Calcul Numeric

Prof. Bogdan Gavrea

ISA 2017

Metode iterative pentru rezolvarea numerică a sistemelor liniare

Matrici diagonal dominante

Definiție

O matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ *se numește diagonal dominantă dacă*

$$|a_{ii}| > \sum_{j \ne i} |a_{ij}|$$

Exercițiu. Arătați că orice matrice diagonal dominantă este inversabilă.
Rezolvare. *Metoda: folosim faptul că* $(I - B)$ *inversabilă dacă* $||B|| < 1$*, unde* $||\cdot||$ *este o normă operator.*

- Din definiția matricii diagonal dominante avem $a_{ii} \ne 0$.

Matrici diagonal dominante

Definiție

O matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ *se numește* *diagonal dominantă* *dacă*

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Exercițiu. Arătați că orice matrice diagonal dominantă este inversabilă.
Rezolvare. *Metoda: folosim faptul că* $(I - B)$ *inversabilă dacă* $||B|| < 1$, *unde* $||\cdot||$ *este o normă operator.*

- Din definiția matricii diagonal dominante avem $a_{ii} \neq 0$.
- Rezultă că $D = diag(\{a_{11}, ..., a_{nn}\})$ este inversabilă.

Matrici diagonal dominante

Definiție

O matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ *se numește diagonal dominantă dacă*

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Exercițiu. Arătați că orice matrice diagonal dominantă este inversabilă.
Rezolvare. *Metoda: folosim faptul că* $(I - B)$ *inversabilă dacă* $||B|| < 1$, *unde* $||\cdot||$ *este o normă operator.*

- Din definiția matricii diagonal dominante avem $a_{ii} \neq 0$.
- Rezultă că $D = diag(\{a_{11}, ..., a_{nn}\})$ este inversabilă.
- Pentru a demonstra că A este inversabilă este necesar și suficient să arătăm că $D^{-1}A$ este inversabilă.

Matrici diagonal dominante

Definiție

O matrice $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ *se numește diagonal dominantă dacă*

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Exercițiu. Arătați că orice matrice diagonal dominantă este inversabilă.
Rezolvare. *Metoda: folosim faptul că* $(I - B)$ *inversabilă dacă* $||B|| < 1$, *unde* $||\cdot||$ *este o normă operator.*

- Din definiția matricii diagonal dominante avem $a_{ii} \neq 0$.
- Rezultă că $D = diag(\{a_{11}, ..., a_{nn}\})$ este inversabilă.
- Pentru a demonstra că A este inversabilă este necesar și suficient să arătăm că $D^{-1}A$ este inversabilă.
- Dar $D^{-1}A = I - B$ unde $||B||_\infty < 1$.

Metode iterative pentru rezolvarea sistemelor liniare

Fie $A \in \mathcal{M}_{n,,n}(\mathbb{R})$ și $b \in \mathbb{R}^n$. Presupunem ca sistemul liniar $Ax = b$ este rescris sub forma $x = Bx + c$, unde $B \in \mathcal{M}_{n,,n}(\mathbb{R})$ și $c \in \mathbb{R}^n$. Vom studia metode iterative de forma

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \ k = 1, 2, ..., \ \ x^{(0)} \text{ dat.} \tag{1}$$

Teoremă

Condiția necesară și suficientă pentru ca sistemul $x = Bx + c$ să aibă soluție unică și aceasta să fie limită șirului (1) este ca

$$\lim_{m \to \infty} B^m = 0. \tag{2}$$

Metode iterative pentru rezolvarea sistemelor liniare

Fie $A \in \mathcal{M}_{n,,n}(\mathbb{R})$ și $b \in \mathbb{R}^n$. Presupunem ca sistemul liniar $Ax = b$ este rescris sub forma $x = Bx + c$, unde $B \in \mathcal{M}_{n,,n}(\mathbb{R})$ și $c \in \mathbb{R}^n$. Vom studia metode iterative de forma

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \; k = 1, 2, ..., \;\; x^{(0)} \text{ dat.} \tag{1}$$

Teoremă

Condiția necesară și suficientă pentru ca sistemul $x = Bx + c$ să aibă soluție unică și aceasta să fie limită șirului (1) este ca

$$\lim_{m\to\infty} B^m = 0. \tag{2}$$

Observație. Dacă într-o anumită normă operator avem

$$||B|| \leq q < 1$$

atunci

$$\left|\left|x^{(k)} - x^*\right|\right| \leq \frac{q^k}{1-q}\left|\left|x^{(0)} - x^{(1)}\right|\right|.$$

Metode iterative

Metoda lui Jacobi. Considerăm descompunerea

$$A = L + D + U,$$

unde L este o matrice inferior triunghiulară, D este o matrice diagonală și U este o matrice superior triunghiulară.

Rescriem sistemul $Ax = b$ după cum urmează:

- $Dx + (L + U)x = b$;

Metode iterative

Metoda lui Jacobi. Considerăm descompunerea

$$A = L + D + U,$$

unde L este o matrice inferior triunghiulară, D este o matrice diagonală și U este o matrice superior triunghiulară.

Rescriem sistemul $Ax = b$ după cum urmează:

- $Dx + (L + U)x = b$;
- $Dx = -(L + U)x + b$;

Metode iterative

Metoda lui Jacobi. Considerăm descompunerea

$$A = L + D + U,$$

unde L este o matrice inferior triunghiulară, D este o matrice diagonală și U este o matrice superior triunghiulară.

Rescriem sistemul $Ax = b$ după cum urmează:

- $Dx + (L + U)x = b$;
- $Dx = -(L + U)x + b$;
- $x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$.

Jacobi: forma matricială

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b,$$

pentru $k = 0, 1, \ldots$.

Metode iterative

Metoda lui Jacobi. Considerăm descompunerea

$$A = L + D + U,$$

unde L este o matrice inferior triunghiulară, D este o matrice diagonală și U este o matrice superior triunghiulară.

Rescriem sistemul $Ax = b$ după cum urmează:

- $Dx + (L + U)x = b$;
- $Dx = -(L + U)x + b$;
- $x = -D^{-1}(L + U)x + D^{-1}b$.

Jacobi: forma matricială

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b,$$

pentru $k = 0, 1, \ldots$.

Jacobi: pe componente

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(k)} \right),$$

pentru $i = \overline{1, n}$, $k = 0, 1, \ldots$.

Metode iterative

Teoremă

Dacă matricea A este o matrice diagonal dominantă atunci sistemul $Ax = b$ are soluție unică și soluția este limita șirului generat de metoda lui Jacobi.

Metode iterative

Teoremă

Dacă matricea A este o matrice diagonal dominantă atunci sistemul $Ax = b$ are soluție unică și soluția este limita șirului generat de metoda lui Jacobi.

Metoda Gauss-Seidel Rescriem sistemul $Ax = b$ după cum urmează:

- $(L + D)x + Ux = b$,

Metode iterative

Teoremă

Dacă matricea A este o matrice diagonal dominantă atunci sistemul $Ax = b$ are soluție unică și soluția este limita șirului generat de metoda lui Jacobi.

Metoda Gauss-Seidel Rescriem sistemul $Ax = b$ după cum urmează:

- $(L + D)x + Ux = b$,
- $(L + D)x = b - Ux$,

Metode iterative

Teoremă

Dacă matricea A este o matrice diagonal dominantă atunci sistemul $Ax = b$ are soluție unică și soluția este limita șirului generat de metoda lui Jacobi.

Metoda Gauss-Seidel Rescriem sistemul $Ax = b$ după cum urmează:

- $(L + D)x + Ux = b$,
- $(L + D)x = b - Ux$,
- $x = (L + D)^{-1}(b - Ux)$.

Gauss-Seidel. Forma matricială:

$$x^{(k+1)} = (L + D)^{-1}(b - Ux^{(k)}) \text{ sau } (L + D)x^{(k+1)} = b - Ux^{(k)};$$

Gauss-Seidel "pe componente":

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right], \; i = \overline{1, n}, \; k = 0, 1, \ldots$$

Metode iterative

Teoremă

Dacă matricea $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ satisface condițiile

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| \le |a_{ii}|, \ \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \ i = \overline{1,n},$$

atunci șirul aproximațiilor succesive generat de metoda lui Gauss-Seidel converge la soluția sistemului liniar $Ax = b$.

Metoda $SOR(\omega)$. Fie $\omega \in (0,2)$. Rescriem sistemul $Ax = b$ după cum urmează:

- $\omega(L + D + U)x = \omega b$;

Metode iterative

Teoremă

Dacă matricea $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ *satisface condițiile*

$$\sum_{j \ne i} |a_{ij}| \le |a_{ii}|, \ \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \ i = \overline{1, n},$$

atunci șirul aproximațiilor succesive generat de metoda lui Gauss-Seidel converge la soluția sistemului liniar $Ax = b$.

Metoda $SOR(\omega)$**.** Fie $\omega \in (0, 2)$. Rescriem sistemul $Ax = b$ după cum urmează:

- $\omega(L + D + U)x = \omega b$;
- $(D + \omega L)x = \omega b + [(1 - \omega)D - \omega U]\, x$;

Metode iterative

Teoremă

Dacă matricea $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ *satisface condițiile*

$$\sum_{j \ne i} |a_{ij}| \le |a_{ii}|, \ \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \ i = \overline{1,n},$$

atunci șirul aproximațiilor succesive generat de metoda lui Gauss-Seidel converge la soluția sistemului liniar $Ax = b$.

Metoda $SOR(\omega)$**.** Fie $\omega \in (0,2)$. Rescriem sistemul $Ax = b$ după cum urmează:

- $\omega(L + D + U)x = \omega b$;
- $(D + \omega L)x = \omega b + [(1 - \omega)D - \omega U]\, x$;
- $(D + \omega L)x = \omega b - [(\omega - 1)D + \omega U]\, x$;

Metode iterative

Teoremă

Dacă matricea $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ *satisface condițiile*

$$\sum_{j \neq i} |a_{ij}| \le |a_{ii}|, \ \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \ i = \overline{1, n},$$

atunci șirul aproximațiilor succesive generat de metoda lui Gauss-Seidel converge la soluția sistemului liniar $Ax = b$.

Metoda $SOR(\omega)$**.** Fie $\omega \in (0, 2)$. Rescriem sistemul $Ax = b$ după cum urmează:

- $\omega(L + D + U)x = \omega b$;
- $(D + \omega L)x = \omega b + [(1 - \omega)D - \omega U]\, x$;
- $(D + \omega L)x = \omega b - [(\omega - 1)D + \omega U]\, x$;
- Metoda $SOR(\omega)$ devine:

$$x^{(k+1)} = -(D + \omega L)^{-1} [(\omega - 1)D + \omega U]\, x^{(k)} + \omega(D + \omega L)^{-1} b.$$