Algebră
Curs 5

Prof. Bogdan Gavrea

CM 2016

Spatii vectoriale cu produs scalar. Spații Euclidiene.
Normă și distanță

Produs scalar.

Definiție

Fie $(V, +\cdot)$ *un spațiu vectorial peste* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *sau* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*). Un produs scalar pe* V *este o aplicație* $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$*, care satisface următoarele proprietăți:*

1) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
2) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
3) $\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle$,
4) $\langle x, x \rangle \geq 0$ *și* $\langle x, x \rangle = 0$ **dacă și numai dacă** $x = 0$, $\forall x, y, z \in V$ *and* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Produs scalar.

Definiție

Fie $(V, +\cdot)$ *un spațiu vectorial peste* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *sau* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*). Un produs scalar pe* V *este o aplicație* $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$*, care satisface următoarele proprietăți:*

1) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
2) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
3) $\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle$,
4) $\langle x, x \rangle \geq 0$ *și* $\langle x, x \rangle = 0$ **dacă și numai dacă** $x = 0$, $\forall x, y, z \in V$ *and* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercițiu. Calculați $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle$.

Produs scalar.

Definiție

Fie $(V, +\cdot)$ *un spațiu vectorial peste* $\mathbb{K}$ *(*$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *sau* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*). Un produs scalar pe* V *este o aplicație* $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$*, care satisface următoarele proprietăți:*

1) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
2) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
3) $\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle$,
4) $\langle x, x \rangle \geq 0$ *și* $\langle x, x \rangle = 0$ **dacă și numai dacă** $x = 0$, $\forall x, y, z \in V$ *and* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercițiu. Calculați $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle$.

Definiție

Un spațiu vectorial pe care este definit un produs scalar se numește spațiu vectorial cu produs scalar.

Teoremă (Inegalitatea lui Schwarz)

Fie V *be un spațiu vectorial cu produs scalar. Atunci pentru orice* $x, y \in V$*, avem*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Spații vectoriale cu produs scalar.Exemple

Exemple:

- Fie spațiu vectorial real ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), $(V, +, \cdot) = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, unde $+$ și $\cdot$ sunt operațiile uzuale de adunare a vectorilor și de înmulțire cu scalari. Fie $x, y \in \mathbb{R}^n$, astfel încât $x = (x_1, ..., x_n)^T$ și $y = (y_1, ..., y_n)^T$. Produsul scalar uzual este definit prin

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Spații vectoriale cu produs scalar.Exemple

Exemple:

- Fie spațiu vectorial real ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), $(V, +, \cdot) = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, unde $+$ și $\cdot$ sunt operațiile uzuale de adunare a vectorilor și de înmulțire cu scalari. Fie $x, y \in \mathbb{R}^n$, astfel încât $x = (x_1, ..., x_n)^T$ și $y = (y_1, ..., y_n)^T$. Produsul scalar uzual este definit prin

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

- În mod similar, dacă $(V, +, \cdot) = (\mathbb{C}^n, +, \cdot)$, atunci produsul scalar uzual este dat prin:

$$\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + ... + x_n \overline{y_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} .$$

Spații vectoriale cu produs scalar.Exemple

Exemple:

- Fie spațiu vectorial real ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), $(V, +, \cdot) = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, unde $+$ și $\cdot$ sunt operațiile uzuale de adunare a vectorilor și de înmulțire cu scalari. Fie $x, y \in \mathbb{R}^n$, astfel încât $x = (x_1, ..., x_n)^T$ și $y = (y_1, ..., y_n)^T$. Produsul scalar uzual este definit prin
$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$
- În mod similar, dacă $(V, +, \cdot) = (\mathbb{C}^n, +, \cdot)$, atunci produsul scalar uzual este dat prin:
$$\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + ... + x_n \overline{y_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$
- Fie $C[-1, 1]$ mulțimea funcțiilor continue pe intervalul $[-1, 1]$, adică,
$$C[-1, 1] = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ continuă}\}.$$
Considerăm spațiul vectorial $(V, +, \cdot) = (C[-1, 1], +, \cdot)$, unde $+$ reprezintă adunarea uzuală a funțiilor, iar $\cdot$ reprezintă înmulțirea cu scalari. Pentru $f, g \in C[-1, 1]$, produsul scalar este definit prin
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) dx.$$

Spații euclidiene. Normă și distanță. Bază ortonormală

Definiție (Spațiu Euclidian)

Orice spațiu vectorial real ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) *cu produs scalar de dimensiune finită se numește* **spațiu Euclidian**.

Spații euclidiene. Normă și distanță. Bază ortonormală

Definiție (Spațiu Euclidian)

Orice spațiu vectorial real ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) cu produs scalar de dimensiune finită se numește **spațiu Euclidian**.

Definiție (Vector ortogonali)

Fie $(V, +, \cdot)$ *un spațiu vectorial cu produs scalar și* $x, y \in V$. *Spunem că* x *și* y *sunt ortogonali dacă* $\langle x, y \rangle = 0$.

Spații euclidiene. Normă și distanță. Bază ortonormală

Definiție (Spațiu Euclidian)

Orice spațiu vectorial real ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) cu produs scalar de dimensiune finită se numește **spațiu Euclidian**.

Definiție (Vector ortogonali)

Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu vectorial cu produs scalar și $x, y \in V$. Spunem că x și y sunt ortogonali dacă $\langle x, y \rangle = 0$.

Definiție (Normă și spațiu vectorial normat)

Fie $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ și V un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$. O normă este o aplicație $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}$, ce satisface următoarele proprietăți:

i) $||x|| \geq 0, \forall x \in V$ *and* $||x|| = 0$ **iff** $x = 0$;

ii) $||\alpha x|| = |\alpha| \, ||x|| \; \forall x \in V$ *and* $\forall \alpha \in \mathbb{K}$;

iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||, \forall x, y \in V$.

Spațiu vectorial V pe care este definită o normă se numește **spațiu vectorial normat**.

Normă și distanță.

- Norma indusă de un produs scalar; $||x||^2 = \langle x, x\rangle$.

Normă și distanță.

- Norma indusă de un produs scalar; $||x||^2 = \langle x, x \rangle$.
- Norma Euclidiană
$$||x||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + ...|x_n|^2};$$

Normă și distanță.

- Norma indusă de un produs scalar; $||x||^2 = \langle x, x \rangle$.
- Norma Euclidiană
$$||x||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + ...|x_n|^2};$$
- Norma "infinit":
$$||x||_\infty = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\};$$

Normă și distanță.

- Norma indusă de un produs scalar; $||x||^2 = \langle x, x \rangle$.
- Norma Euclidiană
$$||x||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots |x_n|^2};$$
- Norma "infinit":
$$||x||_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\};$$
- Norma l_1
$$||x||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Definiție (Distanța indusă de o normă)

Fie $(V, ||\cdot||)$ un spațiu vectorial normat. Funcția $d : V \times V \to \mathbb{R}$, dată prin
$$d(x, y) = |||x - y||$$
se numește **distanța** *între x și y (indusă de norma $||\cdot||$).*

Normă și distanță.

Observație. Fie $V, \langle \cdot, \cdot \rangle$ un spațiu vectorial cu produs scalar și $||\cdot||$ norma indusă de produsul scalar,

Normă și distanță.

Observație. Fie $V, \langle \cdot, \cdot \rangle$ un spațiu vectorial cu produs scalar și $||\cdot||$ norma indusă de produsul scalar, $||x||^2 = \langle x, x \rangle$,

Normă și distanță.

Observație. Fie $V, \langle \cdot, \cdot \rangle$ un spațiu vectorial cu produs scalar și $||\cdot||$ norma indusă de produsul scalar, $||x||^2 = \langle x, x \rangle$, Din inegalitatea Cauchy-Schwarz rezultă că pentru orice $x, y \in V \setminus \{0\}$, avem

$$|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \, ||y|| \text{ or } -1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{||x|| \, ||y||} \leq 1.$$

Acest lucru ne conduce la existența unui unghi $\alpha \in [0, \pi]$, unic determinat astfel încât

$$\cos \alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{||x|| \, ||y||}.$$

Normă și distanță.

Observație. Fie $V, \langle\cdot,\cdot\rangle$ un spațiu vectorial cu produs scalar și $||\cdot||$ norma indusă de produsul scalar, $||x||^2 = \langle x, x\rangle$, Din inegalitatea Cauchy-Schwarz rezultă că pentru orice $x, y \in V \setminus \{0\}$, avem

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||\,||y|| \text{ or } -1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{||x||\,||y||} \leq 1.$$

Acest lucru ne conduce la existența unui unghi $\alpha \in [0, \pi]$, unic determinat astfel încât

$$\cos\alpha = \frac{\langle x, y\rangle}{||x||\,||y||}.$$

Unghiul α definit mai sus reprezintă unghiul dintre vectorii x și y.

Fie $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ o submulțime a spațiului vectorial cu produs scalar $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Spunem că $\mathcal{B}$ este o **mulțime ortogonală** dacă

$$\langle v_i, v_k\rangle = 0, \forall i, k \text{ with } i \neq k.$$

Dacă în plus $||v_i|| = 1, \forall i$, spunem că $\mathcal{B}$ este **o mulțime ortonormată.**

Normă și distanță.

Observație. Fie $V, \langle\cdot,\cdot\rangle$ un spațiu vectorial cu produs scalar și $||\cdot||$ norma indusă de produsul scalar, $||x||^2 = \langle x, x\rangle$, Din inegalitatea Cauchy-Schwarz rezultă că pentru orice $x, y \in V \setminus \{0\}$, avem

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x||\,||y|| \text{ or } -1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{||x||\,||y||} \leq 1.$$

Acest lucru ne conduce la existența unui unghi $\alpha \in [0, \pi]$, unic determinat astfel încât

$$\cos\alpha = \frac{\langle x, y\rangle}{||x||\,||y||}.$$

Unghiul α definit mai sus reprezintă unghiul dintre vectorii x și y.

Fie $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ o submulțime a spațiului vectorial cu produs scalar $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Spunem că $\mathcal{B}$ este o **mulțime ortogonală** dacă

$$\langle v_i, v_k\rangle = 0, \forall i, k \text{ with } i \neq k.$$

Dacă în plus $||v_i|| = 1, \forall i$, spunem că $\mathcal{B}$ este **o mulțime ortonormată.** Mulțimea ortonormată $\mathcal{B}$ se numește **bază ortonormată** a lui V dacă $V = \langle\mathcal{B}\rangle$.