

Ecuatii diferențiale. Interpolare.

Metode numerice pentru ecuații diferențiale.

Interpolare polinomială: Lagrange, Hermite pe noduri duble.

Interpolare spline: spline liniar, spline cubic de tip Hermite.

1. Se consideră problema Cauchy

$$\begin{cases} y' &= 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

Folosiți metoda dezvoltării în serie de puteri pentru a determina coeficienții puterilor x^0, x^1, \dots, x^5 din dezvoltarea soluției $y(x)$.

2. Să se determine metodele Runge-Kutta de ordin 3.
3. Să se calculeze:

$$[0, 1, 2, \dots, 100; 5x^{102} + 2015].$$

4. Să se calculeze $[1, 2, 3, 4, 5; f]$, unde

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6)x^{2013} - 5 \sin(\pi x).$$

5. Se consideră problema Cauchy,

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

și metoda numerică

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [3f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1})], \quad n = 1, 2, \dots$$

Determinați eroarea de trunchiere a metodei de mai sus.

6. Să se determine α și β astfel încât ordinul erorii de trunchiere al metodei

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\beta f(t_n, y_n) + \frac{3}{4} f \left(t_n + \alpha h, y_n + \frac{2}{3} h f(t_n, y_n) \right) \right)$$

să fie 3.

7. Polinomul de interpolare Hermite pe nodurile duble a, b se poate da sub forma

$$\begin{aligned} H_3(f)(x) := H_3(f; a, a, b, b)(x) &= \left(1 + 2\frac{x-a}{b-a}\right) \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 \cdot f(a) \\ &+ \left(1 + 2\frac{b-x}{b-a}\right) \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 \cdot f(b) \\ &+ \frac{(x-a)(b-x)^2}{(b-a)^2} f'(a) \\ &- \frac{(x-a)^2(b-x)}{(b-a)^2} f'(b). \end{aligned}$$

- (a) Verificați că polinomul de mai sus este polinomul de interpolare Hermite pe nodurile duble a și b .
 (b) Arătați că

$$\begin{aligned} H_3(f)(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2[a, a, b; f] \\ &+ (x-a)^2(x-b)[a, a, b, b; f]. \end{aligned} \quad (1)$$

8. Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, Δ o diviziune a intervalului $[0, 1]$ și $s_\Delta(f)$ spline-ul liniar de interpolare a lui f relativ la diviziunea Δ . Să se calculeze:

$$(s_\Delta \circ \dots \circ s_\Delta)(f).$$

9. Fie x_0, \dots, x_n noduri distincte. Considerăm funcții de interpolare de forma

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k e^{kx}.$$

Să se arate că există c_0, \dots, c_n unic determinați astfel încât

$$G_n(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n},$$

oricare ar fi numerele reale y_0, \dots, y_n .

10. Să se determine spline-ul liniar de interpolare $s_\Delta(f)$, dacă

$$f(x) = 5 \left| x - \frac{3}{4} \right| + 15 \left| x - \frac{1}{3} \right| + 3x + 1$$

și $\Delta = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$.

11. Dacă $f \in C^4[0, 1]$ să se calculeze o estimare a restului în interpolarea prin spline-uri cubice de tip Hermite.

12. Fie $s_{\Delta}(f)$ spline-ul liniar de interpolare pentru funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, relativ la diviziunea Δ . Să se arate că:

$$s_{\Delta}(f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2} [x_{k-1}, x_k, x_{k+1}; |t - x|]_t f(x_k),$$

unde notația $[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}; |t - x|]_t$ indică faptul că diferența divizată acționează asupra variabilei t .

13. Arătați că polinomul de interpolare Lagrange pentru datele de mai jos are gradul 3:

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	1	4	11	16	13	-4

14. Următoarele informații corespund unui polinom $P(x)$ de grad necunoscut.

x	0	1	2
$P(x)$	2	-1	4

Să se determine coeficientul lui x^2 din $P(x)$ dacă diferența divizată pe oricare patru puncte distincte este egală cu 1.