Algebra
Curs 4

Prof. Bogdan Gavrea

CM 2016

Baza. Dimensiune. Produs scalar. Spații Euclidiene

Baza si dimensiune (continuare).

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial și $\mathcal{B} \subset V$. Spunem că mulțimea $\mathcal{B}$ este o **bază** pentru V dacă următoarele condiții sunt satisfăcute:

i) Mulțimea $\mathcal{B}$ este linear independentă;

ii) $V = < \mathcal{B} >$.

Baza si dimensiune (continuare).

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial și $\mathcal{B} \subset V$. Spunem că mulțimea $\mathcal{B}$ este o **bază** pentru V dacă următoarele condiții sunt satisfăcute:

i) Mulțimea $\mathcal{B}$ este linear independentă;

ii) $V =< \mathcal{B} >$.

Spuem că dimensiunea spațiului vectorial V este m dacă V admite o bază cu m elemente. Dacă V nu admite o bază cu un nr. finit de elemente, spunem că V este infinit dimensional.

Observații. Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$. Următoarele afirmații sunt adevărate:

a) Dacă $dim(V) = n$ și $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este liniar independentă, atunci $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ este o bază în V.

Baza si dimensiune (continuare).

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial și $\mathcal{B} \subset V$. Spunem că mulțimea $\mathcal{B}$ este o **bază** pentru V dacă următoarele condiții sunt satisfăcute:

i) Mulțimea $\mathcal{B}$ este linear independentă;

ii) $V =< \mathcal{B} >$.

Spuem că dimensiunea spațiului vectorial V este m dacă V admite o bază cu m elemente. Dacă V nu admite o bază cu un nr. finit de elemente, spunem că V este infinit dimensional.

Observații. Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$. Următoarele afirmații sunt adevărate:

a) Dacă $dim(V) = n$ și $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este liniar independentă, atunci $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ este o bază în V.

b) Dacă $dim(V) = n$ și $m > n$, atunci orice mulțime cu m elemente, $\{v_1, ..., v_m\}$ este liniar dependentă.

Baza si dimensiune (continuare).

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial și $\mathcal{B} \subset V$. Spunem că mulțimea $\mathcal{B}$ este o **bază** pentru V dacă următoarele condiții sunt satisfăcute:

i) Mulțimea $\mathcal{B}$ este linear independentă;

ii) $V =< \mathcal{B} >$.

Spuem că dimensiunea spațiului vectorial V este m dacă V admite o bază cu m elemente. Dacă V nu admite o bază cu un nr. finit de elemente, spunem că V este infinit dimensional.

Observații. Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$. Următoarele afirmații sunt adevărate:

a) Dacă $dim(V) = n$ și $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ este liniar independentă, atunci $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ este o bază în V.

b) Dacă $dim(V) = n$ și $m > n$, atunci orice mulțime cu m elemente, $\{v_1, ..., v_m\}$ este liniar dependentă.

c) Dacă $dim(V) = n$, $p < n$ și $\{v_1, ..., v_p\}$ sunt vectori liniar independenți, atunci există $u_1, .., u_{n-p} \in V$ a.î $\{v_1, ..., v_p, u_1, ..., u_{n-p}\}$ este o bază pentru V.

Bază și dimensiune (continuare)...

Exemple. Calculați dimensiunile următoarelor spații vectoriale. Pentru fiecare caz în parte specificați câte o bază.

i) $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$;

ii) $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$;

iii) $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}$;

iv) $dim_{\mathbb{R}}\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

Observații. Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste K cu $dim(V)$ finită. Fie $W_1, W_2 \subseteq V$ subspații liniare. Atunci,

- Dimensiunea oricărui subspațiu linar este mai mică sau egală cu dimensiunea lui V $(dim(W_1) \leq dim(V))$.

Bază și dimensiune (continuare)...

Exemple. Calculați dimensiunile următoarelor spații vectoriale. Pentru fiecare caz în parte specificați câte o bază.

i) $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$;

ii) $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$;

iii) $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}$;

iv) $dim_{\mathbb{R}}\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

Observații. Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste K cu $dim(V)$ finită. Fie $W_1, W_2 \subseteq V$ subspații liniare. Atunci,

- Dimensiunea oricărui subspațiu linar este mai mică sau egală cu dimensiunea lui V ($dim(W_1) \leq dim(V)$). Dacă $dim(W_1) = dim(V)$, atunci $W_1 = V$.

Bază și dimensiune (continuare)...

Exemple. Calculați dimensiunile următoarelor spații vectoriale. Pentru fiecare caz în parte specificați câte o bază.

i) $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$;

ii) $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$;

iii) $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}$;

iv) $dim_{\mathbb{R}}\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

Observații. Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste K cu $dim(V)$ finită. Fie $W_1, W_2 \subseteq V$ subspații liniare. Atunci,

- Dimensiunea oricărui subspațiu linar este mai mică sau egală cu dimensiunea lui V ($dim(W_1) \leq dim(V)$). Dacă $dim(W_1) = dim(V)$, atunci $W_1 = V$.
- Definim

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= \{v \in V \mid v \in W_1 \text{ and } v \in W_2\} \\ W_1 + W_2 &= \{v \in V \mid \text{ există } w_1 \in W_1 \text{ și } w_2 \in W_2 \text{ a.î. } v = w_1 + w_2\} \end{aligned}$$

Bază și dimensiune (continuare)...

Exemple. Calculați dimensiunile următoarelor spații vectoriale. Pentru fiecare caz în parte specificați câte o bază.

i) $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$;

ii) $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$;

iii) $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}$;

iv) $dim_{\mathbb{R}}\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

Observații. Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste K cu $dim(V)$ finită. Fie $W_1, W_2 \subseteq V$ subspații liniare. Atunci,

- Dimensiunea oricărui subspațiu linar este mai mică sau egală cu dimensiunea lui V ($dim(W_1) \leq dim(V)$). Dacă $dim(W_1) = dim(V)$, atunci $W_1 = V$.
- Definim

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= \{v \in V \mid v \in W_1 \text{ and } v \in W_2\} \\ W_1 + W_2 &= \{v \in V \mid \text{ există } w_1 \in W_1 \text{ și } w_2 \in W_2 \text{ a.î. } v = w_1 + w_2\} \end{aligned}$$

Atunci $W_1 \cap W_2$ and $W_1 + W_2$ sunt subspații liniare.
Exercițiu. Fie $W_1 = \{(0, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$ și $W_2 = \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$. Calculați $W_1 + W_2$.

Bază și dimensiune (continuare)...

Exemple. Calculați dimensiunile următoarelor spații vectoriale. Pentru fiecare caz în parte specificați câte o bază.

i) $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^4$;

ii) $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$;

iii) $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}$;

iv) $dim_{\mathbb{R}}\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

Observații. Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste K cu $dim(V)$ finită. Fie $W_1, W_2 \subseteq V$ subspații liniare. Atunci,

- Dimensiunea oricărui subspațiu linar este mai mică sau egală cu dimensiunea lui V ($dim(W_1) \leq dim(V)$). Dacă $dim(W_1) = dim(V)$, atunci $W_1 = V$.
- Definim

$$\begin{aligned} W_1 \cap W_2 &= \{v \in V \mid v \in W_1 \text{ and } v \in W_2\} \\ W_1 + W_2 &= \{v \in V \mid \text{ există } w_1 \in W_1 \text{ și } w_2 \in W_2 \text{ a.î. } v = w_1 + w_2\} \end{aligned}$$

  Atunci $W_1 \cap W_2$ and $W_1 + W_2$ sunt subspații liniare.
  Exercițiu. Fie $W_1 = \{(0, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$ și $W_2 = \{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$. Calculați $W_1 + W_2$.
- Avem

$$dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2).$$

Coordonate. Schimbare de coordonate

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ cu $dim(V) = n$, Fie $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ și $\mathcal{B}' = \{e_1', ..., e_n'\}$ două baze ale spațiului vectorial V.

i) Fie $v \in V$ arbitrar ales. Atunci v poate fi scris sub forma:

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + ... + x_n e_n, \\ v &= x_1' e_1' + ... + x_n' e_n', \end{aligned}$$

unde $x = (x_1, ..., x_n)^T$ și $x' = (x_1', ..., x_n')^T$ sunt unic determinați. Spunem că $x_1, ..., x_n$ sunt **coordonatele lui v în raport cu baza $\mathcal{B}$**, iar $x_1', ..., x_n'$ sunt **coordonatele lui v în raport cu baza $\mathcal{B}'$.**

Coordonate. Schimbare de coordonate

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ cu $dim(V) = n$, Fie $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ și $\mathcal{B}' = \{e_1', ..., e_n'\}$ două baze ale spațiului vectorial V.

i) Fie $v \in V$ arbitrar ales. Atunci v poate fi scris sub forma:

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + ... + x_n e_n, \\ v &= x_1' e_1' + ... + x_n' e_n', \end{aligned}$$

unde $x = (x_1, ..., x_n)^T$ și $x' = (x_1', ..., x_n')^T$ sunt unic determinați. Spunem că $x_1, ..., x_n$ sunt **coordonatele lui v în raport cu baza $\mathcal{B}$**, iar $x_1', ..., x_n'$ sunt **coordonatele lui v în raport cu baza $\mathcal{B}'$.**

ii) Fiecare e_k' poate fi scris în mod unic folosind elemente din $\mathcal{B}$ sub forma

$$e_k' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} e_i.$$

Coordonate. Schimbare de coordonate

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ cu $dim(V) = n$, Fie $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ și $\mathcal{B}' = \{e_1', ..., e_n'\}$ două baze ale spațiului vectorial V.

i) Fie $v \in V$ arbitrar ales. Atunci v poate fi scris sub forma:

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + ... + x_n e_n, \\ v &= x_1' e_1' + ... + x_n' e_n', \end{aligned}$$

unde $x = (x_1, ..., x_n)^T$ și $x' = (x_1', ..., x_n')^T$ sunt unic determinați. Spunem că $x_1, ..., x_n$ sunt **coordonatele lui v în raport cu baza $\mathcal{B}$**, iar $x_1', ..., x_n'$ sunt **coordonatele lui v în raport cu baza $\mathcal{B}'$.**

ii) Fiecare e_k' poate fi scris în mod unic folosind elemente din $\mathcal{B}$ sub forma

$$e_k' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} e_i.$$

Fie T matricea dată prin $T(i,j) = \alpha_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$. Matricea T se numește matrice de **matrice de tranziție (trecere)**.

Coordonate. Schimbare de coordonate

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial peste $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ cu $dim(V) = n$, Fie $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ și $\mathcal{B}' = \{e_1', ..., e_n'\}$ două baze ale spațiului vectorial V.

i) Fie $v \in V$ arbitrar ales. Atunci v poate fi scris sub forma:

$$\begin{aligned} v &= x_1 e_1 + ... + x_n e_n, \\ v &= x_1' e_1' + ... + x_n' e_n', \end{aligned}$$

unde $x = (x_1, ..., x_n)^T$ și $x' = (x_1', ..., x_n')^T$ sunt unic determinați. Spunem că $x_1, ..., x_n$ sunt **coordonatele lui v în raport cu baza $\mathcal{B}$**, iar $x_1', ..., x_n'$ sunt **coordonatele lui v în raport cu baza $\mathcal{B}'$.**

ii) Fiecare e_k' poate fi scris în mod unic folosind elemente din $\mathcal{B}$ sub forma

$$e_k' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} e_i.$$

Fie T matricea dată prin $T(i,j) = \alpha_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$. Matricea T se numește matrice de **matrice de tranziție (trecere)**.

iii) Fie $x = (x_1, ..., x_n)^T$ și $x' = (x_1', ..., x_n')^T$ coordonatele în baza $\mathcal{B}$ și $\mathcal{B}'$. Atunci

$$x = Tx'.$$

Produs scalar.

Definiție

Fie $(V, +\cdot)$ *un spațiu vectorial peste* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *sau* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*). Un produs scalar pe* V *este o aplicație* $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$*, care satisface următoarele proprietăți:*

1) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
2) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
3) $\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle$,
4) $\langle x, x \rangle \geq 0$ *și* $\langle x, x \rangle = 0$ **dacă și numai dacă** $x = 0$, $\forall x, y, z \in V$ *and* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Produs scalar.

Definiție

Fie $(V, +\cdot)$ *un spațiu vectorial peste* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *sau* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*). Un produs scalar pe* V *este o aplicație* $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$*, care satisface următoarele proprietăți:*

1) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
2) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
3) $\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle$,
4) $\langle x, x \rangle \geq 0$ *și* $\langle x, x \rangle = 0$ **dacă și numai dacă** $x = 0$, $\forall x, y, z \in V$ *and* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercițiu. Calculați $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle$.

Produs scalar.

Definiție

Fie $(V, +\cdot)$ *un spațiu vectorial peste* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *sau* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*). Un produs scalar pe* V *este o aplicație* $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$*, care satisface următoarele proprietăți:*

1) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
2) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
3) $\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle$,
4) $\langle x, x \rangle \geq 0$ *și* $\langle x, x \rangle = 0$ **dacă și numai dacă** $x = 0$, $\forall x, y, z \in V$ *and* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercițiu. Calculați $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle$.

Definiție

Un spațiu vectorial pe care este definit un produs scalar se numește spațiu vectorial cu produs scalar.

Teoremă (Inegalitatea lui Schwarz)

Fie V *be un spațiu vectorial cu produs scalar. Atunci pentru orice* $x, y \in V$*, avem*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$