{\mu - q_1(t+1)\mu_1(t+1)}{1 - q_1(t+1)}$$

Pentru fiecare prag potenţial t:

1. Se separă pixelii în două clase, pe baza pragului
2. Se calculează media celor două clase
3. Se calculează varianţa dintre clase, conform ecuaţiei de pe slide-ul anterior

Se reţine pragul t care maximizează această varianţă.

https://en.wikipedia.org/wiki/Otsu%27s_method

Aplicatie: segmentare imagini grayscale

Metoda OTSU pt. praguri multiple:

G. X.Ritter, J.N. Wilson, Handbook of computer vision algorithms in image algebra - 2nd ed, 2001 CRC Press: Cap. 4.7. Threshold Selection by Maximizing Between-Class Variance.