Metode iterative pentru sisteme liniare.
Rezolvarea numerică a ecuaţiilor neliniare.
Ultima actualizare: 22/10/2017

1. Se consideră sistemul liniar $Ax = b$, unde :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \text{ şi } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   (a) Este matricea A (strict) diagonal dominantă?.
   (b) Satisface matricea A condiţiile din teorema de convergenţă pentru metoda Gauss-Seidel?
   (c) Analizaţi convergenţa iteraţiilor atât pentru metoda lui Jacobi, cât şi pentru Gauss-Seidel. (*Indicaţie: Pentru fiecare metodă rescrieţi iteraţiile sub forma* $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ *si analizaţi razele spectrale ale matricii corespunzatoare metodei Jacobi* B_J*, respectiv a metodei Gauss-Seidel* B_{GS}).

2. Se consideră iteraţiile

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, x^{(0)} \text{ dat.}$$

   Presupunem că există norma operator $||\cdot||$, astfel încât $||B|| < 1$. Să se arate că

$$\left|\left|x^{(k)} - x^*\right|\right| \leq \frac{||B||^k}{1 - ||B||} \left|\left|x^{(1)} - x^{(0)}\right|\right|,$$

   unde x^* este soluţia sistemului liniar $x = Bx + c$.

3. Se consideră sistemul liniar:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = -5 \end{cases}$$

   (a) Să se determine soluţia sistemului folosind transformări elementare.
   (b) Să se determine dacă metoda lui Jacobi converge pentru orice $x^{(0)}$.
   (c) Să se determine dacă metoda Gauss-Seidel converge pentru orice $x^{(0)}$.
   (d) Să se analizeze primele 20 de iteraţii (computer use) pentru fiecare metodă în cazul în care se porneşte cu $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$.

4. Se consideră sistemul liniar:

$$\begin{cases} 4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 5 \\ -x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \end{cases}$$

Calculaţi primele două iteraţii ale metodei $SOR(\omega)$ dacă $\omega = \frac{5}{4}$ şi $x^{(0)} = (0,0,0)^T$.

5. Ecuaţia $x^2 - 5 = 0$ poate fi rescrisă sub forma $x = g_c(x)$ unde

$$g_c(x) = x + c(x^2 - 5).$$

Consideraţi şirul (x_n) generat prin

$$x_{n+1} = g_c(x_n),\ x_0 \text{ dat},\ n = 0, 1, ...$$

Determinaţi un interval (a, b) astfel încât pentru orice $c \in (a, b)$ să puteţi garanta convergenţa şirului x_n. Pentru ce valoare (valori) ale lui c convergenţa va fi mai rapidă?

6. Se consideră ecuaţia

$$x = g(x)$$

unde $g(x)$ este o funcţie de clasă C^1 şi α este o rădăcină astfel încât $\alpha = g(\alpha)$ şi $0 < |g'(\alpha)| < 1$. Considerăm şirul aproximaţiilor succesive,

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

şi definim

$$\lambda_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}.$$

Calculaţi

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n.$$