

Norme de matrici. Numere de conditionare.
Ultima actualizare: 21/02/2021

1. Fie $x \in \mathbb{R}^n$. Să se arate că:

- (a) $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$.
- (b) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$.
- (c) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$.

2. Fie $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ o matrice din $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ și

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2}$$

norma Frobenius a matricii A . Demonstrați următoarele inegalități:

- (a) $\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2$,
- (b) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty$,
- (c) $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$,

3. Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, $p > 1$ și B o submatrice a lui A . Arătați că

$$\|B\|_p \leq \|A\|_p$$

4. Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Să se arate că

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}.$$

5. Fie $A \in \mathcal{M}(n, n)(\mathbb{R})$ o matrice antisimetrică, i.e., $A = -A^T$. Demonstrați următoarele afirmații:

- (a) Matricea $I - A$ este o matrice inversabilă.
- (b) Matricea $B = (I - A)^{-1}(I + A)$ este o matrice ortogonală. Mai precis, arătați că $B^T B = I$.
- (c) Calculați $\|Bv\|_2$, unde $v \in \mathbb{R}^n$, $v = (1, \dots, 1)^T$.

6. Fie A o matrice triunghiulară astfel încât $A^T A = I$. Arătați că A este o matrice diagonală.

7. Fie $A, P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ astfel încât A este inversabilă și

$$q := \|A^{-1}P\|_2 < 1.$$

- (a) Arătați că $(A + P)$ este inversabilă.
- (b) Demonstrați următoarea inegalitate:

$$\|(A + P)^{-1} - A^{-1}\|_2 \leq \frac{\|P\|_2 \|A^{-1}\|_2^2}{1 - q}$$

8. Fie $A, Q, R \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ astfel încât $Q^T Q = I$ și $R^T R = I$. Arătați că:

- (a) $\|QAR\|_2 = \|A\|_2$.
- (b) $\|QAR\|_F = \|A\|_F$.

9. Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Arătați că

$$\|A\|_F^2 = \text{trace}(A^* A)$$

10. Fie $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ două matrici inversabile. Arătați că:

$$B^{-1} = A^{-1} - B^{-1}(B - A)A^{-1}.$$

11. Se consideră sistemul liniar

$$\begin{pmatrix} 1 & 10^4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (a) Să se calculeze numărul de condiționare în norma 1, \mathcal{K}_1 a matricii de mai sus. Concluzionați că sistemul liniar de mai sus este prost condiționat.
- (b) Înmulțiți una din ecuațiile de mai sus printr-o constantă astfel încât problema rezultată să fie mai bine condiționată.