Calcul Numeric

Prof. Bogdan Gavrea

ISA 2017-2018

Operatori de Aproximare

Operatori liniari și pozitivi

Definiție (Operator liniar și pozitiv)

Un operator $L : C[a,b] \to C[a,b]$ *se numește operator liniar și pozitiv dacă satisface următoarele proprietăți:*

i) **(liniaritate)** $L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in C[a,b]$.

ii) **(pozitivitate)** $L(f) \geq 0$, $\forall f \in C[a,b]$ *satisfăcând* $f \geq 0$.

Operatori liniari și pozitivi

Definiție (Operator liniar și pozitiv)

Un operator $L : C[a,b] \to C[a,b]$ se numește operator liniar și pozitiv dacă satisface următoarele proprietăți:

i) **(liniaritate)** $L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in C[a,b]$.

ii) **(pozitivitate)** $L(f) \geq 0$, $\forall f \in C[a,b]$ *satisfăcând* $f \geq 0$.

Exemple.

a) Fie $[a,b] = [0,1]$, $\Delta_n :\ 0 = x_0 < \ldots < x_n = 1$ o diviziune a intervalului $[0,1]$ și $f \in C[0,1]$. Spline-ul liniar de interpolare

$$s_{\Delta_n} : C[0,1] \to C[0,1]$$

este un operator liniar și pozitiv.

Operatori liniari și pozitivi

Definiție (Operator liniar și pozitiv)

Un operator $L : C[a,b] \to C[a,b]$ *se numește operator liniar și pozitiv dacă satisface următoarele proprietăți:*

i) **(liniaritate)** $L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in C[a,b]$.

ii) **(pozitivitate)** $L(f) \geq 0$, $\forall f \in C[a,b]$ *satisfăcând* $f \geq 0$.

Exemple.

a) Fie $[a,b] = [0,1]$, $\Delta_n : \; 0 = x_0 < \ldots < x_n = 1$ o diviziune a intervalului $[0,1]$ și $f \in C[0,1]$. Spline-ul liniar de interpolare

$$s_{\Delta_n} : C[0,1] \to C[0,1]$$

este un operator liniar și pozitiv.

b) Fie $L_1 : C[a,b] \to C[a,b]$,

$$L_1(f)(x) = \frac{x-a}{b-a} f(b) + \frac{b-x}{b-a} f(a)$$

polinomul Lagrange de gradul 1 ce interpolează funcția pe nodurile a, b. L_1 este un operator liniar și pozitiv.

Șiruri de operatori de aproximare

Definiție (Șir de aproximare)

Șirul $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ *se numește* **șir de aproximare** *dacă*

$$\lim_{n\to\infty} ||L_n(f) - f||_\infty = 0, \ \forall f \in C[a,b].$$

Remark. Vom folosi notația $L_n(f) \rightrightarrows f$ pentru convergența uniformă. above.

Teoremă (Popoviciu-Bohman-Korovkin)

Fie $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ *un șir de operatori* **liniari** *și* **pozitivi**. *Condiția necesară și suficientă pentru ca* $L_n(f) \rightrightarrows f$ *pentru orice* $f \in C[a,b]$ *este ca*

$$L_n(e_i) \rightrightarrows e_i, \ i = 0, 1, 2,$$

unde $e_i(x) = x^i$, $i \in \mathbb{N}$.

Operatori Bernstein

Definition (Polinoame fundamentale Bernstein)

Fie $n \in \mathbb{N}$. **Polinoamele fundamentale Bernstein** $p_{n,k}(x) \in \Pi_n$ sunt definite prin

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},\ k = 0, 1, ..., n.$$

Operatori Bernstein

Definition (Polinoame fundamentale Bernstein)

Fie $n \in \mathbb{N}$. **Polinoamele fundamentale Bernstein** $p_{n,k}(x) \in \Pi_n$ sunt definite prin

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \ k = 0, 1, ..., n.$$

Definiție (Operatorul Bernstein de ordin n)

Fie $n \in \mathbb{N}$. **Operatorul Bernstein de ordin (grad)** *n, $B_n : C[0,1] \to C[0,1]$ este definit prin:*

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Operatori Bernstein

Definition (Polinoame fundamentale Bernstein)

Fie $n \in \mathbb{N}$. **Polinoamele fundamentale Bernstein** $p_{n,k}(x) \in \Pi_n$ sunt definite prin

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},\ k = 0, 1, ..., n.$$

Definiție (Operatorul Bernstein de ordin n)

Fie $n \in \mathbb{N}$. **Operatorul Bernstein de ordin (grad)** n, $B_n : C[0,1] \to C[0,1]$ *este definit prin:*

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Teoremă (Convergența operatorilor Bernstein)

Șirul de operatori $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *este un șir de aproximare, liniar și pozitiv.*

Operatori Bernstein

Teoremă (Păstrarea monotoniei și convexității)

Fie $f \in C[0,1]$.

i) *Dacă* f *este monotonă pe* $[0,1]$, *atunci* $B_n(f)$, $n \geq 1$, *este o funcție monotonă și de aceeași monotonie cu* f *pe* $[0,1]$.

ii) *Dacă* f *este convexă (concavă) atunci funcția* $B_n(f)$, $n \geq 2$, *este convexă (concavă).*

Operatori Bernstein

Teoremă (Păstrarea monotoniei și convexității)

Fie $f \in C[0,1]$.

i) *Dacă* f *este monotonă pe* $[0,1]$, *atunci* $B_n(f)$, $n \geq 1$, *este o funcție monotonă și de aceeași monotonie cu* f *pe* $[0,1]$.

ii) *Dacă* f *este convexă (concavă) atunci funcția* $B_n(f)$, $n \geq 2$, *este convexă (concavă).*

Teoremă (Evaluarea polinoamelor în baza Bernstein)

Mulțimea $\{p_{n,k}\}_{k=\overline{0,n}}$ *formează o bază în* Π_n. *Ma precis, dacă* $P \in \Pi_n$, *atunci*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} p_{n,i}(x)\alpha_i(P),$$

$$\text{unde } \alpha_i(P) = \frac{1}{\binom{n}{i}} \sum_{k=0}^{i} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} \binom{n-k}{i-k}$$

Curbe Bezier

Definiție (Curbe Bezier)

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ *și* $M_0, ..., M_n$ *puncte distincte în* $\mathbb{R}^p$. *Curba definită prin*

$$B(t) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(t) M_k, \;\; t \in [0, 1]$$

se numește curba Bezier corespunzătoare sistemului de puncte $M_0, ..., M_p$.

Curbe Bezier

Definiție (Curbe Bezier)

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ *și* $M_0, ..., M_n$ *puncte distincte în* $\mathbb{R}^p$. *Curba definită prin*

$$B(t) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(t) M_k, \;\; t \in [0,1]$$

se numește curba Bezier corespunzătoare sistemului de puncte $M_0, ..., M_p$.

Observație. Punctele M_i se mai numesc și puncte de control.

Curbe Bezier

Definiție (Curbe Bezier)

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $M_0, ..., M_n$ puncte distincte în $\mathbb{R}^p$. Curba definită prin

$$B(t) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(t) M_k, \ \ t \in [0,1]$$

se numește curba Bezier corespunzătoare sistemului de puncte $M_0, ..., M_p$.

Observație. Punctele M_i se mai numesc și puncte de control.

Algoritmul Popoviciu-Casteljau. Curba Bezier $B(t)$ poate fi obtinută folosind următorul algoritm. Fie:

$$\begin{aligned} M_{0,i}(t) &= M_i, \ \ i = 0, ..., n \\ M_{r,i}(t) &= (1-t)M_{r-1,i}(t) + tM_{r-1,i+1}(t), \ \ r = 1, ..., n, \ \ i = 0, ..., n-r. \end{aligned}$$

B(t) se obține din $B(t) := M_{n,0}(t)$.