Calcul Numeric

Prof. Bogdan Gavrea

ISA 2018

Norme de vectori. Norme de matrici.

Norme de vector, norme operator pe spațiul matricilor

Definiție

Fie V un spațiu vectorial. O funcție $||\cdot||$ se numește **normă** *dacă*

i) $||x|| \geq 0,\ \forall x \in V$ *și* $||x|| = 0$ *dacă și numai dacă* $x = 0$;

ii) $||\alpha x|| = |\alpha|\, ||x||$ *pentru orice* $x \in V$ *și* $\alpha \in K$, ($K = \mathbb{R}$ *sau* $K = \mathbb{C}$);

iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *pentru orice* $x, y \in V$.

Norme de vector, norme operator pe spațiul matricilor

Definiție

Fie V un spațiu vectorial. O funcție $||\cdot||$ se numește normă dacă

i) $||x|| \geq 0$, $\forall x \in V$ *și* $||x|| = 0$ *dacă și numai dacă* $x = 0$;

ii) $||\alpha x|| = |\alpha| \, ||x||$ *pentru orice* $x \in V$ *și* $\alpha \in K$, ($K = \mathbb{R}$ *sau* $K = \mathbb{C}$);

iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *pentru orice* $x, y \in V$.

Exemple ($V = \mathbb{C}^n$)

a) $||x||_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$;

b) $||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Norme de vector, norme operator pe spațiul matricilor

Definiție

Fie V un spațiu vectorial. O funcție $||\cdot||$ se numește normă dacă

i) $||x|| \geq 0$, $\forall x \in V$ *și* $||x|| = 0$ *dacă și numai dacă* $x = 0$;

ii) $||\alpha x|| = |\alpha| \, ||x||$ *pentru orice* $x \in V$ *și* $\alpha \in K$, *(*$K = \mathbb{R}$ *sau* $K = \mathbb{C}$*);*

iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *pentru orice* $x, y \in V$.

Exemple ($V = \mathbb{C}^n$)

a) $||x||_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$;

b) $||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Exercițiu: Desenați bilele unitate din $\mathbb{R}^2$ pentru $||\cdot||_2$, $||\cdot||_\infty$ și $||\cdot||_1$.

Norme de vector, norme operator pe spațiul matricilor

Definiție

Fie V un spațiu vectorial. O funcție $||\cdot||$ se numește normă dacă

i) $||x|| \geq 0, \ \forall x \in V$ *și* $||x|| = 0$ *dacă și numai dacă* $x = 0$;

ii) $||\alpha x|| = |\alpha| \, ||x||$ *pentru orice* $x \in V$ *și* $\alpha \in K$, *(*$K = \mathbb{R}$ *sau* $K = \mathbb{C}$*)*;

iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ *pentru orice* $x, y \in V$.

Exemple $(V = \mathbb{C}^n)$

a) $||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}, \ p \geq 1$;

b) $||x||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Exercițiu: Desenați bilele unitate din $\mathbb{R}^2$ pentru $||\cdot||_2$, $||\cdot||_\infty$ și $||\cdot||_1$.

Definiție

Fie $||\cdot||_v$ o normă pe $\mathbb{C}^n$. Norma operator pe $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ corespunzătoare normei vectoriale $||\cdot||_v$ este dată de

$$||A|| = \max_{x \neq 0} \frac{||Ax||_v}{||x||_v} = \max_{||x||_v = 1} ||Ax||_v \, , \forall A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}).$$

Notație $||A||_v := ||A||$.

Proprietăți ale normei operator

Inegalități. Fie $||\cdot|| := ||\cdot||_v$ o normă operator pe $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Atunci:

a) $||AB|| \leq ||A|| \, ||B||$;

b) $||Ax||_v \leq ||A||_v \, ||x||_v$.

Proprietăți ale normei operator

Inegalități. Fie $||\cdot|| := ||\cdot||_v$ o normă operator pe $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Atunci:

a) $||AB|| \leq ||A|| \, ||B||$;

b) $||Ax||_v \leq ||A||_v \, ||x||_v$.

Spectrul unei matrici $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ val. proprie pt } A\}.$$

Proprietăți ale normei operator

Inegalități. Fie $||\cdot|| := ||\cdot||_v$ o normă operator pe $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Atunci:

a) $||AB|| \leq ||A|| \, ||B||$;

b) $||Ax||_v \leq ||A||_v \, ||x||_v$.

Spectrul unei matrici $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ val. proprie pt } A\}.$$

Raza spectrală a unei matrici:

$$r_\sigma(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Proprietăți ale normei operator

Inegalități. Fie $||\cdot|| := ||\cdot||_v$ o normă operator pe $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Atunci:

a) $||AB|| \leq ||A|| \, ||B||$;

b) $||Ax||_v \leq ||A||_v \, ||x||_v$.

Spectrul unei matrici $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ val. proprie pt } A\}.$$

Raza spectrală a unei matrici:

$$r_\sigma(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Aplicație: Fie $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $r_\sigma(B) < 1$. Atunci $I - B$ este inversabilă și:

$$(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k.$$

Proprietăți ale normei operator

Inegalități. Fie $||\cdot|| := ||\cdot||_v$ o normă operator pe $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Atunci:

a) $||AB|| \leq ||A||\,||B||$;

b) $||Ax||_v \leq ||A||_v\,||x||_v$.

Spectrul unei matrici $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ val. proprie pt } A\}.$$

Raza spectrală a unei matrici:

$$r_\sigma(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Aplicație: Fie $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $r_\sigma(B) < 1$. Atunci $I - B$ este inversabilă și:

$$(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k.$$

Exemple.

i) $||A||_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

ii) $||A||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

iii) $||A||_2 = \sqrt{r_\sigma(A^* A)}$, unde $A^* = \overline{A}^T$.

Norma operator și raza spectrală

Legătura între normele operator și raza spectrală:

1) Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Atunci pentru orice normă de operator, avem:

$$r_\sigma(A) \leq ||A|| \, .$$

2) Pentru orice $\epsilon > 0$ există o normă de operator $||\cdot||_\epsilon$, astfel încât

$$||A||_\epsilon \leq r_\sigma(A) + \epsilon, \ \forall A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}).$$

Norma operator și raza spectrală

Legătura între normele operator și raza spectrală:

1) Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Atunci pentru orice normă de operator, avem:

$$r_\sigma(A) \leq ||A|| .$$

2) Pentru orice $\epsilon > 0$ există o normă de operator $||\cdot||_\epsilon$, astfel încât

$$||A||_\epsilon \leq r_\sigma(A) + \epsilon, \ \forall A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}).$$

3) Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Atunci $r_\sigma(A) < 1$ dacă și numai dacă există o normă operator $||\cdot||$, astfel încât $||A|| < 1$.
4) Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Atunci

$$\lim_{m\to\infty} A^m = 0$$

dacă și numai dacă $r_\sigma(A) < 1$.
(sau, dacă și numai dacă există o normă operator a.î. $||A|| < 1$).
5) Fie $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $||B|| < 1$ (normă operator). Atunci $I - B$ este inversabilă și:

$$(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k.$$

Exerciții

1) Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ și $||\cdot||$ o normă operator astfel încât $||A|| < 1$. Arătați că:

$$\left|\left|(I - A)^{-1}\right|\right| \leq \frac{1}{1 - ||A||}.$$

2) Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, astfel încât:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Să se arate că $r_\sigma(A) \leq 6$ și $r_\sigma(A^{-1}) \leq 1/2$.

3) Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Arătați că $|trace(A)| \leq nr_\sigma(A)$.

4) Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ o matrice simetrică pozitiv definită. Să se arate că

$$trace(A) > r_\sigma(A).$$