

# Metode Numerice

Prof. Bogdan Gavrea

CTI 2019-2020

Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare (cont).  
Rezolvarea numerică a ecuațiilor diferențiale

# Rezolvarea ecuațiilor neliniare folosind metode de punct fix

- Rescriem ecuația neliniară  $f(x) = 0$  sub forma  $x = g(x)$ . Un punct  $\alpha$  care satisface  $\alpha = g(\alpha)$  se numește **punct fix** al funcției  $g$ .

# Rezolvarea ecuațiilor neliniare folosind metode de punct fix

- Rescriem ecuația neliniară  $f(x) = 0$  sub forma  $x = g(x)$ . Un punct  $\alpha$  care satisface  $\alpha = g(\alpha)$  se numește **punct fix** al funcției  $g$ .
- Presupunem că  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) \in [a, b]$ ,  $\forall x \in [a, b]$ . Presupunem deasemenea că  $g'(x)$  există pentru orice  $x \in (a, b)$  și că există  $0 < k < 1$ , astfel încât:

$$|g'(x)| \leq k, \forall x \in (a, b).$$

Atunci, pentru orice  $x_0 \in [a, b]$ , șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definit prin

$$x_{n+1} = g(x_n), n \in \mathbb{N}$$

converge la singurul punct fix  $x^*$  din intervalul  $[a, b]$  ( $x^* = g(x^*)$ ). Șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se numește șirul iterațiilor succesive.

# Rezolvarea ecuațiilor neliniare folosind metode de punct fix

- Rescriem ecuația neliniară  $f(x) = 0$  sub forma  $x = g(x)$ . Un punct  $\alpha$  care satisface  $\alpha = g(\alpha)$  se numește **punct fix** al funcției  $g$ .
- Presupunem că  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b]$ . Presupunem deasemenea că  $g'(x)$  există pentru orice  $x \in (a, b)$  și că există  $0 < k < 1$ , astfel încât:

$$|g'(x)| \leq k, \forall x \in (a, b).$$

Atunci, pentru orice  $x_0 \in [a, b]$ , șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definit prin

$$x_{n+1} = g(x_n), n \in \mathbb{N}$$

converge la singurul punct fix  $x^*$  din intervalul  $[a, b]$  ( $x^* = g(x^*)$ ). Șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se numește șirul iterațiilor succesive.

- Se consideră ecuația  $x = g(x)$  cu soluția  $x^* \in (a, b)$  Presupunem ca  $g$  este derivabilă, cu derivata continuă în intervalul  $(a, b)$ . Dacă  $|g'(x^*)| < 1$ , atunci există  $\delta > 0$  a.î. pentru  $x_0$ , cu proprietatea  $|x_0 - x^*| < \delta$  șirul aproximațiilor succesive converge la  $x^*$  ( $x_0$  **suficient de aproape**).

# Rezolvarea ecuațiilor neliniare folosind metode de punct fix

- Rescriem ecuația neliniară  $f(x) = 0$  sub forma  $x = g(x)$ . Un punct  $\alpha$  care satisface  $\alpha = g(\alpha)$  se numește **punct fix** al funcției  $g$ .
- Presupunem că  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b]$ . Presupunem deasemenea că  $g'(x)$  există pentru orice  $x \in (a, b)$  și că există  $0 < k < 1$ , astfel încât:

$$|g'(x)| \leq k, \forall x \in (a, b).$$

Atunci, pentru orice  $x_0 \in [a, b]$ , șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definit prin

$$x_{n+1} = g(x_n), n \in \mathbb{N}$$

converge la singurul punct fix  $x^*$  din intervalul  $[a, b]$  ( $x^* = g(x^*)$ ). Șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se numește șirul iterațiilor succesive.

- Se consideră ecuația  $x = g(x)$  cu soluția  $x^* \in (a, b)$  Presupunem ca  $g$  este derivabilă, cu derivata continuă în intervalul  $(a, b)$ . Dacă  $|g'(x^*)| < 1$ , atunci există  $\delta > 0$  a.î. pentru  $x_0$ , cu proprietatea  $|x_0 - x^*| < \delta$  șirul aproximațiilor succesive converge la  $x^*$  ( $x_0$  **suficient de aproape**).
- **Exercițiu.** Rezolvați ecuația  $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$  folosind o metoda iterativă de punct fix pe intervalul  $[1, 2]$ .

# Rezolvarea ecuațiilor neliniare folosind metode de punct fix

- Rescriem ecuația neliniară  $f(x) = 0$  sub forma  $x = g(x)$ . Un punct  $\alpha$  care satisface  $\alpha = g(\alpha)$  se numește **punct fix** al funcției  $g$ .
- Presupunem că  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b]$ . Presupunem deasemenea că  $g'(x)$  există pentru orice  $x \in (a, b)$  și că există  $0 < k < 1$ , astfel încât:

$$|g'(x)| \leq k, \forall x \in (a, b).$$

Atunci, pentru orice  $x_0 \in [a, b]$ , șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definit prin

$$x_{n+1} = g(x_n), n \in \mathbb{N}$$

converge la singurul punct fix  $x^*$  din intervalul  $[a, b]$  ( $x^* = g(x^*)$ ). Șirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se numește șirul iterațiilor succesive.

- Se consideră ecuația  $x = g(x)$  cu soluția  $x^* \in (a, b)$  Presupunem ca  $g$  este derivabilă, cu derivata continuă în intervalul  $(a, b)$ . Dacă  $|g'(x^*)| < 1$ , atunci există  $\delta > 0$  a.î. pentru  $x_0$ , cu proprietatea  $|x_0 - x^*| < \delta$  șirul aproximațiilor succesive converge la  $x^*$  ( $x_0$  **suficient de aproape**).
- **Exercițiu.** Rezolvați ecuația  $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$  folosind o metoda iterativă de punct fix pe intervalul  $[1, 2]$ . Fie  $g(x) = (3x^2 + 3)^{1/4}, \dots$

# Ecuatii diferențiale. Probleme Cauchy.

- Ecuatii diferențiale de ordinul întâi:

$$y' = f(t, y) \text{ sau } y'(t) = f(t, y(t)).$$

# Ecuatii diferențiale. Probleme Cauchy.

- Ecuatii diferențiale de ordinul întâi:

$$y' = f(t, y) \text{ sau } y'(t) = f(t, y(t)).$$

- Probleme Cauchy (IVP):  $y' = f(t, y)$ ,  $y(0) = y_0$ .



# Ecuții diferențiale. Probleme Cauchy.

- Ecuții diferențiale de ordinul întâi:

$$y' = f(t, y) \text{ sau } y'(t) = f(t, y(t)).$$

- Probleme Cauchy (IVP):  $y' = f(t, y)$ ,  $y(0) = y_0$ .
- Ecuții diferențiale de ordinul doi:

$$y'' = f(t, y, y').$$

Valori inițiale:  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = y'_0$ .

# Ecuatii diferențiale. Probleme Cauchy.

- Ecuatii diferențiale de ordinul întâi:

$$y' = f(t, y) \text{ sau } y'(t) = f(t, y(t)).$$

- Probleme Cauchy (IVP):  $y' = f(t, y)$ ,  $y(0) = y_0$ .
- Ecuatii diferențiale de ordinul doi:

$$y'' = f(t, y, y').$$

Valori inițiale:  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = y'_0$ .

- Sisteme de ecuații diferențiale de ordinul 1. Fie  $y_1(t) := y(t)$  și  $y_2(t) := y'(t)$ . Atunci ecuația diferențială de ordinul 2 se poate scrie sub forma:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ f(t, y_1, y_2) \end{pmatrix} \text{ sau } u' = F(t, u),$$

unde  $u = (y_1, y_2)^T$ ,  $F(t, u) = (u_1, f(t, u))^T$ .

# Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

$$\begin{cases} y' & = f(t, y) \\ y(0) & = y_0 \end{cases}$$

# Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

Newton, 1671

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' &= 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

# Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

Newton, 1671

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' &= 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Serii de puteri:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2!} + y^{(3)}(0)\frac{t^3}{3!} + \dots$$

**Exemplu.** *Soluția ecuației lui Newton folosind serii de puteri.*

-  $y(0) = 0$  implică

# Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

Newton, 1671

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' &= 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Serii de puteri:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2!} + y^{(3)}(0)\frac{t^3}{3!} + \dots$$

**Exemplu.** *Soluția ecuației lui Newton folosind serii de puteri.*

-  $y(0) = 0$  implică  $y'(0) = 1$

# Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

Newton, 1671

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' &= 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Serii de puteri:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2!} + y^{(3)}(0)\frac{t^3}{3!} + \dots$$

**Exemplu.** *Soluția ecuației lui Newton folosind serii de puteri.*

-  $y(0) = 0$  implică  $y'(0) = 1 \Rightarrow y(x) = x + \dots$

# Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

Newton, 1671

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' &= 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Serii de puteri:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2!} + y^{(3)}(0)\frac{t^3}{3!} + \dots$$

**Exemplu.** *Soluția ecuației lui Newton folosind serii de puteri.*

- $y(0) = 0$  implică  $y'(0) = 1 \Rightarrow y(x) = x + \dots$
- $y(0) = 0, y'(0) = 1$  implică



# Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

Newton, 1671

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' &= 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Serii de puteri:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2!} + y^{(3)}(0)\frac{t^3}{3!} + \dots$$

**Exemplu.** *Soluția ecuației lui Newton folosind serii de puteri.*

- $y(0) = 0$  implică  $y'(0) = 1 \Rightarrow y(x) = x + \dots$
- $y(0) = 0, y'(0) = 1$  implică  $y''(0) = -2$

# Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

Newton, 1671

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' &= 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Serii de puteri:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2!} + y^{(3)}(0)\frac{t^3}{3!} + \dots$$

**Exemplu.** *Soluția ecuației lui Newton folosind serii de puteri.*

- $y(0) = 0$  implică  $y'(0) = 1 \Rightarrow y(x) = x + \dots$
- $y(0) = 0, y'(0) = 1$  implică  $y''(0) = -2 \Rightarrow y(x) = x - x^2 + \dots$

# Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

Newton, 1671

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' &= 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Serii de puteri:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2!} + y^{(3)}(0)\frac{t^3}{3!} + \dots$$

**Exemplu.** *Soluția ecuației lui Newton folosind serii de puteri.*

- $y(0) = 0$  implică  $y'(0) = 1 \Rightarrow y(x) = x + \dots$
- $y(0) = 0, y'(0) = 1$  implică  $y''(0) = -2 \Rightarrow y(x) = x - x^2 + \dots$
- $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -2$  implică

# Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

Newton, 1671

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' &= 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Serii de puteri:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2!} + y^{(3)}(0)\frac{t^3}{3!} + \dots$$

**Exemplu.** *Soluția ecuației lui Newton folosind serii de puteri.*

- $y(0) = 0$  implică  $y'(0) = 1 \Rightarrow y(x) = x + \dots$
- $y(0) = 0, y'(0) = 1$  implică  $y''(0) = -2 \Rightarrow y(x) = x - x^2 + \dots$
- $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -2$  implică  $y^{(3)}(0) = 2$

# Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

Newton, 1671

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' &= 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Serii de puteri:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2!} + y^{(3)}(0)\frac{t^3}{3!} + \dots$$

**Exemplu.** *Soluția ecuației lui Newton folosind serii de puteri.*

- $y(0) = 0$  implică  $y'(0) = 1 \Rightarrow y(x) = x + \dots$
- $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$  implică  $y''(0) = -2 \Rightarrow y(x) = x - x^2 + \dots$
- $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = -2$  implică  $y^{(3)}(0) = 2 \Rightarrow y(x) = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$

# Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

Newton, 1671

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' &= 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Serii de puteri:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2!} + y^{(3)}(0)\frac{t^3}{3!} + \dots$$

**Exemplu.** *Soluția ecuației lui Newton folosind serii de puteri.*

- $y(0) = 0$  implică  $y'(0) = 1 \Rightarrow y(x) = x + \dots$
- $y(0) = 0, y'(0) = 1$  implică  $y''(0) = -2 \Rightarrow y(x) = x - x^2 + \dots$
- $y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -2$  implică  $y^{(3)}(0) = 2 \Rightarrow y(x) = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$

Soluția obținută de Newton:

$$y(x) = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6 + \dots$$

# Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

## E X E M P L. I.

Sit Æquatio  $\frac{y}{x} = 1 - 3x + y + xx + xy$ ; cujus Terminoy:

$1 - 3x + xx$  non affectos *Relasâ* Quantitate dispositos vides in lateralem Seriem primo loco, & reliquos  $y$  &  $xy$  in finistrâ Columnâ.

	$+ 1 - 3x + xx$
$+ y$	$* + x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5; \&c.$
$+ xy$	$* x + xx - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{30}x^6; \&c.$
Aggreg.	$+ 1 - 2x + xx - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{30}x^5; \&c.$
$y =$	$+ x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6; \&c.$

Nunc

# Metode numerice

Considerăm din nou problema Cauchy

$$\begin{cases} y' & = f(t, y) \\ y(0) & = y_0 \end{cases}$$

și notăm cu  $y^* := y^*(t)$  soluția exactă. În cele ce urmează sunt valabile următoarele convenții:

- Pasul de integrare:  $h$ ,  $h > 0$ ;



# Metode numerice

Considerăm din nou problema Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

și notăm cu  $y^* := y^*(t)$  soluția exactă. În cele ce urmează sunt valabile următoarele convenții:

- Pasul de integrare:  $h, h > 0$ ;
- Timpii de integrare:  $t_i, t_j = ih, i = 0, 1, 2, \dots$ ;

# Metode numerice

Considerăm din nou problema Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

și notăm cu  $y^* := y^*(t)$  soluția exactă. În cele ce urmează sunt valabile următoarele convenții:

- Pasul de integrare:  $h$ ,  $h > 0$ ;
- Timpii de integrare:  $t_i$ ,  $t_i = ih$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ ;
- Soluția exactă la pasul  $n$ :  $y_n^*$ ,  $y_n^* := y^*(t_n)$ ;

# Metode numerice

Considerăm din nou problema Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

și notăm cu  $y^* := y^*(t)$  soluția exactă. În cele ce urmează sunt valabile următoarele convenții:

- Pasul de integrare:  $h, h > 0$ ;
- Timpii de integrare:  $t_i, t_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots$ ;
- Soluția exactă la pasul  $n$ :  $y_n^*, y_n^* := y^*(t_n)$ ;
- Soluția numerică la pasul  $n$ :  $y_n, y_n \approx y_n^*$ ;

# Metode numerice

Considerăm din nou problema Cauchy

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

și notăm cu  $y^* := y^*(t)$  soluția exactă. În cele ce urmează sunt valabile următoarele convenții:

- Pasul de integrare:  $h, h > 0$ ;
- Timpii de integrare:  $t_i, t_j = ih, i = 0, 1, 2, \dots$ ;
- Soluția exactă la pasul  $n$ :  $y_n^*, y_n^* := y^*(t_n)$ ;
- Soluția numerică la pasul  $n$ :  $y_n, y_n \approx y_n^*$ ;
- Eroarea la pasul  $n$ :  $e_n, e_n := |y_n^* - y_n|$

## Metode numerice. Metoda lui Euler.

- Din definiția derivatei avem:

$$y'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \text{ și folosind aproximarea } y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

în ecuația diferențială  $y'(t) = f(t, y(t))$  ne conduce la

## Metode numerice. Metoda lui Euler.

- Din definiția derivatei avem:

$$y'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \text{ și folosind aproximarea } y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

în ecuația diferențială  $y'(t) = f(t, y(t))$  ne conduce la

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)).$$

## Metode numerice. Metoda lui Euler.

- Din definiția derivatei avem:

$$y'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \text{ și folosind aproximarea } y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

în ecuația diferențială  $y'(t) = f(t, y(t))$  ne conduce la

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)).$$

- Pentru  $t := t_n$ ,  $y_n \approx y(t_n)$ ,  $y_{n+1} \approx y(t_{n+1})$  obținem **metoda lui Euler (1768)**:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

## Metode numerice. Metoda lui Euler.

- Din definiția derivatei avem:

$$y'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \text{ și folosind aproximarea } y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

în ecuația diferențială  $y'(t) = f(t, y(t))$  ne conduce la

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)).$$

- Pentru  $t := t_n$ ,  $y_n \approx y(t_n)$ ,  $y_{n+1} \approx y(t_{n+1})$  obținem **metoda lui Euler (1768)**:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

- **Eroarea de trunchiere (discretizare)** la pasul  $n + 1$  este definită prin

$$T_{n,h} := y^*(t_{n+1}) - [y^*(t_n) + hf(t_n, y^*(t_n))].$$



# Metode numerice. Metoda lui Euler.

- Din definiția derivatei avem:

$$y'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \text{ și folosind aproximarea } y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

în ecuația diferențială  $y'(t) = f(t, y(t))$  ne conduce la

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)).$$

- Pentru  $t := t_n$ ,  $y_n \approx y(t_n)$ ,  $y_{n+1} \approx y(t_{n+1})$  obținem **metoda lui Euler (1768)**:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

- **Eroarea de trunchiere (discretizare)** la pasul  $n + 1$  este definită prin

$$T_{n,h} := y^*(t_{n+1}) - [y^*(t_n) + hf(t_n, y^*(t_n))].$$

Pentru metoda lui Euler avem:

$$T_{n,h} = \frac{h^2}{2} (y^*)''(\xi_n),$$

unde  $\xi_n \in [t_n, t_{n+1}]$ . Vom scrie  $T_{n,h} = \mathcal{O}(h^2)$ .

## Convergența metodei lui Euler

În cele ce urmează presupunem ca  $f(t, y)$  este o funcție Lipschitz în raport cu a doua variabilă. Mai precis, presupunem că există  $K > 0$ , astfel încât:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|.$$

### Teoremă

*Presupunem că soluția  $y^*$  are derivată de ordinul 2 mărginită pe intervalul  $[0, b]$ .*

*Atunci*

$$\max_{0 \leq t_n \leq b} |y_n^* - y_n| \leq e^{bK} e_0 + \frac{e^{bK} - 1}{K} \tau(h),$$

*unde*

$$\tau(h) = \frac{h}{2} \|y''\|_\infty \text{ și } e_n = |y_n^* - y_n|.$$

## Convergența metodei lui Euler

În cele ce urmează presupunem ca  $f(t, y)$  este o funcție Lipschitz în raport cu a doua variabilă. Mai precis, presupunem că există  $K > 0$ , astfel încât:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|.$$

### Teoremă

*Presupunem că soluția  $y^*$  are derivată de ordinul 2 mărginită pe intervalul  $[0, b]$ .*

*Atunci*

$$\max_{0 \leq t_n \leq b} |y_n^* - y_n| \leq e^{bK} e_0 + \frac{e^{bK} - 1}{K} \tau(h),$$

*unde*

$$\tau(h) = \frac{h}{2} \|y''\|_\infty \text{ și } e_n = |y_n^* - y_n|.$$

**Observație.** Eroarea de trunchiere  $T_{n,h} = \frac{h^2}{2} (y^*)''(\xi_n)$  satisface

$$|T_{n,h}| \leq h\tau(h).$$

# Convergența metodei lui Euler

i) Scriem

$$y_{n+1}^* = y_n^* + hf(t_n, y_n^*) + T_{n,h},$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

# Convergența metodei lui Euler

i) Scriem

$$y_{n+1}^* = y_n^* + hf(t_n, y_n^*) + T_{n,h},$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n).$$

ii) Prin scădere:  $y_{n+1}^* - y_{n+1} = y_n^* - y_n + h[f(t_n, y_n^*) - f(t_n, y_n)] + T_{n,h}$ .

# Convergența metodei lui Euler

i) Scriem

$$\begin{aligned}y_{n+1}^* &= y_n^* + hf(t_n, y_n^*) + T_{n,h}, \\y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n).\end{aligned}$$

ii) Prin scădere:  $y_{n+1}^* - y_{n+1} = y_n^* - y_n + h[f(t_n, y_n^*) - f(t_n, y_n)] + T_{n,h}$ .

iii) Folosind proprietatea Lipschitz a funcției  $f(t, y)$  și  $|T_{n,h}| \leq h\tau(h)$  obținem:

$$e_{n+1} \leq (1 + hK)e_n + h\tau(h).$$

# Convergența metodei lui Euler

i) Scriem

$$\begin{aligned}y_{n+1}^* &= y_n^* + hf(t_n, y_n^*) + T_{n,h}, \\y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n).\end{aligned}$$

ii) Prin scădere:  $y_{n+1}^* - y_{n+1} = y_n^* - y_n + h[f(t_n, y_n^*) - f(t_n, y_n)] + T_{n,h}$ .

iii) Folosind proprietatea Lipschitz a funcției  $f(t, y)$  și  $|T_{n,h}| \leq h\tau(h)$  obținem:

$$e_{n+1} \leq (1 + hK)e_n + h\tau(h).$$

iv) Din folosirea repetată a inegalității de mai sus obținem:

$$e_n \leq (1 + hK)^n e_0 + h\tau(h) \left[ 1 + (1 + hK) + \dots + (1 + hK)^{n-1} \right]$$

v) Folosind formula de calcul a sumei unei progresii geometrice, ajungem la:

$$e_n \leq (1 + hK)^n e_0 + \left[ \frac{(1 + hK)^n - 1}{K} \right] \tau(h)$$

Concluzia teoremei se obține folosind acum inegalitatea  $(1 + x)^m \leq e^{mx}$  ( $x \geq -1$ ).

# Metoda lui Euler implicită

Metoda **Euler implicită** ("*backward Euler*" sau "*implicit Euler*") este dată de:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots$$

## Observații:

- Eroarea de trunchiere  $T_{n,h}$  pentru metoda Euler implicită satisface

$$T_{n,h} = \mathcal{O}(h^2).$$



# Metoda lui Euler implicită

Metoda **Euler implicită** ("*backward Euler*" sau "*implicit Euler*") este dată de:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots$$

## Observații:

- Eroarea de trunchiere  $T_{n,h}$  pentru metoda Euler implicită satisface

$$T_{n,h} = \mathcal{O}(h^2).$$

- Rezultatul de convergență este similar cu cel obținut pentru metoda lui Euler (explicită).

# Metoda lui Euler implicită

Metoda **Euler implicită** ("*backward Euler*" sau "*implicit Euler*") este dată de:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots$$

## Observații:

- Eroarea de trunchiere  $T_{n,h}$  pentru metoda Euler implicită satisface

$$T_{n,h} = \mathcal{O}(h^2).$$

- Rezultatul de convergență este similar cu cel obținut pentru metoda lui Euler (explicită).
- La fiecare pas de integrare metoda Euler implicită trebuie să rezolve o ecuație (neliniară în general). Mai precis  $y_{n+1}$  este determinat ca soluție a ecuației în  $u$ :

$$u - y_n + hf(t_{n+1}, u) = 0.$$

# Metoda lui Euler implicită

Metoda **Euler implicită** ("*backward Euler*" sau "*implicit Euler*") este dată de:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, 1, \dots$$

## Observații:

- Eroarea de trunchiere  $T_{n,h}$  pentru metoda Euler implicită satisface

$$T_{n,h} = \mathcal{O}(h^2).$$

- Rezultatul de convergență este similar cu cel obținut pentru metoda lui Euler (explicită).
- La fiecare pas de integrare metoda Euler implicită trebuie să rezolve o ecuație (neliniară în general). Mai precis  $y_{n+1}$  este determinat ca soluție a ecuației în  $u$ :

$$u - y_n + hf(t_{n+1}, u) = 0.$$

- Având în vedere efortul computațional mai mare al metodei Euler implicită, care este avantajul acestei metode față de metoda lui Euler explicită?

## Stabilitate. Implicit vs. explicit.

Fie  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Considerăm următoarea problemă test:

$$\begin{cases} y' &= \lambda y, \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

având soluția exactă

## Stabilitate. Implicit vs. explicit.

Fie  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Considerăm următoarea problemă test:

$$\begin{cases} y' &= \lambda y, \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

având soluția exactă  $y(t) = e^{\lambda t}$ . Se observă că dacă  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  atunci  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = 0$ .

## Stabilitate. Implicit vs. explicit.

Fie  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Considerăm următoarea problemă test:

$$\begin{cases} y' &= \lambda y, \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

având soluția exactă  $y(t) = e^{\lambda t}$ . Se observă că dacă  $Re(\lambda) < 0$  atunci  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = 0$ . Pentru care din metodele lui Euler, obținem un comportament similar?

## Stabilitate. Implicit vs. explicit.

Fie  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Considerăm următoarea problemă test:

$$\begin{cases} y' &= \lambda y, \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

având soluția exactă  $y(t) = e^{\lambda t}$ . Se observă că dacă  $Re(\lambda) < 0$  atunci  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = 0$ . Pentru care din metodele lui Euler, obținem un comportament similar? Pentru problema test avem următoarele rezultate:

## Stabilitate. Implicit vs. explicit.

Fie  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Considerăm următoarea problemă test:

$$\begin{cases} y' &= \lambda y, \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

având soluția exactă  $y(t) = e^{\lambda t}$ . Se observă că dacă  $Re(\lambda) < 0$  atunci  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = 0$ . Pentru care din metodele lui Euler, obținem un comportament similar? Pentru problema test avem următoarele rezultate:

*Metoda lui Euler (explicită)*

$$y_n = (1 + h\lambda)^n, \quad n = 0, 1, \dots$$



## Stabilitate. Implicit vs. explicit.

Fie  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Considerăm următoarea problemă test:

$$\begin{cases} y' &= \lambda y, \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

având soluția exactă  $y(t) = e^{\lambda t}$ . Se observă că dacă  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  atunci  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = 0$ . Pentru care din metodele lui Euler, obținem un comportament similar? Pentru problema test avem următoarele rezultate:

### Metoda lui Euler (explicită)

$$y_n = (1 + h\lambda)^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Se obține  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  pentru acele valori  $\lambda$  pentru care  $|1 + h\lambda| < 1$ .

## Stabilitate. Implicit vs. explicit.

Fie  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Considerăm următoarea problemă test:

$$\begin{cases} y' &= \lambda y, \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

având soluția exactă  $y(t) = e^{\lambda t}$ . Se observă că dacă  $Re(\lambda) < 0$  atunci  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = 0$ . Pentru care din metodele lui Euler, obținem un comportament similar? Pentru problema test avem următoarele rezultate:

### Metoda lui Euler (explicită)

$$y_n = (1 + h\lambda)^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Se obține  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  pentru acele valori  $\lambda$  pentru care  $|1 + h\lambda| < 1$ . Regiunea de stabilitate este:

$$R_e(h) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |1 + h\lambda| < 1\}.$$

## Stabilitate. Implicit vs. explicit.

Fie  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Considerăm următoarea problemă test:

$$\begin{cases} y' &= \lambda y, \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

având soluția exactă  $y(t) = e^{\lambda t}$ . Se observă că dacă  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  atunci  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = 0$ . Pentru care din metodele lui Euler, obținem un comportament similar? Pentru problema test avem următoarele rezultate:

*Metoda lui Euler (explicită)*

$$y_n = (1 + h\lambda)^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

*Metoda lui Euler implicită*

$$y_n = \left( \frac{1}{1 - h\lambda} \right)^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Se obține  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  pentru acele valori  $\lambda$  pentru care  $|1 + h\lambda| < 1$ . Regiunea de stabilitate este:

$$R_e(h) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |1 + h\lambda| < 1\}.$$

## Stabilitate. Implicit vs. explicit.

Fie  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Considerăm următoarea problemă test:

$$\begin{cases} y' &= \lambda y, \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

având soluția exactă  $y(t) = e^{\lambda t}$ . Se observă că dacă  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  atunci  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = 0$ . Pentru care din metodele lui Euler, obținem un comportament similar? Pentru problema test avem următoarele rezultate:

*Metoda lui Euler (explicită)*

$$y_n = (1 + h\lambda)^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Se obține  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  pentru acele valori  $\lambda$  pentru care  $|1 + h\lambda| < 1$ . Regiunea de stabilitate este:

$$R_e(h) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |1 + h\lambda| < 1\}.$$

*Metoda lui Euler implicită*

$$y_n = \left( \frac{1}{1 - h\lambda} \right)^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Se obține  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  pentru acele valori  $\lambda$  pentru care  $|1 - h\lambda| > 1$ .

## Stabilitate. Implicit vs. explicit.

Fie  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Considerăm următoarea problemă test:

$$\begin{cases} y' &= \lambda y, \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

având soluția exactă  $y(t) = e^{\lambda t}$ . Se observă că dacă  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$  atunci  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda t} = 0$ . Pentru care din metodele lui Euler, obținem un comportament similar? Pentru problema test avem următoarele rezultate:

*Metoda lui Euler (explicită)*

$$y_n = (1 + h\lambda)^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Se obține  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  pentru acele valori  $\lambda$  pentru care  $|1 + h\lambda| < 1$ . Regiunea de stabilitate este:

$$R_e(h) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |1 + h\lambda| < 1\}.$$

*Metoda lui Euler implicită*

$$y_n = \left( \frac{1}{1 - h\lambda} \right)^n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Se obține  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  pentru acele valori  $\lambda$  pentru care  $|1 - h\lambda| > 1$ . Regiunea de stabilitate este:

$$R_i(h) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |1 - h\lambda| > 1\},$$

regiune care include  $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\lambda) < 0\}$ .

# Metode Runge-Kutta

Metodele Runge-Kutta de ordin  $p + 1$  sunt obținute prin următoarea schemă:

$$\begin{aligned}K_0 &= hf(t_n, y_n) \\K_1 &= hf(t_n + a_1 h, y_n + b_{1,0} K_0) \\&\vdots \\&\vdots \\K_p &= hf\left(t_n + a_p h, y_n + \sum_{i=0}^{p-1} b_{p,i} K_i\right),\end{aligned}$$

iar valoarea aproximativă a soluției la pasul  $t_{n+1}$  este calculată prin

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=0}^p A_i K_i.$$

Coeficienții  $a_j$ ,  $b_{k,i}$  și  $A_l$ ,  $j = \overline{1, p}$ ,  $l = \overline{0, p}$ ,  $k = \overline{1, p}$ ,  $i = \overline{0, k-1}$  se determină din dezvoltări în serie Taylor, astfel încât eroarea de trunchiere asociată metodei să satisfacă

$$T_{n,h} = \mathcal{O}(h^{p+2}).$$