Calcul Numeric

Prof. Bogdan Gavrea

ISA 2018

Interpolare polinomială

Problema de interpolare Lagrange

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ și $x_0, ..., x_n$, $n + 1$ puncte distincte în intervalul $[a, b]$. Presupunem cunoscute valorile funcției $f(x)$ în punctele $x_0, ..., x_n$, i..e,

$$y_i = f(x_i),\ i = 0, 1, ..., n.$$

Problema de interpolare Lagrange

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ și $x_0, ..., x_n$, $n + 1$ puncte distincte în intervalul $[a, b]$. Presupunem cunoscute valorile funcției $f(x)$ în punctele $x_0, ..., x_n$, i..e,

$$y_i = f(x_i),\ i = 0, 1, ..., n.$$

Problema de interpolare Lagrange constă în determinarea unui polinom $P(x)$ de grad cel mult n, $P \in \Pi_n$, astfel încât:

$$P(x_i) = f(x_i),\ i = 0, ..., n.$$

Problema de interpolare Lagrange

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ și $x_0, ..., x_n$, $n + 1$ puncte distincte în intervalul $[a, b]$. Presupunem cunoscute valorile funcției $f(x)$ în punctele $x_0, ..., x_n$, i..e,

$$y_i = f(x_i),\ i = 0, 1, ..., n.$$

Problema de interpolare Lagrange constă în determinarea unui polinom $P(x)$ de grad cel mult n, $P \in \Pi_n$, astfel încât:

$$P(x_i) = f(x_i),\ i = 0, ..., n.$$

Definim următoarele polinoame:

- $l(x) = (x - x_0)...(x - x_n) \in \Pi_{n+1}$ se numește polinomul nodurilor.
- Polinomul fundamental $l_i(x)$ este definit prin

$$l_i(x) = \frac{l(x)}{(x - x_i)l'(x_i)} \text{ sau } l_i(x) = \frac{(x - x_0)..(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)..(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}.$$

Problema de interpolare Lagrange

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ și $x_0, ..., x_n$, $n+1$ puncte distincte în intervalul $[a, b]$. Presupunem cunoscute valorile funcției $f(x)$ în punctele $x_0, ..., x_n$, i..e,

$$y_i = f(x_i),\ i = 0, 1, ..., n.$$

Problema de interpolare Lagrange constă în determinarea unui polinom $P(x)$ de grad cel mult n, $P \in \Pi_n$, astfel încât:

$$P(x_i) = f(x_i),\ i = 0, ..., n.$$

Definim următoarele polinoame:

- $l(x) = (x - x_0)...(x - x_n) \in \Pi_{n+1}$ se numește polinomul nodurilor.
- Polinomul fundamental $l_i(x)$ este definit prin

$$l_i(x) = \frac{l(x)}{(x - x_i)l'(x_i)} \text{ sau } l_i(x) = \frac{(x - x_0)..(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_0)..(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}.$$

Observație:

$$l_i(x_k) = \delta_{i,k} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Existența și unicitatea polinomului de interpolare

Teoremă

Fiind date punctele distincte $x_0, \ldots, x_n$ *există un singur polinom de grad cel mult* n, $P \in \Pi_n$ *care interpolează funcția în punctele* x_i, *i.e.,*

$$P(x_i) = f(x_i),\ i = \overline{0, n}.$$

Existența și unicitatea polinomului de interpolare

Teoremă

Fiind date punctele distincte $x_0, \ldots, x_n$ *există un singur polinom de grad cel mult* n, $P \in \Pi_n$ *care interpolează funcția în punctele* x_i, *i.e.,*

$$P(x_i) = f(x_i), \; i = \overline{0, n}.$$

Demonstrație *(schiță)*:

- Existența. Polinomul $P(x)$ dat de

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

satisface $P \in \Pi_n$ și

Existența și unicitatea polinomului de interpolare

Teoremă

Fiind date punctele distincte $x_0, ..., x_n$ există un singur polinom de grad cel mult n, $P \in \Pi_n$ care interpolează funcția în punctele x_i, i.e.,

$$P(x_i) = f(x_i), \; i = \overline{0, n}.$$

Demonstrație *(schiță)*:

- Existența. Polinomul $P(x)$ dat de

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

satisface $P \in \Pi_n$ și $P(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, .., n$.

Existența și unicitatea polinomului de interpolare

Teoremă

Fiind date punctele distincte $x_0, ..., x_n$ *există un singur polinom de grad cel mult* n, $P \in \Pi_n$ *care interpolează funcția în punctele* x_i, *i.e.,*

$$P(x_i) = f(x_i), \ i = \overline{0, n}.$$

Demonstrație *(schiță)*:

- Existența. Polinomul $P(x)$ dat de

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

  satisface $P \in \Pi_n$ și $P(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, .., n$.
- Unicitatea: prin reducere la absurd

Existența și unicitatea polinomului de interpolare

Teoremă

Fiind date punctele distincte $x_0, ..., x_n$ *există un singur polinom de grad cel mult* n, $P \in \Pi_n$ *care interpolează funcția în punctele* x_i, *i.e.,*

$$P(x_i) = f(x_i), \ i = \overline{0, n}.$$

Demonstrație *(schiță)*:

- Existența. Polinomul $P(x)$ dat de

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

satisface $P \in \Pi_n$ și $P(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, .., n$.

- Unicitatea: prin reducere la absurd(se ajunge la un polinom din Π_n cu cel puțin $n + 1$ rădăcini distincte, lucru ce implică că acel polinom este egal cu polinomul nul).

Existența și unicitatea polinomului de interpolare

Teoremă

Fiind date punctele distincte $x_0, ..., x_n$ există un singur polinom de grad cel mult n, $P \in \Pi_n$ care interpolează funcția în punctele x_i, i.e.,

$$P(x_i) = f(x_i),\ i = \overline{0, n}.$$

Demonstrație *(schiță)*:

- Existența. Polinomul $P(x)$ dat de

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

  satisface $P \in \Pi_n$ și $P(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, .., n$.
- Unicitatea: prin reducere la absurd(se ajunge la un polinom din Π_n cu cel puțin $n+1$ rădăcini distincte, lucru ce implică că acel polinom este egal cu polinomul nul).

Notații: $P(x) = L_n(f; x_0, ..., x_n)(x) =$

Existența și unicitatea polinomului de interpolare

Teoremă

Fiind date punctele distincte $x_0, \ldots, x_n$ există un singur polinom de grad cel mult n, $P \in \Pi_n$ care interpolează funcția în punctele x_i, i.e.,

$$P(x_i) = f(x_i), \ i = \overline{0, n}.$$

Demonstrație *(schiță)*:

- Existența. Polinomul $P(x)$ dat de

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$$

  satisface $P \in \Pi_n$ și $P(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, .., n$.
- Unicitatea: prin reducere la absurd(se ajunge la un polinom din Π_n cu cel puțin $n+1$ rădăcini distincte, lucru ce implică că acel polinom este egal cu polinomul nul).

Notații: $P(x) = L_n(f; x_0, \ldots, x_n)(x) = L_n(f)(x)$.

Generarea recursivă a polinoamelor Lagrange

Fie $x_0, ..., x_n$ puncte distincte și $i \in \{0, ..., n\}$. Notăm prin $L_{n-1}^{(i)}(f)(x)$ polinomul de interpolare Lagrange al funcției $f(x)$ pe punctele $x_0, .., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$. Mai precis,

$$L_{n-1}^{(i)}(f)(x) = L_{n-1}(f; x_0, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)(x).$$

Notăm prin A_n coeficientul lui x^n din $L_n(f)(x)$ și scriem:

Generarea recursivă a polinoamelor Lagrange

Fie $x_0, ..., x_n$ puncte distincte și $i \in \{0, ..., n\}$. Notăm prin $L_{n-1}^{(i)}(f)(x)$ polinomul de interpolare Lagrange al funcției $f(x)$ pe punctele $x_0, .., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$. Mai precis,

$$L_{n-1}^{(i)}(f)(x) = L_{n-1}(f; x_0, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)(x).$$

Notăm prin A_n coeficientul lui x^n din $L_n(f)(x)$ și scriem:

$$L_n(f)(x) - L_{n-1}^{(i)}(f)(x) \quad =$$

Generarea recursivă a polinoamelor Lagrange

Fie $x_0, ..., x_n$ puncte distincte și $i \in \{0, ..., n\}$. Notăm prin $L_{n-1}^{(i)}(f)(x)$ polinomul de interpolare Lagrange al funcției $f(x)$ pe punctele $x_0, .., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$. Mai precis,

$$L_{n-1}^{(i)}(f)(x) = L_{n-1}(f; x_0, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)(x).$$

Notăm prin A_n coeficientul lui x^n din $L_n(f)(x)$ și scriem:

$$L_n(f)(x) - L_{n-1}^{(i)}(f)(x) \quad = \quad A_n(x - x_0)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)$$

Generarea recursivă a polinoamelor Lagrange

Fie $x_0, ..., x_n$ puncte distincte și $i \in \{0, ..., n\}$. Notăm prin $L_{n-1}^{(i)}(f)(x)$ polinomul de interpolare Lagrange al funcției $f(x)$ pe punctele $x_0, .., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$. Mai precis,

$$L_{n-1}^{(i)}(f)(x) = L_{n-1}(f; x_0, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)(x).$$

Notăm prin A_n coeficientul lui x^n din $L_n(f)(x)$ și scriem:

$$\begin{aligned} L_n(f)(x) - L_{n-1}^{(i)}(f)(x) &= A_n(x - x_0)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n) \\ L_n(f)(x) - L_{n-1}^{(j)}(f)(x) &= A_n(x - x_0)...(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})...(x - x_n) \end{aligned}$$

Generarea recursivă a polinoamelor Lagrange

Fie $x_0, ..., x_n$ puncte distincte și $i \in \{0, ..., n\}$. Notăm prin $L_{n-1}^{(i)}(f)(x)$ polinomul de interpolare Lagrange al funcției $f(x)$ pe punctele $x_0, .., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$. Mai precis,

$$L_{n-1}^{(i)}(f)(x) = L_{n-1}(f; x_0, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)(x).$$

Notăm prin A_n coeficientul lui x^n din $L_n(f)(x)$ și scriem:

$$\begin{aligned} L_n(f)(x) - L_{n-1}^{(i)}(f)(x) &= A_n(x - x_0)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n) \\ L_n(f)(x) - L_{n-1}^{(j)}(f)(x) &= A_n(x - x_0)...(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})...(x - x_n) \end{aligned}$$

Prin simple manipulări algebrice obținem:

$$L_n(f)(x) = \frac{(x - x_i)L_{n-1}^{(i)}(f)(x) - (x - x_j)L_{n-1}^{(j)}(f)(x)}{x_j - x_i}$$

Diferențe divizate

Definiție

Fie $x_0, ..., x_n$ *puncte distincte și* $f(x)$ *o funcție definită pe un domeniu ce conține punctele* x_i. *Se numește* **diferență divizată** *de ordinul* n *pe punctele* x_i, $i = \overline{0, n}$ *a funcției* f, *coeficientul lui* x^n *din polinomul de interpolare Lagrange* $L_n(f; x_0, .., x_n)(x)$.

Diferențe divizate

Definiție

Fie $x_0, ..., x_n$ *puncte distincte și* $f(x)$ *o funcție definită pe un domeniu ce conține punctele* x_i. *Se numește* **diferență divizată** *de ordinul* n *pe punctele* x_i, $i = \overline{0, n}$ *a funcției* f, *coeficientul lui* x^n *din polinomul de interpolare Lagrange* $L_n(f; x_0, .., x_n)(x)$. *Diferența divizată se notează cu* $[x_0, ..., x_n; f]$ *și se poate calcula după formula:*

$$[x_0, ..., x_n; f] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{l'(x_i)}.$$

Diferențe divizate

Definiție

Fie $x_0, ..., x_n$ puncte distincte și $f(x)$ o funcție definită pe un domeniu ce conține punctele x_i. Se numește **diferență divizată** *de ordinul n pe punctele x_i, $i = \overline{0, n}$ a funcției f, coeficientul lui x^n din polinomul de interpolare Lagrange $L_n(f; x_0, .., x_n)(x)$. Diferența divizată se notează cu $[x_0, ..., x_n; f]$ și se poate calcula după formula:*

$$[x_0, ..., x_n; f] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{l'(x_i)}.$$

Exemple:

- Pt $n = 0$, $[x_0; f] = f(x_0)$.

Diferențe divizate

Definiție

Fie $x_0, ..., x_n$ puncte distincte și $f(x)$ o funcție definită pe un domeniu ce conține punctele x_i. Se numește **diferență divizată** *de ordinul n pe punctele x_i, $i = \overline{0, n}$ a funcției f, coeficientul lui x^n din polinomul de interpolare Lagrange $L_n(f; x_0, .., x_n)(x)$. Diferența divizată se notează cu $[x_0, ..., x_n; f]$ și se poate calcula după formula:*

$$[x_0, ..., x_n; f] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{l'(x_i)}.$$

Exemple:

- Pt $n = 0$, $[x_0; f] = f(x_0)$.
- Pt $n = 1$,

$$[x_0, x_1; f] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Diferențe divizate

Definiție

Fie $x_0, ..., x_n$ puncte distincte și $f(x)$ o funcție definită pe un domeniu ce conține punctele x_i. Se numește **diferență divizată** *de ordinul n pe punctele x_i, $i = \overline{0, n}$ a funcției f, coeficientul lui x^n din polinomul de interpolare Lagrange $L_n(f; x_0, .., x_n)(x)$. Diferența divizată se notează cu $[x_0, ..., x_n; f]$ și se poate calcula după formula:*

$$[x_0, ..., x_n; f] = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{l'(x_i)}.$$

Exemple:

- Pt $n = 0$, $[x_0; f] = f(x_0)$.
- Pt $n = 1$,

$$[x_0, x_1; f] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Relația de recurență pentru diferențe divizate:

$$[x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n; f] = \frac{[x_1, ..., x_n; f] - [x_0, ..., x_{n-1}; f]}{x_n - x_0}.$$

Diferențe divizate. Proprietăți

- Demonstrația recurenței: $[x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n; f] = \frac{[x_1,...,x_n;f]-[x_0,...,x_{n-1};f]}{x_n-x_0}$.

Diferențe divizate. Proprietăți

- Demonstrația recurenței: $[x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n; f] = \frac{[x_1,...,x_n;f]-[x_0,...,x_{n-1};f]}{x_n-x_0}$. Din relația de recurență

$$L_n(f)(x) = \frac{(x-x_i)L_{n-1}^{(0)}(f)(x) - (x-x_j)L_{n-1}^{(n)}(f)(x)}{x_0 - x_n},$$

pentru polinoamele Lagrange se obține relația de recurență pentru diferențe divizate prin identificarea coeficienților.

Diferențe divizate. Proprietăți

- Demonstrația recurenței: $[x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n; f] = \frac{[x_1,...,x_n;f]-[x_0,...,x_{n-1};f]}{x_n-x_0}$. Din relația de recurență

$$L_n(f)(x) = \frac{(x-x_i)L_{n-1}^{(0)}(f)(x) - (x-x_j)L_{n-1}^{(n)}(f)(x)}{x_0 - x_n},$$

pentru polinoamele Lagrange se obține relația de recurență pentru diferențe divizate prin identificarea coeficienților.

- Avem $[x_0, ..., x_n; x^n] = 1$ și $[x_0, ..., x_n; x^k] = 0$ pentru $k < n$. Pe scurt:

$$[x_0, ..., x_n; x^k] = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k < n \end{cases}$$

Diferențe divizate. Proprietăți

- Demonstrația recurenței: $[x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n; f] = \frac{[x_1,...,x_n;f]-[x_0,...,x_{n-1};f]}{x_n - x_0}$. Din relația de recurență

$$L_n(f)(x) = \frac{(x - x_i)L_{n-1}^{(0)}(f)(x) - (x - x_j)L_{n-1}^{(n)}(f)(x)}{x_0 - x_n},$$

pentru polinoamele Lagrange se obține relația de recurență pentru diferențe divizate prin identificarea coeficienților.

- Avem $[x_0, ..., x_n; x^n] = 1$ și $[x_0, ..., x_n; x^k] = 0$ pentru $k < n$. Pe scurt:

$$[x_0, ..., x_n; x^k] = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k < n \end{cases}$$

- Diferența divizată este un operator liniar, i.e.,

$$[x_0, ..., x_n; \alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha[x_0, ..., x_n; f(x)] + \beta[x_0, ..., x_n; g(x)].$$

Diferențe divizate. Proprietăți

Diferențe divizate. Proprietăți

- Dacă $f(x_i) = g(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n$, atunci

$$[x_0, ..., x_n; f] = [x_0, ..., x_n; g].$$

Diferențe divizate. Proprietăți

- Dacă $f(x_i) = g(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n$, atunci

$$[x_0, ..., x_n; f] = [x_0, ..., x_n; g].$$

- $[x_0, ..., x_n; l(x)] = 0.$

Diferențe divizate. Proprietăți

- Dacă $f(x_i) = g(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n$, atunci

$$[x_0, ..., x_n; f] = [x_0, ..., x_n; g].$$

- $[x_0, ..., x_n; l(x)] = 0.$
- Formula de medie pentru diferențe divizate Fie $f \in C^{(n)}[a, b]$ și x_i, $i = \overline{0, n}$, puncte distincte în $[a, b]$.

Diferențe divizate. Proprietăți

- Dacă $f(x_i) = g(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n$, atunci

$$[x_0, ..., x_n; f] = [x_0, ..., x_n; g].$$

- $[x_0, ..., x_n; l(x)] = 0.$
- Formula de medie pentru diferențe divizate Fie $f \in C^{(n)}[a, b]$ și x_i, $i = \overline{0, n}$, puncte distincte în $[a, b]$. Atunci există $c \in \left(\min_{i=\overline{0,n}} x_i, \max_{i=\overline{0,n}} x_i\right)$ astfel încât

$$[x_0, ..., x_n; f] = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

Diferențe divizate. Proprietăți

- Dacă $f(x_i) = g(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n$, atunci

$$[x_0, ..., x_n; f] = [x_0, ..., x_n; g].$$

- $[x_0, ..., x_n; l(x)] = 0.$
- Formula de medie pentru diferențe divizate Fie $f \in C^{(n)}[a, b]$ și x_i, $i = \overline{0, n}$, puncte distincte în $[a, b]$. Atunci există $c \in \left(\min_{i=\overline{0,n}} x_i, \max_{i=\overline{0,n}} x_i\right)$ astfel încât

$$[x_0, ..., x_n; f] = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

- Calculați:

$$D = \left[x_0, ..., x_n; x^{n+1}\right].$$

Polinomul de interpolare Lagrange sub forma lui Newton

Polinomul de interpolare Lagrange sub forma lui Newton

- Avem:

$$L_i(f; x_0, x_1, ..., x_i)(x) - L_{i-1}(f; x_0, x_1, ..., x_{i-1})(x) =$$
$$(x - x_0)...(x - x_{i-1})[x_0, ..., x_i; f], \ i = \overline{1, n}.$$

Polinomul de interpolare Lagrange sub forma lui Newton

- Avem:

$$L_i(f; x_0, x_1, ..., x_i)(x) - L_{i-1}(f; x_0, x_1, ..., x_{i-1})(x) = \\ (x - x_0)...(x - x_{i-1})[x_0, ..., x_i; f], \ i = \overline{1, n}.$$

- Adunăm relațiile de mai sus membru cu membru și obținem:

$$\sum_{i=1}^{n} [L_i(f)(x) - L_{i-1}(f)(x)] = \sum_{i=1}^{n} (x - x_0)...(x - x_{i-1})[x_0, ..., x_i; f].$$

Polinomul de interpolare Lagrange sub forma lui Newton

- Avem:

$$L_i(f; x_0, x_1, ..., x_i)(x) - L_{i-1}(f; x_0, x_1, ..., x_{i-1})(x) = \\ (x - x_0)...(x - x_{i-1})[x_0, ..., x_i; f], \ i = \overline{1, n}.$$

- Adunăm relațiile de mai sus membru cu membru și obținem:

$$\sum_{i=1}^{n} [L_i(f)(x) - L_{i-1}(f)(x)] = \sum_{i=1}^{n} (x - x_0)...(x - x_{i-1})[x_0, ..., x_i; f].$$

- Se obține **polinomul lui Lagrange sub forma lui Newton**,

$$L_n(f)(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} (x - x_0)...(x - x_{i-1})[x_0, ..., x_i; f]$$

Restul în interpolarea Lagrange

Restul în interpolarea Lagrange

- Avem:

$$L_{n+1}(f; x_0, ..., x_n, x_{n+1})(t) - L_n(f; x_0, ..., x_n)(t) = \\ [x_0, .., x_n, x_{n+1}; f]\, l(t).$$

Restul în interpolarea Lagrange

- Avem:

$$L_{n+1}(f; x_0, ..., x_n, x_{n+1})(t) - L_n(f; x_0, ..., x_n)(t) = [x_0, .., x_n, x_{n+1}; f]\, l(t).$$

- Dacă acum alegem $t = x_{n+1}$, obținem:

$$f(x_{n+1}) - L_n(f; x_0, ..., x_n)(x_{n+1}) = [x_0, .., x_n, x_{n+1}; f]\, l(x_{n+1}).$$

Restul în interpolarea Lagrange

- Avem:

$$L_{n+1}(f; x_0, ..., x_n, x_{n+1})(t) - L_n(f; x_0, ..., x_n)(t) = [x_0, .., x_n, x_{n+1}; f]\, l(t).$$

- Dacă acum alegem $t = x_{n+1}$, obținem:

$$f(x_{n+1}) - L_n(f; x_0, ..., x_n)(x_{n+1}) = [x_0, .., x_n, x_{n+1}; f]\, l(x_{n+1}).$$

- Cum alegerea lui x_{n+1} a fost arbitrară, putem scrie:

$$f(x) - L_n(f; x_0, ..., x_n)(x) = [x_0, .., x_n, x; f]\, l(x).$$

Restul în interpolarea Lagrange

- Avem:

$$L_{n+1}(f; x_0, ..., x_n, x_{n+1})(t) - L_n(f; x_0, ..., x_n)(t) = [x_0, .., x_n, x_{n+1}; f]\, l(t).$$

- Dacă acum alegem $t = x_{n+1}$, obținem:

$$f(x_{n+1}) - L_n(f; x_0, ..., x_n)(x_{n+1}) = [x_0, .., x_n, x_{n+1}; f]\, l(x_{n+1}).$$

- Cum alegerea lui x_{n+1} a fost arbitrară, putem scrie:

$$f(x) - L_n(f; x_0, ..., x_n)(x) = [x_0, .., x_n, x; f]\, l(x).$$

- Dacă $f \in C^{(n+1)}[a, b]$, atunci există un punct $\theta := \theta(x) \in [a, b]$, astfel încât

$$f(x) - L_n(f; x_0, ..., x_n)(x) = l(x) \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}.$$

Convergența polinoamelor Lagrange

Teoremă

Fie $T = (x_{i,j})$ *o matrice triunghiulară infinită de noduri si* $f \in C^{\infty}[a, b]$*. Notăm cu* $M_{n+1} = \left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_{\infty}$*. Dacă pentru linia de noduri*

$$x_{n,0}, x_{n,1}, ..., x_{n,n}$$

considerăm polinomul de interpolare Lagrange

$$L_n(f)(x) := L_n(f; x_{n,0}, ..., x_{n,n})(x)$$

și dacă există $M > 0$*, a.î.,* $M_{n+1} \leq M$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*, atunci*

$$\lim_{n \to \infty} ||L_n(f) - f||_{\infty} = 0.$$

Convergența polinoamelor Lagrange

Teoremă

Fie $T = (x_{i,j})$ *o matrice triunghiulară infinită de noduri si* $f \in C^{\infty}[a,b]$. *Notăm cu* $M_{n+1} = \left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_{\infty}$. *Dacă pentru linia de noduri*

$$x_{n,0}, x_{n,1}, \ldots, x_{n,n}$$

considerăm polinomul de interpolare Lagrange

$$L_n(f)(x) := L_n(f; x_{n,0}, \ldots, x_{n,n})(x)$$

și dacă există $M > 0$, *a.î.,* $M_{n+1} \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left|L_n(f) - f\right|\right|_{\infty} = 0.$$

Observație. Condiția $M_{n+1} \leq M$ este esențială în obținerea rezultatului de convergență.

Convergența polinoamelor Lagrange

Teoremă

Fie $T = (x_{i,j})$ *o matrice triunghiulară infinită de noduri si* $f \in C^{\infty}[a,b]$. *Notăm cu* $M_{n+1} = \left|\left|f^{(n+1)}\right|\right|_{\infty}$. *Dacă pentru linia de noduri*

$$x_{n,0}, x_{n,1}, \ldots, x_{n,n}$$

considerăm polinomul de interpolare Lagrange

$$L_n(f)(x) := L_n(f; x_{n,0}, \ldots, x_{n,n})(x)$$

și dacă există $M > 0$, *a.î.*, $M_{n+1} \le M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *atunci*

$$\lim_{n \to \infty} ||L_n(f) - f||_{\infty} = 0.$$

Observație. Condiția $M_{n+1} \le M$ este esențială în obținerea rezultatului de convergență. Faber și Bernstein au arătat că pentru orice matrice triunghiulară de noduri, există o funcție continuă $f(x)$ pentru care polinoamele $L_n(f)$ diverg.

Interpolarea Hermite pe noduri duble

Fie $f \in C^1[a,b]$ și $x_0, ..., x_n$ noduri distincte în $[a,b]$. **Problema de interpolare Hermite** *constă în determinarea unui polinom $P \in \Pi_{2n+1}$, astfel încât:*

$$\begin{array}{rcl} P(x_k) & = & f(x_k) \\ P'(x_k) & = & f'(x_k),\ k = \overline{0,n}. \end{array}$$

Notație. Polinomul lui Hermite pe nodurile duble $x_0, ..., x_n$ se notează cu

$$H_{2n+1}(f)(x) \text{ sau } H_{2n+1}(f; x_0, ..., x_n)(x).$$

Căutăm polinomul de interpolare Hermite sub forma:

$$H_{2n+1}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x) + \sum_{k=0}^{n} f'(x_k) h_k(x), \tag{1}$$

unde $l_k, h_k \in \Pi_{2n+1}$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} l_i(x_k) & = & \delta_{i,k} \\ l_i'(x_k) & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{și} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} h_i(x_k) & = & 0 \\ h_i'(x_k) & = & \delta_{i,k} \end{array} \right.$$

Polinoamele fundamentale Hermite

Din condițiile de mai sus, avem

$$l_i(x) = \frac{l^2(x)}{(x-x_i)^2}\left[\frac{1}{l'^2(x_i)} + \frac{x_i l''(x_i)}{[l'(x_i)]^3} - x\frac{l''(x_i)}{[l'(x_i)]^3}\right]$$

Polinoamele fundamentale Hermite

Din condițiile de mai sus, avem

$$l_i(x) = \frac{l^2(x)}{(x-x_i)^2}\left[\frac{1}{l'^2(x_i)} + \frac{x_i l''(x_i)}{[l'(x_i)]^3} - x\frac{l''(x_i)}{[l'(x_i)]^3}\right]$$

$$h_i(x) = \frac{1}{l'^2(x_i)}\frac{l^2(x)}{x-x_i},\ i=\overline{0,n}.$$

Proprietăți:

1) Diferența divizată pe nodurile duble $x_0, ..., x_n$ se notează cu $[x_0, x_0, ..., x_n, x_n; f]$ și este egală cu coeficientul lui x^{2n+1} din $H_{2n+1}(f)(x)$.

Polinoamele fundamentale Hermite

Din condițiile de mai sus, avem

$$\begin{aligned} l_i(x) &= \frac{l^2(x)}{(x-x_i)^2}\left[\frac{1}{l'^2(x_i)} + \frac{x_i l''(x_i)}{[l'(x_i)]^3} - x\frac{l''(x_i)}{[l'(x_i)]^3}\right] \\ h_i(x) &= \frac{1}{l'^2(x_i)}\frac{l^2(x)}{x-x_i},\ i=\overline{0,n}. \end{aligned}$$

Proprietăți:

1) Diferența divizată pe nodurile duble $x_0, \ldots, x_n$ se notează cu $[x_0, x_0, \ldots, x_n, x_n; f]$ și este egală cu coeficientul lui x^{2n+1} din $H_{2n+1}(f)(x)$.
2) Restul în interpolarea Hermite:

$$f(x) - H_{2n+1}(f)(x) = l^2(x)[x_0, x_0, \ldots, x_n, x_n, x; f].$$