

Formule de cuadratură. Operatori de aproximare

Formule de cuadratură: cuadraturi de tip interpolator, cuadraturi Gauss.

Operatori de aproximare: noțiuni generale, operatori Bernstein, curbe Bezier.

1. Să se determine coeficienții și nodurile formulelor de cuadratură cu grad maxim de exactitate de forma:

(a)

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = Af(-1) + Bf(x_0) + Cf(1) + R(f).$$

(b)

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = A_0f(x_0) + A_1f(x_1) + A_2f(x_2) + R(f).$$

(c)

$$\int_a^b f(x)dx = Af(a) + Bf\left(\frac{a+b}{2}\right) + Cf(b) + R(f).$$

(d)

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)dx = A_0f(2) + A_1f(x_1) + R(f).$$

(e)

$$\int_1^\infty e^{-2x} f(x)dx = A_0f(x_0) + A_1f(x_1) + R(f).$$

(f)

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} f(x)dx = A_0f(x_0) + A_1f(x_1) + A_2f(x_2) + R(f).$$

2. Determinați coeficienți a, b, c, d astfel încât formula de cuadratură:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = af(-1) + bf(1) + cf'(-1) + df'(1) + R(f)$$

să aibă gradul de exactitate 3.

3. Să se arate că șirurile de operatori de mai sus sunt siruri de aproximare.

(a) $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $M_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ definiți prin

$$M_n(f)(x) = (n+1)(n+2) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \frac{\int_0^1 t f(t) p_{n,k}(t) dt}{k+1},$$

unde $p_{n,k}(t)$ sunt polinoamele fundamentale Bernstein.

(b) $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $K_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ definiți prin

$$K_n(f)(x) = (n+1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt,$$

unde $p_{n,k}(t)$ sunt polinoamele fundamentale Bernstein.

(c) $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $U_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ definiți prin

$$U_n(f)(x) = \frac{1}{3} B_n(f)(x) + \frac{2}{3} (n+1) \sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) \int_{\frac{k}{n+1}}^{\frac{k+1}{n+1}} f(t) dt.$$

4. Fie $p_{n,k}(x)$ polinoamele fundamentale Bernstein. Să se demonstreze următoarea relație de recurență:

$$p_{n,k}(x) = (1-x)p_{n-1,k}(x) + xp_{n-1,k-1}(x).$$

5. Să se calculeze $B_n(e_3)(x)$, unde $B_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ sunt operatorii Bernstein, iar $e_k(x) = x^k$.

6. Să se calculeze $B_n(f)(x)$ unde $f(x) = \cos(x)$.