Algebră
Curs 3

Prof. Bogdan Gavrea

CM 2016

Spații vectoriale

Spații vectoriale. Subspații liniare. Bază și dimensiune.

Definiție

Fie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *sau* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *Un triplet de forma* $(V, +, \cdot)$ *se numește* **spațiu vectorial** *(***spațiu liniar***) peste* $\mathbb{K}$, *dacă mulțimea* V *este nevidă și operațiile*

$$+ : V \times V \to V, \quad (x, y) \to x + y \text{ (adunarea vectorilor)}$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V, \quad (\alpha, x) \to \alpha x \text{ (înmulțirea cu scalari)}$$

sadisfac următoarele proprietăți:

1. $(x + y) + z = z + (y + z)$, $\forall x, y, z \in V$
2. *Există un element* $0 \in V$ *astfel încât* $x + 0 = 0 + x = x$
3. $\forall x \in V$, *există un element* $(-x) \in V$ *astfel încât* $x + (-x) = (-x) + x = 0$
4. $x + y = y + x$, $\forall x, y \in V$
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in V$
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V$
7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in V$
8. $1 \cdot x = x$, $\forall x \in V$, *unde* 1 *este elementul neutru în* $\mathbb{K}$.

Spații vectoriale. Exemple

Observație. Se observă din primele patru axiome că $(V, +)$ trebuie să fie un grup comutativ.

Exemple de spații vectoriale peste $\mathbb{K}$.

a) $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, unde $+$ și $\cdot$ sunt operațiile uzuale de adunare și înmulțire în $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$.

Spații vectoriale. Exemple

Observație. Se observă din primele patru axiome că $(V, +)$ trebuie să fie un grup comutativ.

Exemple de spații vectoriale peste $\mathbb{K}$.

a) $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, unde $+$ și $\cdot$ sunt operațiile uzuale de adunare și înmulțire în $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$.

b) $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$, unde $+$ și $\cdot$ sunt operațiile uzuale de adunare și înmuțire cu scalari pe produsul Cartezian $\mathbb{K}^n$.

Spații vectoriale. Exemple

Observație. Se observă din primele patru axiome că $(V, +)$ trebuie să fie un grup comutativ.

Exemple de spații vectoriale peste $\mathbb{K}$.

a) $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, unde $+$ și $\cdot$ sunt operațiile uzuale de adunare și înmulțire în $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$.

b) $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$, unde $+$ și $\cdot$ sunt operațiile uzuale de adunare și înmuțire cu scalari pe produsul Cartezian $\mathbb{K}^n$.

c) $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$, unde $+$ reprezintă adunarea naturală a matricilor, iar $\cdot$ înmulțirea uzuală cu scalari.

Spații vectoriale. Exemple

Observație. Se observă din primele patru axiome că $(V, +)$ trebuie să fie un grup comutativ.

Exemple de spații vectoriale peste $\mathbb{K}$.

a) $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, unde $+$ și $\cdot$ sunt operațiile uzuale de adunare și înmulțire în $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$.

b) $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$, unde $+$ și $\cdot$ sunt operațiile uzuale de adunare și înmuțire cu scalari pe produsul Cartezian $\mathbb{K}^n$.

c) $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$, unde $+$ reprezintă adunarea naturală a matricilor, iar $\cdot$ înmulțirea uzuală cu scalari.

d) Fie D o mulțime arbitrară nevidă și

$$\mathcal{F} = \{f \mid f : D \to \mathbb{K}\}.$$

Atunci $(\mathcal{F}, +, \cdot)$, unde $+$ este adunarea uzuală a funcțiilor și $\cdot$ reprezintă înmulțirea cu scalari este un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$.

Spații vectoriale. Exemple

Observație. Se observă din primele patru axiome că $(V, +)$ trebuie să fie un grup comutativ.

Exemple de spații vectoriale peste $\mathbb{K}$.

a) $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, unde $+$ și $\cdot$ sunt operațiile uzuale de adunare și înmulțire în $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$.

b) $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$, unde $+$ și $\cdot$ sunt operațiile uzuale de adunare și înmuțire cu scalari pe produsul Cartezian $\mathbb{K}^n$.

c) $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$, unde $+$ reprezintă adunarea naturală a matricilor, iar $\cdot$ înmulțirea uzuală cu scalari.

d) Fie D o mulțime arbitrară nevidă și

$$\mathcal{F} = \{f \mid f : D \to \mathbb{K}\}.$$

Atunci $(\mathcal{F}, +, \cdot)$, unde $+$ este adunarea uzuală a funcțiilor și $\cdot$ reprezintă înmulțirea cu scalari este un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$.

d) Fie $\mathbb{K}[X]$ mulțimea tuturor polinoamelor cu coeficienți din $\mathbb{K}$ și considerăm submulțimea polinoamelor de grad cel mult n. Mai precis,

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid grad(P) \leq n\}.$$

Atunci $(\mathbb{K}_n[X], +, \cdot)$ este un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$.

Alte proprietăți. Subspații liniare

Proprietăți. Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$.

1) $\alpha \in \mathbb{K}$ și $x \in V$. Atunci $\alpha x = 0$ **dacă și numai dacă** $x = 0$ sau $\alpha = 0$.
2) Dacă $\alpha x = \beta x$ și $x \neq 0$, atunci $\alpha = \beta$.

Alte proprietăți. Subspații liniare

Proprietăți. Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$.

1) $\alpha \in \mathbb{K}$ și $x \in V$. Atunci $\alpha x = 0$ **dacă și numai dacă** $x = 0$ sau $\alpha = 0$.
2) Dacă $\alpha x = \beta x$ și $x \neq 0$, atunci $\alpha = \beta$.
3) Dacă $\alpha x = \alpha y$ și $\alpha \neq 0$, atunci $x = y$.
4) $\alpha(-x) = (-\alpha)x$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ și $\forall x \in V$.

Alte proprietăți. Subspații liniare

Proprietăți. Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$.

1) $\alpha \in \mathbb{K}$ și $x \in V$. Atunci $\alpha x = 0$ **dacă și numai dacă** $x = 0$ sau $\alpha = 0$.
2) Dacă $\alpha x = \beta x$ și $x \neq 0$, atunci $\alpha = \beta$.
3) Dacă $\alpha x = \alpha y$ și $\alpha \neq 0$, atunci $x = y$.
4) $\alpha(-x) = (-\alpha)x$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ și $\forall x \in V$.
5) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ și $\forall x, y \in V$.

Alte proprietăți. Subspații liniare

Proprietăți. Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$.

1) $\alpha \in \mathbb{K}$ și $x \in V$. Atunci $\alpha x = 0$ **dacă și numai dacă** $x = 0$ sau $\alpha = 0$.
2) Dacă $\alpha x = \beta x$ și $x \neq 0$, atunci $\alpha = \beta$.
3) Dacă $\alpha x = \alpha y$ și $\alpha \neq 0$, atunci $x = y$.
4) $\alpha(-x) = (-\alpha)x$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ și $\forall x \in V$.
5) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ și $\forall x, y \in V$.
6) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ și $\forall x \in V$.

Alte proprietăți. Subspații liniare

Proprietăți. Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$.

1) $\alpha \in \mathbb{K}$ și $x \in V$. Atunci $\alpha x = 0$ **dacă și numai dacă** $x = 0$ sau $\alpha = 0$.
2) Dacă $\alpha x = \beta x$ și $x \neq 0$, atunci $\alpha = \beta$.
3) Dacă $\alpha x = \alpha y$ și $\alpha \neq 0$, atunci $x = y$.
4) $\alpha(-x) = (-\alpha)x$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ și $\forall x \in V$.
5) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ și $\forall x, y \in V$.
6) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ și $\forall x \in V$.

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ *un spațiu vectorial peste* $\mathbb{K}$. *O submulțime nevidă* $W \subseteq V$ *se numește* **subspațiu liniar** *al lui* V *dacă*

$$\left.\begin{array}{l} x, y \in W \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in W.$$

Alte proprietăți. Subspații liniare

Proprietăți. Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$.

1) $\alpha \in \mathbb{K}$ și $x \in V$. Atunci $\alpha x = 0$ **dacă și numai dacă** $x = 0$ sau $\alpha = 0$.
2) Dacă $\alpha x = \beta x$ și $x \neq 0$, atunci $\alpha = \beta$.
3) Dacă $\alpha x = \alpha y$ și $\alpha \neq 0$, atunci $x = y$.
4) $\alpha(-x) = (-\alpha)x$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ și $\forall x \in V$.
5) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ și $\forall x, y \in V$.
6) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ și $\forall x \in V$.

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$. O submulțime nevidă $W \subseteq V$ se numește **subspațiu liniar** *al lui V dacă*

$$\left.\begin{array}{l} x, y \in W \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in W.$$

Observații:

i) Dacă W este un subspațiu liniar al lui $(V, +, \cdot)$, atunci $(W, +, \cdot)$ este un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$

Alte proprietăți. Subspații liniare

Proprietăți. Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$.

1) $\alpha \in \mathbb{K}$ și $x \in V$. Atunci $\alpha x = 0$ **dacă și numai dacă** $x = 0$ sau $\alpha = 0$.
2) Dacă $\alpha x = \beta x$ și $x \neq 0$, atunci $\alpha = \beta$.
3) Dacă $\alpha x = \alpha y$ și $\alpha \neq 0$, atunci $x = y$.
4) $\alpha(-x) = (-\alpha)x$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ și $\forall x \in V$.
5) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ și $\forall x, y \in V$.
6) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ și $\forall x \in V$.

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$. O submulțime nevidă $W \subseteq V$ se numește **subspațiu liniar** *al lui V dacă*

$$\left.\begin{array}{l} x, y \in W \\ \alpha, \beta \in \mathbb{K} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in W.$$

Observații:

i) Dacă W este un subspațiu liniar al lui $(V, +, \cdot)$, atunci $(W, +, \cdot)$ este un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$
ii) Dacă W este un subspațiu liniar al lui $(V, +, \cdot)$, atunci $0 \in W$.

Subspații liniare. Exemple.

1) Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$. Atunci $\{0\}$ și V sunt subspații liniare. Acestea se numesc **subspații improprii** sau **triviale**.

Subspații liniare. Exemple.

1) Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$. Atunci $\{0\}$ și V sunt subspații liniare. Acestea se numesc **subspații improprii** sau **triviale**.

2) Se consideră mulțimea

$$W = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

Atunci W este un subspațiu liniar al lui $V = \mathbb{R}^3$.

Subspații liniare. Exemple.

1) Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$. Atunci $\{0\}$ și V sunt subspații liniare. Acestea se numesc **subspații improprii** sau **triviale**.
2) Se consideră mulțimea
$$W = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$
Atunci W este un subspațiu liniar al lui $V = \mathbb{R}^3$.
3) $\mathbb{R} := \{x = x + 0j \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ este un subspațiu liniar al lui $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

Subspații liniare. Exemple.

1) Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$. Atunci $\{0\}$ și V sunt subspații liniare. Acestea se numesc **subspații improprii** sau **triviale**.

2) Se consideră mulțimea

$$W = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

Atunci W este un subspațiu liniar al lui $V = \mathbb{R}^3$.

3) $\mathbb{R} := \{x = x + 0j \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ este un subspațiu liniar al lui $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

4) Fie $i \in \{1, 2, ..., n\}$ fixat și

$$W = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_i = 0 \right\}.$$

Atunci W este un subspațiu liniar al lui $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Subspații liniare. Exemple.

1) Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$. Atunci $\{0\}$ și V sunt subspații liniare. Acestea se numesc **subspații improprii** sau **triviale**.

2) Se consideră mulțimea

$$W = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

Atunci W este un subspațiu liniar al lui $V = \mathbb{R}^3$.

3) $\mathbb{R} := \{x = x + 0j \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ este un subspațiu liniar al lui $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

4) Fie $i \in \{1, 2, ..., n\}$ fixat și

$$W = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_i = 0 \right\}.$$

Atunci W este un subspațiu liniar al lui $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

5) Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ și

$$W = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}.$$

Atunci W este un subspațiu liniar al lui $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Combinații liniare. Subspații generate

Definiție

i) *Fie* $(V, +, \cdot)$ *un spațiu vectorial peste* $\mathbb{K}$ *și* M *o submulțime nevidă a lui* V. *Un vector* $v \in V$ *care poate fi scris sub forma*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n,$$

cu $v_i \in M$ *și* $\alpha_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ *se numește* **combinație liniară** *de elemente din* M.

ii) *Fie* $(V, +, \cdot)$ *un spațiu vectorial peste* $\mathbb{K}$ *și* M *o submulțime a lui* V. *Definim*

$$< \mathbf{M} > = \left\{ v \in V \mid v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n, \ \alpha_i \in \mathbb{K}, v_i \in M, i = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Obs. Dacă $M \neq \emptyset$, atunci $< M >$ este un subspațiu liniar (**subspațiul generat** de M).

Combinații liniare. Subspații generate

Definiție

i) *Fie* $(V, +, \cdot)$ *un spațiu vectorial peste* $\mathbb{K}$ *și* M *o submulțime nevidă a lui* V *. Un vector* $v \in V$ *care poate fi scris sub forma*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n,$$

cu $v_i \in M$ *și* $\alpha_i \in \mathbb{K}$*,* $i = \overline{1, n}$*,* $n \in \mathbb{N}^*$ *se numește* **combinație liniară** *de elemente din* M*.*

ii) *Fie* $(V, +, \cdot)$ *un spațiu vectorial peste* $\mathbb{K}$ *și* M *o submulțime a lui* V*. Definim*

$$< \mathbf{M} > = \left\{ v \in V \mid v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n,\ \alpha_i \in \mathbb{K}, v_i \in M, i = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Obs. Dacă $M \neq \emptyset$, atunci $< M >$ este un subspațiu liniar (**subspațiul generat** de M).

Definiție

i) *Spunem că* $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *este o mulțime de genratori a spațiului vectorial* V *dacă* $V =< v_1, v_2, ..., v_n >$ *.*

ii) *Spunem că spațiul vectorial* V *este finit generat dacă există* $v_1, ..., v_n$ *astfel încât* $V =< v_1, ..., v_n >$*.*

Dependență și independență liniară

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ *un spațiu vectorial și* $v_i \in V,\ i = \overline{1, m}$. *Spunem că mulțimea* $\{v_1, v_2, ...v_m\}$ *este:*

- **liniar dependentă** *dacă există* $\alpha_1, ..., \alpha_m$ *nu toți egali cu* 0 *astfel încât*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m = 0.$$

Dependență și independență liniară

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ *un spațiu vectorial și* $v_i \in V,\ i = \overline{1, m}$. *Spunem că mulțimea* $\{v_1, v_2, ...v_m\}$ *este:*

- **liniar dependentă** *dacă există* $\alpha_1, ..., \alpha_m$ *nu toți egali cu* 0 *astfel încât*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m = 0.$$

- **liniar independentă** *dacă*

$$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_m x_m = 0$$

implică

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0.$$

Exercițiu. Determinați dacă următoarele mulțimi de vectori sunt liniar independente (**li**) sau liniar dependente (**ld)**:

a) $\{(1, 2)^T, (-1, 3)^T\} \subset \mathbb{R}^2$;

Dependență și independență liniară

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ *un spațiu vectorial și* $v_i \in V, \ i = \overline{1, m}$. *Spunem că mulțimea* $\{v_1, v_2, ...v_m\}$ *este:*

- **liniar dependentă** *dacă există* $\alpha_1, ..., \alpha_m$ *nu toți egali cu* 0 *astfel încât*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m = 0.$$

- **liniar independentă** *dacă*

$$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_m x_m = 0$$

implică

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0.$$

Exercițiu. Determinați dacă următoarele mulțimi de vectori sunt liniar independente (**li**) sau liniar dependente (**ld)**:

a) $\{(1,2)^T, (-1,3)^T\} \subset \mathbb{R}^2$;

b) $\{(1,1,1)^T, (-5,5,5)^T, (0,0,0)^T\} \subset \mathbb{R}^3$;

Dependență și independență liniară

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ *un spațiu vectorial și* $v_i \in V$, $i = \overline{1, m}$. *Spunem că mulțimea* $\{v_1, v_2, ...v_m\}$ *este:*

- **liniar dependentă** *dacă există* $\alpha_1, ..., \alpha_m$ *nu toți egali cu* 0 *astfel încât*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_m x_m = 0.$$

- **liniar independentă** *dacă*

$$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_m x_m = 0$$

implică

$$\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0.$$

Exercițiu. Determinați dacă următoarele mulțimi de vectori sunt liniar independente (**li**) sau liniar dependente (**ld)**:

a) $\{(1, 2)^T, (-1, 3)^T\} \subset \mathbb{R}^2$;

b) $\{(1, 1, 1)^T, (-5, 5, 5)^T, (0, 0, 0)^T\} \subset \mathbb{R}^3$;

c) $\{(1, 1, 1)^T, (1, 2, 3)^T, (3, 4, 5)^T\} \subset \mathbb{R}^3$;

Bază. Dimensiune.

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ *un spațiu vectorial și* $\mathcal{B} \subset V$. *Spunem că* $\mathcal{B}$ *este o* **bază** *pentru* V *dacă următoarele condiții sunt satisfăcute:*

i) *Mulțimea* $\mathcal{B}$ *este liniar independentă;*

ii) $V = < \mathcal{B} >$.

Observație. O mulțime $\mathcal{B}$ este o bază pentru V dacă și numai dacă orice vector $v \in V$ poate fi reprezentat în mod unic ca o combinație liniară de elemente din $\mathcal{B}$.

Bază. Dimensiune.

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial și $\mathcal{B} \subset V$. Spunem că $\mathcal{B}$ este o ***bază*** *pentru V dacă următoarele condiții sunt satisfăcute:*

i) *Mulțimea $\mathcal{B}$ este liniar independentă;*

ii) $V = < \mathcal{B} >$.

Observație. O mulțime $\mathcal{B}$ este o bază pentru V dacă și numai dacă orice vector $v \in V$ poate fi reprezentat în mod unic ca o combinație liniară de elemente din $\mathcal{B}$.
Exercțiu. Arătați că $\mathcal{B} = \{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ este o bază pentru $\mathbb{R}^2$. Ce puteți spune despre $\mathcal{B}_1 = \{(1,1)^T, (0,1)^T\}$?

Bază. Dimensiune.

Definiție

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial și $\mathcal{B} \subset V$. Spunem că $\mathcal{B}$ este o **bază** *pentru V dacă următoarele condiții sunt satisfăcute:*

i) *Mulțimea $\mathcal{B}$ este liniar independentă;*

ii) *$V = <\mathcal{B}>$.*

Observație. O mulțime $\mathcal{B}$ este o bază pentru V dacă și numai dacă orice vector $v \in V$ poate fi reprezentat în mod unic ca o combinație liniară de elemente din $\mathcal{B}$.
Exercițiu. Arătați că $\mathcal{B} = \{(1,0)^T, (0,1)^T\}$ este o bază pentru $\mathbb{R}^2$. Ce puteți spune despre $\mathcal{B}_1 = \{(1,1)^T, (0,1)^T\}$?

Definiție

Spunem că dimensiunea spațiului vectorial V este m, dacă admite o bază cu m elemente. Dacă V nu admite baze cu un număr finit de elemente, spune ca spațiul vectorial V este infinit dimensional.