Formule de cuadratură. Operatori de aproximare

Formule de cuadratură: cuadraturi de tip interpolator, cuadraturi Gauss.
Operatori de aproximare: noţiuni generale, operatori Bernstein, curbe Bezier.

1. Să se determine coeficienţii şi nodurile formulelor de cuadratură cu grad maxim de exactitate de forma:

   (a)
   $$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = Af(-1) + Bf(x_0) + Cf(1) + R(f).$$

   (b)
   $$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f).$$

   (c)
   $$\int_{a}^{b} f(x)dx = Af(a) + Bf\left(\frac{a+b}{2}\right) + Cf(b) + R(f).$$

   (d)
   $$\int_{0}^{\infty} e^{-x} f(x)dx = A_0 f(2) + A_1 f(x_1) + R(f).$$

   (e)
   $$\int_{1}^{\infty} e^{-2x} f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + R(f).$$

   (f)
   $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + R(f).$$

2. Determinaţi coeicienţi a, b, c, d astfel incât formula de cuadratură:
   $$\int_{-1}^{1} f(x)dx = af(-1) + bf(1) + cf'(-1) + df'(1) + R(f)$$
   să aibă gradul de exactitate 3.

3. Să se arate că şirurile de operatori de mai sus sunt siruri de aproximare.

   (a) $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $M_n : C[0,1] \to C[0,1]$ definiţi prin

$$M_n(f)(x) = (n+1)(n+2)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)\frac{\displaystyle\int_0^1 tf(t)p_{n,k}(t)dt}{k+1},$$

   unde $p_{n,k}(t)$ sunt polinoamele fundamentale Bernstein.

   (b) $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $K_n : C[0,1] \to C[0,1]$ definiţi prin

$$K_n(f)(x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt,$$

   unde $p_{n,k}(t)$ sunt polinoamele fundamentale Bernstein.

   (c) $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $U_n : C[0,1] \to C[0,1]$ definiţi prin

$$U_n(f)(x) = \frac{1}{3}B_n(f)(x) + \frac{2}{3}(n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)\int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t)dt.$$

4. Fie $p_{n,k}(x)$ polinoamele fundamentale Bernstein. Să se demonstreze următoarea relaţie de recurenţă:

$$p_{n,k}(x) = (1-x)p_{n-1,k}(x) + xp_{n-1,k-1}(x).$$

5. Să se calculeze $B_n(e_3)(x)$, unde $B_n : C[0,1] \to C[0,1]$ sunt operatorii Bernstein, iar $e_k(x) = x^k$.

6. Să se calculeze $B_n(f)(x)$ unde $f(x) = \cos(x)$.