Norme de matrici. Numere de conditionare.
Ultima actualizare: 29/09/2017

1. Fie $x \in \mathbb{R}^n$. Să se arate că:
   (a) $||x||_2 \leq ||x||_1 \leq \sqrt{n}\, ||x||_2$.
   (b) $||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}\, ||x||_\infty$.
   (c) $||x||_\infty \leq ||x||_1 \leq n\, ||x||_\infty$.

2. Fie $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ o matrice din $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ şi

$$||A||_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2}$$

   norma Frobenius a matricii A. Demonstraţi următoarele inegalităţi:
   (a) $||A||_2 \leq ||A||_F \leq \sqrt{n}||A||_2$,
   (b) $\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_\infty \leq ||A||_2 \leq \sqrt{n}||A||_\infty$,
   (c) $\frac{1}{\sqrt{n}}||A||_1 \leq ||A||_2 \leq \sqrt{n}||A||_1$,

3. Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $p > 1$ şi B o submatrice a lui A. Arătaţi că

$$||B||_p \leq ||A||_p$$

4. Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Să se arate că

$$||A||_2 \leq \sqrt{||A||_1 ||A||_\infty}.$$

5. Fie $A \in \mathcal{M}(n,n)(\mathbb{R})$ o matrice antisimetrică, i.e., $A = -A^T$. Demonstraţi următoarele afirmaţii:
   (a) Matricea $I - A$ este o matrice inversabilă.
   (b) Matricea $B = (I-A)^{-1}(I+A)$ este o matrice ortogonală. Mai precis, arătaţi că $B^T B = I$.
   (c) Calculaţi $||Bv||_2$, unde $v \in \mathbb{R}^n$, $v = (1, ..., 1)^T$.

6. Fie A o matrice triunghiulară astfel încât $A^T A = I$. Arătaţi că A este o matrice diagonală.

7. Fie $A,\ P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ astfel încât A este inversabilă şi

$$q := \left|\left|A^{-1}P\right|\right|_2 < 1.$$

   (a) Arătaţi că $(A+P)$ este inversabilă.

   (b) Demonstraţi următoarea inegalitate:

$$\left|\left|(A+P)^{-1} - A^{-1}\right|\right|_2 \leq \frac{||P||_2 \left|\left|A^{-1}\right|\right|_2^2}{1-q}$$

8. Fie $A,\ Q,\ R \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ astfel încât $Q^T Q = I$ şi $R^T R = I$. Arătaţi că:

   (a) $||QAR||_2 = ||A||_2$.

   (b) $||QAR||_F = ||A||_F$.

9. Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Arătaţi că

$$||A||_F^2 = trace(A^* A)$$

10. Fie $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ două matrici inversabile. Arătaţi că:

$$B^{-1} = A^{-1} - B^{-1}(B-A)A^{-1}.$$

11. Se consideră sistemul liniar

$$\begin{pmatrix} 1 & 10^4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   (a) Să se calculeze numărul de condiţionare în norma 1, $\mathcal{K}_1$ a matricii de mai sus. Concluziţionaţi că sistemul liniar de mai sus este prost condiţionat.

   (b) Înmulţiţi una din ecuaţiile de mai sus printr-o constantă astfel încât problema rezultată să fie mai bine condiţionată.