

Calcul Numeric

Prof. Bogdan Gavrea

ISA 2017

Spline-ul cubic de tip Hermite. Formule de cuadratură

Spline-ul cubic de tip Hermite

Fie $\Delta := \Delta_n : 0 = x_0 < \dots < x_n = 1$ o diviziune a intervalului $[0, 1]$ și $f \in C[0, 1]$.
Funcția $s_\Delta(f) := s_{\Delta_n}(f)$ se numește spline cubic de tip Hermite dacă este un spline de ordinul 3 și:

$$s_3(f)(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n} \quad (1)$$

$$s_3'(f)(x_i) = f'(x_i), \quad i = \overline{0, n} \quad (2)$$

Căutăm spline-ul sub forma

$$s_3(f)(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x)f(x_i) + \sum_{i=0}^n h_i(x)f'(x_i),$$

Spline-ul cubic de tip Hermite

Fie $\Delta := \Delta_n : 0 = x_0 < \dots < x_n = 1$ o diviziune a intervalului $[0, 1]$ și $f \in C[0, 1]$.

Funția $s_\Delta(f) := s_{\Delta_n}(f)$ se numește spline cubic de tip Hermite dacă este un spline de ordinul 3 și:

$$s_3(f)(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n} \quad (1)$$

$$s_3'(f)(x_i) = f'(x_i), \quad i = \overline{0, n} \quad (2)$$

Căutăm spline-ul sub forma

$$s_3(f)(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^n h_i(x) f'(x_i),$$

$$\begin{cases} l_i(x_k) = \delta_{i,k} \\ l_i'(x_k) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} h_i(x_k) = 0 \\ h_i'(x_k) = \delta_{i,k} \end{cases}$$

Spline-urile fundamentale

- Spline-urile $l_0(x)$ și $l_n(x)$

$$l_0(x) = \begin{cases} (x - x_1)^2 \left(\frac{2x}{x_1^3} + \frac{1}{x_1^2} \right), & x \in [0, x_1] \\ 0, & x > x_1. \end{cases}$$

$$l_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{n-1} \\ \frac{(x - x_{n-1})^2}{(1 - x_{n-1})^3} (-2x + 3 - x_{n-1}), & x \in [x_{n-1}, 1]. \end{cases}$$

- Spline-urile $l_i(x)$, $0 < i < n$.

$$l_i(x) = \begin{cases} \frac{3(x - x_{i-1})^2}{(x_i - x_{i-1})^2} - \frac{2(x - x_{i-1})^3}{(x_i - x_{i-1})^3}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{3(x - x_{i+1})^2}{(x_i - x_{i+1})^2} - \frac{2(x - x_{i+1})^3}{(x_i - x_{i+1})^3}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Spline-urile fundamentale

- Spline-urile $h_0(x)$ și $h_n(x)$

$$h_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_1^2} x(x - x_1)^2, & x \in [0, x_1] \\ 0, & x > x_1. \end{cases}$$

$$h_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{n-1} \\ \frac{1}{(1-x_{n-1})^2} (x - 1)(x - x_{n-1})^2, & x \in [x_{n-1}, 1]. \end{cases}$$

- Spline-urile $h_i(x)$, $0 < i < n$.

$$h_i(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{i-1})^2(x-x_i)}{(x_i-x_{i-1})^2}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{(x-x_{i+1})^2(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_i)^2}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Formule de cuadratură

Fie $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție cu proprietatea că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, există și este finită:

$$\int_a^b w(x)x^k dx.$$

Formule de cuadratură

Fie $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție cu proprietatea că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, există și este finită:

$$\int_a^b w(x)x^k dx.$$

Definiție

Fie $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{0, n}$ puncte distincte din intervalul $[a, b]$. Se numește formulă de cuadratură cu nodurile simple x_i , $i = \overline{0, n}$ o formulă de forma

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (3)$$

unde A_k sunt numere independente de funcția f .

Formule de cuadratură

Fie $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție cu proprietatea că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, există și este finită:

$$\int_a^b w(x)x^k dx.$$

Definiție

Fie $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{0, n}$ puncte distincte din intervalul $[a, b]$. Se numește formulă de cuadratură cu nodurile simple x_i , $i = \overline{0, n}$ o formulă de forma

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (3)$$

unde A_k sunt numere independente de funcția f .

Terminologie:

- A_k : coeficienții cuadraturii;

Formule de cuadratură

Fie $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție cu proprietatea că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, există și este finită:

$$\int_a^b w(x)x^k dx.$$

Definiție

Fie $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{0, n}$ puncte distincte din intervalul $[a, b]$. Se numește formulă de cuadratură cu nodurile simple x_i , $i = \overline{0, n}$ o formulă de forma

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (3)$$

unde A_k sunt numere independente de funcția f .

Terminologie:

- A_k : coeficienții cuadraturii;
- $R(f)$: restul cuadraturii;

Formule de cuadratură

Fie $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție cu proprietatea că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, există și este finită:

$$\int_a^b w(x)x^k dx.$$

Definiție

Fie $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{0, n}$ puncte distincte din intervalul $[a, b]$. Se numește formulă de cuadratură cu nodurile simple x_i , $i = \overline{0, n}$ o formulă de forma

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (3)$$

unde A_k sunt numere independente de funcția f .

Terminologie:

- A_k : coeficienții cuadraturii;
- $R(f)$: restul cuadraturii;
- Cuadratura (5) are **ordinul de exactitate** m dacă

$$R(x^k) = 0, k = 0, \dots, m \text{ și } R(x^{m+1}) \neq 0.$$

Formule de cuadratură de tip interpolator

Fie $L_n(f; x_0, \dots, x_n)$ polinomul de interpolare Lagrange al funcției f pe nodurile x_0, \dots, x_n ,

$$L_n(f; x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) f(x_k).$$

Formule de cuadratură de tip interpolator

Fie $L_n(f; x_0, \dots, x_n)$ polinomul de interpolare Lagrange al funcției f pe nodurile x_0, \dots, x_n ,

$$L_n(f; x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) f(x_k).$$

Formulele de cuadratură în care coeficienții A_k sunt dați de:

$$A_k = \int_a^b w(x) l_k(x) dx$$

se numesc **formule de cuadratură de tip interpolator**.

Formule de cuadratură de tip interpolator

Fie $L_n(f; x_0, \dots, x_n)$ polinomul de interpolare Lagrange al funcției f pe nodurile x_0, \dots, x_n ,

$$L_n(f; x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) f(x_k).$$

Formulele de cuadratură în care coeficienții A_k sunt dați de:

$$A_k = \int_a^b w(x) l_k(x) dx$$

se numesc **formule de cuadratură de tip interpolator**.

Gradul de exactitate:

Formule de cuadratură de tip interpolator

Fie $L_n(f; x_0, \dots, x_n)$ polinomul de interpolare Lagrange al funcției f pe nodurile x_0, \dots, x_n ,

$$L_n(f; x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) f(x_k).$$

Formulele de cuadratură în care coeficienții A_k sunt dați de:

$$A_k = \int_a^b w(x) l_k(x) dx$$

se numesc **formule de cuadratură de tip interpolator**.

Gradul de exactitate:

- O formulă de cuadratură de tip interpolator are gradul de exactitate m , $m \geq n$.

Formule de cuadratură de tip interpolator

Fie $L_n(f; x_0, \dots, x_n)$ polinomul de interpolare Lagrange al funcției f pe nodurile x_0, \dots, x_n ,

$$L_n(f; x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) f(x_k).$$

Formulele de cuadratură în care coeficienții A_k sunt dați de:

$$A_k = \int_a^b w(x) l_k(x) dx$$

se numesc **formule de cuadratură de tip interpolator**.

Gradul de exactitate:

- O formulă de cuadratură de tip interpolator are gradul de exactitate m , $m \geq n$.
- Dacă o formulă de cuadratură are gradul de exactitate $m \geq n$, atunci formula este de tip interpolator.

Formula dreptunghiului

Fie $w = 1$ și $n = 0$. Considerăm formule de cuadratura cu un singur nod, i.e.,

$$\int_a^b f(x) dx = A_0 f(x_0) + R(f). \quad (4)$$

Formula dreptunghiului

Fie $w = 1$ și $n = 0$. Considerăm formule de cuadratura cu un singur nod, i.e.,

$$\int_a^b f(x) dx = A_0 f(x_0) + R(f). \quad (4)$$

- Pt ca formula (4) să fie de tip interpolator trebuie ca gradul de exactitate să fie ≥ 0 ($n = 0$) $\Rightarrow A_0 = b - a$.

Formula dreptunghiului

Fie $w = 1$ și $n = 0$. Considerăm formule de cuadratura cu un singur nod, i.e.,

$$\int_a^b f(x) dx = A_0 f(x_0) + R(f). \quad (4)$$

- Pt ca formula (4) să fie de tip interpolator trebuie ca gradul de exactitate să fie ≥ 0 ($n = 0$) $\Rightarrow A_0 = b - a$.
- Se poate determina x_0 astfel încât gradul de exactitate să fie (\geq) 1?

Formula dreptunghiului

Fie $w = 1$ și $n = 0$. Considerăm formule de cuadratura cu un singur nod, i.e.,

$$\int_a^b f(x) dx = A_0 f(x_0) + R(f). \quad (4)$$

- Pt ca formula (4) să fie de tip interpolator trebuie ca gradul de exactitate să fie ≥ 0 ($n = 0$) $\Rightarrow A_0 = b - a$.
- Se poate determina x_0 astfel încât gradul de exactitate să fie (\geq) 1? Se obține $x_0 = (b + a)/2$ și se ajunge la formula dreptunghiului

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right) + R(f).$$

Formula dreptunghiului

Fie $w = 1$ și $n = 0$. Considerăm formule de cuadratura cu un singur nod, i.e.,

$$\int_a^b f(x) dx = A_0 f(x_0) + R(f). \quad (4)$$

- Pt ca formula (4) să fie de tip interpolator trebuie ca gradul de exactitate să fie ≥ 0 ($n = 0$) $\Rightarrow A_0 = b - a$.
- Se poate determina x_0 astfel încât gradul de exactitate să fie (\geq) 1? Se obține $x_0 = (b + a)/2$ și se ajunge la formula dreptunghiului

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f\left(\frac{a + b}{2}\right) + R(f).$$

- Restul în formula dreptunghiului este dat de

$$R(f) = \frac{f''(c)}{24} (b - a)^3,$$

unde $c = c(f) \in [a, b]$.

Formula repetată a dreptunghiului

- Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Considerăm nodurile echidistante

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad k = \overline{0, n}.$$

Formula repetată a dreptunghiului

- Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Considerăm nodurile echidistante

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad k = \overline{0, n}.$$

- Avem:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx.$$

Formula repetată a dreptunghiului

- Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Considerăm nodurile echidistante

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad k = \overline{0, n}.$$

- Avem:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx.$$

- Fie $f \in C^2[a, b]$. Pe fiecare interval $[x_k, x_{k+1}]$, aplicăm formula dreptunghiului și obținem:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \frac{b-a}{n} f\left(a + (2k+1) \frac{b-a}{2n}\right) + \frac{f''(c_k) (b-a)^3}{24 n^3},$$

unde $c_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$.

Formula repetată a dreptunghiului

- Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Considerăm nodurile echidistante

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad k = \overline{0, n}.$$

- Avem:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx.$$

- Fie $f \in C^2[a, b]$. Pe fiecare interval $[x_k, x_{k+1}]$, aplicăm formula dreptunghiului și obținem:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \frac{b-a}{n} f\left(a + (2k+1) \frac{b-a}{2n}\right) + \frac{f''(c_k) (b-a)^3}{24 n^3},$$

unde $c_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$.

- **Formula repetată a dreptunghiului**, $f \in C^2[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (2k+1) \frac{b-a}{2n}\right) + \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(c_n).$$

Formula trapezului. Formula repetată a trapezului.

- Fie $f \in C^2[a, b]$. Formula trapezului se obține din aproximarea funcției $f(x)$ cu polinomul Lagrange de interpolare $L_1(f; a, b)(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] + R(f).$$

Formula trapezului. Formula repetată a trapezului.

- Fie $f \in C^2[a, b]$. Formula trapezului se obține din aproximarea funcției $f(x)$ cu polinomul Lagrange de interpolare $L_1(f; a, b)(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] + R(f).$$

- Din interpolarea Lagrange, avem:

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b (x-a)(x-b)[a, b, x; f]dx = - \int_a^b (x-a)(b-x)[a, b, x; f]dx \\ &= -[a, b, c; f] \int_a^b (x-a)(b-x)dx, \text{ unde } c \in [a, b]. \end{aligned}$$

Formula trapezului. Formula repetată a trapezului.

- Fie $f \in C^2[a, b]$. Formula trapezului se obține din aproximarea funcției $f(x)$ cu polinomul Lagrange de interpolare $L_1(f; a, b)(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] + R(f).$$

- Din interpolarea Lagrange, avem:

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b (x-a)(x-b)[a, b, x; f]dx = - \int_a^b (x-a)(b-x)[a, b, x; f]dx \\ &= -[a, b, c; f] \int_a^b (x-a)(b-x)dx, \text{ unde } c \in [a, b]. \end{aligned}$$

- Folosind formula de medie pentru diferențe divizate, obținem **formula trapezului**:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12}f''(\theta).$$

Formula trapezului. Formula repetată a trapezului.

- Fie $f \in C^2[a, b]$. Formula trapezului se obține din aproximarea funcției $f(x)$ cu polinomul Lagrange de interpolare $L_1(f; a, b)(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] + R(f).$$

- Din interpolarea Lagrange, avem:

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b (x-a)(x-b)[a, b, x; f]dx = - \int_a^b (x-a)(b-x)[a, b, x; f]dx \\ &= -[a, b, c; f] \int_a^b (x-a)(b-x)dx, \text{ unde } c \in [a, b]. \end{aligned}$$

- Folosind formula de medie pentru diferențe divizate, obținem **formula trapezului**:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12}f''(\theta).$$

- Formula repetată a trapezului ($x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $k = \overline{0, n}$):

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n} \left[f(a) + 2 \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right] - \frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c).$$

Grad maxim de exactitate. Formule de tip Gauss.

- Considerăm formule de cuadratură de forma:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (5)$$

unde x_k , $k = \overline{0, n}$ sunt noduri distincte. Pentru n fixat, **gradul maxim de exactitate** este $2n + 1$.

Grad maxim de exactitate. Formule de tip Gauss.

- Considerăm formule de cuadratură de forma:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (5)$$

unde $x_k, k = \overline{0, n}$ sunt noduri distincte. Pentru n fixat, **gradul maxim de exactitate** este $2n + 1$.

- Formulele de cuadratură cu grad maxim de exactitate se numesc **formule de cuadratură de tip Gauss**.

Grad maxim de exactitate. Formule de tip Gauss.

- Considerăm formule de cuadratură de forma:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (5)$$

unde x_k , $k = \overline{0, n}$ sunt noduri distincte. Pentru n fixat, **gradul maxim de exactitate** este $2n + 1$.

- Formulele de cuadratură cu grad maxim de exactitate se numesc **formule de cuadratură de tip Gauss**. Exemplu: formula dreptunghiului este o formulă de cuadratură de tip Gauss ($n = 0$, grad de exactitate = 1).

Grad maxim de exactitate. Formule de tip Gauss.

- Considerăm formule de cuadratură de forma:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (5)$$

unde $x_k, k = \overline{0, n}$ sunt noduri distincte. Pentru n fixat, **gradul maxim de exactitate** este $2n + 1$.

- Formulele de cuadratură cu grad maxim de exactitate se numesc **formule de cuadratură de tip Gauss**. Exemplu: formula dreptunghiului este o formulă de cuadratură de tip Gauss ($n = 0$, grad de exactitate = 1).
- Formulele de cuadratură de tip Gauss fiind formule de tip interpolator este suficient să determinăm nodurile $x_k, k = \overline{0, n}$.

Grad maxim de exactitate. Formule de tip Gauss.

- Considerăm formule de cuadratură de forma:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (5)$$

unde $x_k, k = \overline{0, n}$ sunt noduri distincte. Pentru n fixat, **gradul maxim de exactitate** este $2n + 1$.

- Formulele de cuadratură cu grad maxim de exactitate se numesc **formule de cuadratură de tip Gauss**. Exemplu: formula dreptunghiului este o formulă de cuadratură de tip Gauss ($n = 0$, grad de exactitate = 1).
- Formulele de cuadratură de tip Gauss fiind formule de tip interpolator este suficient să determinăm nodurile $x_k, k = \overline{0, n}$.
- Vom determina nodurile cuadraturilor de tip Gauss ca fiind rădăcinile polinoamelor ortogonale corespunzătoare.

Grad maxim de exactitate. Formule de tip Gauss.

- Considerăm formule de cuadratură de forma:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^n A_k f(x_k) + R(f), \quad (5)$$

unde x_k , $k = \overline{0, n}$ sunt noduri distincte. Pentru n fixat, **gradul maxim de exactitate** este $2n + 1$.

- Formulele de cuadratură cu grad maxim de exactitate se numesc **formule de cuadratură de tip Gauss**. Exemplu: formula dreptunghiului este o formulă de cuadratură de tip Gauss ($n = 0$, grad de exactitate = 1).
- Formulele de cuadratură de tip Gauss fiind formule de tip interpolator este suficient să determinăm nodurile x_k , $k = \overline{0, n}$.
- Vom determina nodurile cuadraturilor de tip Gauss ca fiind rădăcinile polinoamelor ortogonale corespunzătoare. **Observație.** Pe mulțimea $C[a, b]$ introducem produsul scalar definit prin:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx, \quad f, g \in C[a, b].$$

Polinoame ortogonale

Definiție

Fie $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$. Se numește polinom ortogonal de grad $n + 1$ relativ la ponderea w un polinom $P \in P_{n+1}$ cu proprietatea

$$\int_a^b w(x)x^k P(x)dx = 0, \quad k = \overline{0, n}.$$

Polinoame ortogonale

Definiție

Fie $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$. Se numește *polinom ortogonal de grad $n + 1$ relativ la ponderea w* un polinom $P \in \Pi_{n+1}$ cu proprietatea

$$\int_a^b w(x)x^k P(x)dx = 0, \quad k = \overline{0, n}.$$

Teoremă

Fie $P \in \Pi_{n+1}$ un polinom ortogonal de grad efectiv $n + 1$ relativ la ponderea $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci P are toate rădăcinile reale și distincte situate în (a, b) .

Demonstrație (sketch). P fiind polinom ortogonal de grad $n + 1$, avem

$$\int_a^b w(x)P(x)dx = 0,$$

deci $P(x)$ schimbă cel puțin odată semnul în (a, b) .

Polinoame ortogonale

Definiție

Fie $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$. Se numește polinom ortogonal de grad $n + 1$ relativ la ponderea w un polinom $P \in \Pi_{n+1}$ cu proprietatea

$$\int_a^b w(x)x^k P(x)dx = 0, \quad k = \overline{0, n}.$$

Teoremă

Fie $P \in \Pi_{n+1}$ un polinom ortogonal de grad efectiv $n + 1$ relativ la ponderea $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci P are toate rădăcinile reale și distincte situate în (a, b) .

Demonstrație (sketch). P fiind polinom ortogonal de grad $n + 1$, avem

$$\int_a^b w(x)P(x)dx = 0,$$

deci $P(x)$ schimbă cel puțin odată semnul în (a, b) . Fie $x_0, \dots, x_k \in (a, b)$ punctele în care $P(x)$ schimbă semnul.

Polinoame ortogonale

Definiție

Fie $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$. Se numește polinom ortogonal de grad $n + 1$ relativ la ponderea w un polinom $P \in \Pi_{n+1}$ cu proprietatea

$$\int_a^b w(x)x^k P(x)dx = 0, \quad k = \overline{0, n}.$$

Teoremă

Fie $P \in \Pi_{n+1}$ un polinom ortogonal de grad efectiv $n + 1$ relativ la ponderea $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci P are toate rădăcinile reale și distincte situate în (a, b) .

Demonstrație (sketch). P fiind polinom ortogonal de grad $n + 1$, avem

$$\int_a^b w(x)P(x)dx = 0,$$

deci $P(x)$ schimbă cel puțin odata semnul în (a, b) . Fie $x_0, \dots, x_k \in (a, b)$ punctele în care $P(x)$ schimbă semnul. Dacă $k = n$ teorema este demonstrată.

Polinoame ortogonale

Definiție

Fie $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$. Se numește polinom ortogonal de grad $n + 1$ relativ la ponderea w un polinom $P \in \Pi_{n+1}$ cu proprietatea

$$\int_a^b w(x)x^k P(x)dx = 0, \quad k = \overline{0, n}.$$

Teoremă

Fie $P \in \Pi_{n+1}$ un polinom ortogonal de grad efectiv $n + 1$ relativ la ponderea $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci P are toate rădăcinile reale și distincte situate în (a, b) .

Demonstrație (sketch). P fiind polinom ortogonal de grad $n + 1$, avem

$$\int_a^b w(x)P(x)dx = 0,$$

deci $P(x)$ schimbă cel puțin odată semnul în (a, b) . Fie $x_0, \dots, x_k \in (a, b)$ punctele în care $P(x)$ schimbă semnul. Dacă $k = n$ teorema este demonstrată. Se presupune că $k \leq n - 1$ și se ajunge la contradicție cu condiția de ortogonalitate asupra lui $P(x)$.

Polinoame ortogonale

Teoremă

Două polinoame ortogonale de grad $n + 1$ în raport cu ponderea $w(x)$ au aceleași rădăcini.

Demonstrație (sketch) Presupunem că P și Q sunt polinoame ortogonale de grad $n + 1$ relativ la ponderea $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

Polinoame ortogonale

Teoremă

Două polinoame ortogonale de grad $n + 1$ în raport cu ponderea $w(x)$ au aceleași rădăcini.

Demonstrație (sketch) Presupunem că P și Q sunt polinoame ortogonale de grad $n + 1$ relativ la ponderea $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Fie

$$\alpha = \text{coeff}_{x^{n+1}} P(x) \text{ și } \beta = \text{coeff}_{x^{n+1}} Q(x).$$

Polinoame ortogonale

Teoremă

Două polinoame ortogonale de grad $n + 1$ în raport cu ponderea $w(x)$ au aceleași rădăcini.

Demonstrație (sketch) Presupunem că P și Q sunt polinoame ortogonale de grad $n + 1$ relativ la ponderea $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Fie

$$\alpha = \text{coeff}_{x^{n+1}} P(x) \text{ și } \beta = \text{coeff}_{x^{n+1}} Q(x).$$

Fie $R(x) = \beta P(x) - \alpha Q(x) \in \Pi_n$.

Polinoame ortogonale

Teoremă

Două polinoame ortogonale de grad $n + 1$ în raport cu ponderea $w(x)$ au aceleași rădăcini.

Demonstrație (sketch) Presupunem că P și Q sunt polinoame ortogonale de grad $n + 1$ relativ la ponderea $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Fie

$$\alpha = \text{coeff}_{x^{n+1}} P(x) \text{ și } \beta = \text{coeff}_{x^{n+1}} Q(x).$$

Fie $R(x) = \beta P(x) - \alpha Q(x) \in \Pi_n$. Pe de altă parte avem

$$\int_a^b w(x) x^k R(x) dx = 0, \quad k = \overline{0, n}$$

Polinoame ortogonale

Teoremă

Două polinoame ortogonale de grad $n + 1$ în raport cu ponderea $w(x)$ au aceleași rădăcini.

Demonstrație (sketch) Presupunem că P și Q sunt polinoame ortogonale de grad $n + 1$ relativ la ponderea $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Fie

$$\alpha = \text{coeff}_{x^{n+1}} P(x) \text{ și } \beta = \text{coeff}_{x^{n+1}} Q(x).$$

Fie $R(x) = \beta P(x) - \alpha Q(x) \in \Pi_n$. Pe de altă parte avem

$$\int_a^b w(x) x^k R(x) dx = 0, \quad k = \overline{0, n}$$

Din relația de mai sus avem: $R(x) = 0$ adică $\beta P(x) = \alpha Q(x)$.

Polinoame ortogonale clasice

- i) **Polinoamele Legendre.** Fie $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $w(x) = 1$. Atunci polinoamele ortogonale de grad $n + 1$ (numite polinoamele Legendre) au forma:

$$P_{n+1}(x) = k \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[(x - a)^{n+1} (b - x)^{n+1} \right].$$

Polinoame ortogonale clasice

- i) **Polinoamele Legendre.** Fie $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $w(x) = 1$. Atunci polinoamele ortogonale de grad $n + 1$ (numite polinoamele Legendre) au forma:

$$P_{n+1}(x) = k \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[(x - a)^{n+1} (b - x)^{n+1} \right].$$

- ii) **Polinoamele Jacobi.** Fie $\alpha, \beta > -1$, $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $w(x) = (x - a)^\alpha (b - x)^\beta$. Polinoamele de grad $n + 1$, ortogonale în raport cu ponderea w se numesc polinoamele Jacobi și au forma:

$$J_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) = k (x - a)^{-\alpha} (b - x)^{-\beta} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[(x - a)^{\alpha+n+1} (b - x)^{\beta+n+1} \right].$$

În cazul particular $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, $[a, b] = [-1, 1]$, polinoamele corespunzătoare poartă numele de polinoame Chebysev de prima speță și sunt date de

$$T_{n+1}(x) = k \cos[(n + 1)\arccos x].$$

Polinoame ortogonale clasice

- iii) **Polinoamele Laguerre.** Fie $w : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $w(x) = e^{-x}$. Polinoamele de grad $n + 1$ ortogonale relativ la ponderea w se numesc polinoame Laguerre și au forma

$$L_{n+1}(x) = ke^x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} [x^{n+1} e^{-x}].$$

Polinoame ortogonale clasice

- iii) **Polinoamele Laguerre.** Fie $w : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $w(x) = e^{-x}$. Polinoamele de grad $n + 1$ ortogonale relativ la ponderea w se numesc polinoame Laguerre și au forma

$$L_{n+1}(x) = ke^x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[x^{n+1} e^{-x} \right].$$

- iv) **Polinoamele Hermite.** Fie $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $w(x) = e^{-x^2}$. Polinoamele de grad $n + 1$ ortogonale relativ la ponderea w se numesc polinoame Hermite și au forma

$$H_{n+1}(x) = ke^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[e^{-x^2} \right].$$