

1. Se consideră sistemul liniar $Ax = b$, unde :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ și } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- (a) Este matricea A (strict) diagonal dominantă?.
- (b) Satisface matricea A condițiile din teorema de convergență pentru metoda Gauss-Seidel?
- (c) Analizați convergența iterațiilor atât pentru metoda lui Jacobi, cât și pentru Gauss-Seidel. (*Indicație: Pentru fiecare metodă rescrieți iterațiile sub forma $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ și analizați razele spectrale ale matricii corespunzătoare metodei Jacobi B_J , respectiv a metodei Gauss-Seidel B_{GS}*).

2. Se consideră iterațiile

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, x^{(0)} \text{ dat.}$$

Presupunem că există norma operator $\|\cdot\|$, astfel încât $\|B\| < 1$. Să se arate că

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|,$$

unde x^* este soluția sistemului liniar $x = Bx + c$.

3. Se consideră sistemul liniar:

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -5 \end{cases}$$

- (a) Să se determine soluția sistemului folosind transformări elementare.
- (b) Să se determine dacă metoda lui Jacobi converge pentru orice $x^{(0)}$.
- (c) Să se determine dacă metoda Gauss-Seidel converge pentru orice $x^{(0)}$.
- (d) Să se analizeze primele 20 de iterații (computer use) pentru fiecare metodă în cazul în care se pornește cu $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

4. Se consideră sistemul liniar:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

Calculați primele două iterații ale metodei $SOR(\omega)$ dacă $\omega = \frac{5}{4}$ și $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

5. Ecuația $x^2 - 5 = 0$ poate fi rescrisă sub forma $x = g_c(x)$ unde

$$g_c(x) = x + c(x^2 - 5).$$

Considerați șirul (x_n) generat prin

$$x_{n+1} = g_c(x_n), \quad x_0 \text{ dat}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Determinați un interval (a, b) astfel încât pentru orice $c \in (a, b)$ să puteți garanta convergența șirului x_n . Pentru ce valoare (valori) ale lui c convergența va fi mai rapidă?

6. Se consideră ecuația

$$x = g(x)$$

unde $g(x)$ este o funcție de clasă C^1 și α este o rădăcină astfel încât $\alpha = g(\alpha)$ și $0 < |g'(\alpha)| < 1$. Considerăm șirul aproximațiilor succesive,

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

și definim

$$\lambda_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}.$$

Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n.$$