

Metode Numerice

Prof. Bogdan Gavrea

CTI 2021

Norme de vectori. Norme de matrici.

Norme de vector, norme operator pe spațiul matricilor

Definiție

Fie V un spațiu vectorial. O funcție $\|\cdot\|$ se numește **normă** dacă

- i) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in V$ și $\|x\| = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$;
- ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ pentru orice $x \in V$ și $\alpha \in K$, ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$);
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pentru orice $x, y \in V$.

Norme de vector, norme operator pe spațiul matricilor

Definiție

Fie V un spațiu vectorial. O funcție $\|\cdot\|$ se numește **normă** dacă

- i) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in V$ și $\|x\| = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$;
- ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ pentru orice $x \in V$ și $\alpha \in K$, ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$);
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pentru orice $x, y \in V$.

Exemple ($V = \mathbb{C}^n$)

- a) $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$;
- b) $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Norme de vector, norme operator pe spațiul matricilor

Definiție

Fie V un spațiu vectorial. O funcție $\|\cdot\|$ se numește **normă** dacă

- i) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in V$ și $\|x\| = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$;
- ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ pentru orice $x \in V$ și $\alpha \in K$, ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$);
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pentru orice $x, y \in V$.

Exemple ($V = \mathbb{C}^n$)

- a) $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$, $p \geq 1$;
- b) $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Exercițiu: Desenați bilele unitate din \mathbb{R}^2 pentru $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ și $\|\cdot\|_1$.

Norme de vector, norme operator pe spațiul matricilor

Definiție

Fie V un spațiu vectorial. O funcție $\|\cdot\|$ se numește **normă** dacă

- i) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in V$ și $\|x\| = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$;
- ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ pentru orice $x \in V$ și $\alpha \in K$, ($K = \mathbb{R}$ sau $K = \mathbb{C}$);
- iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pentru orice $x, y \in V$.

Exemple ($V = \mathbb{C}^n$)

- a) $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$, $p \geq 1$;
- b) $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Exercițiu: Desenați bilele unitate din \mathbb{R}^2 pentru $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ și $\|\cdot\|_1$.

Definiție

Fie $\|\cdot\|_v$ o normă pe \mathbb{C}^n . **Norma operator** pe $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ corespunzătoare normei vectoriale $\|\cdot\|_v$ este dată de

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \max_{\|x\|_v=1} \|Ax\|_v, \forall A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}).$$

Notație $\|A\|_v := \|A\|$.

Proprietăți ale normei operator

Inegalități. Fie $\|\cdot\| := \|\cdot\|_v$ o normă operator pe $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Atunci:

- a) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$;
- b) $\|Ax\|_v \leq \|A\|_v \|x\|_v$.

Proprietăți ale normei operator

Inegalități. Fie $\|\cdot\| := \|\cdot\|_v$ o normă operator pe $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Atunci:

a) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$;

b) $\|Ax\|_v \leq \|A\|_v \|x\|_v$.

Spectrul unei matrici $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ val. proprie pt } A\}.$$

Proprietăți ale normei operator

Inegalități. Fie $\|\cdot\| := \|\cdot\|_v$ o normă operator pe $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Atunci:

- a) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$;
- b) $\|Ax\|_v \leq \|A\|_v \|x\|_v$.

Spectrul unei matrici $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ val. proprie pt } A\}.$$

Raza spectrală a unei matrici:

$$r_\sigma(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Proprietăți ale normei operator

Inegalități. Fie $\|\cdot\| := \|\cdot\|_v$ o normă operator pe $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Atunci:

- a) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$;
- b) $\|Ax\|_v \leq \|A\|_v \|x\|_v$.

Spectrul unei matrici $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ val. proprie pt } A\}.$$

Raza spectrală a unei matrici:

$$r_\sigma(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Aplicație: Fie $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $r_\sigma(B) < 1$. Atunci $I - B$ este inversabilă și:

$$(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k.$$

Proprietăți ale normei operator

Inegalități. Fie $\|\cdot\| := \|\cdot\|_v$ o normă operator pe $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Atunci:

- a) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$;
- b) $\|Ax\|_v \leq \|A\|_v \|x\|_v$.

Spectrul unei matrici $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$:

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ val. proprie pt } A\}.$$

Raza spectrală a unei matrici:

$$r_\sigma(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Aplicație: Fie $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $r_\sigma(B) < 1$. Atunci $I - B$ este inversabilă și:

$$(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k.$$

Exemple.

- i) $\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.
- ii) $\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.
- iii) $\|A\|_2 = \sqrt{r_\sigma(A^*A)}$, unde $A^* = \bar{A}^T$.

Norma operator și raza spectrală

Legătura între normele operator și raza spectrală:

1) Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Atunci pentru orice normă de operator, avem:

$$r_{\sigma}(A) \leq \|A\|.$$

2) Pentru orice $\epsilon > 0$ există o normă de operator $\|\cdot\|_{\epsilon}$, astfel încât

$$\|A\|_{\epsilon} \leq r_{\sigma}(A) + \epsilon, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}).$$

Norma operator și raza spectrală

Legătura între normele operator și raza spectrală:

1) Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Atunci pentru orice normă de operator, avem:

$$r_\sigma(A) \leq \|A\|.$$

2) Pentru orice $\epsilon > 0$ există o normă de operator $\|\cdot\|_\epsilon$, astfel încât

$$\|A\|_\epsilon \leq r_\sigma(A) + \epsilon, \quad \forall A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}).$$

3) Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Atunci $r_\sigma(A) < 1$ dacă și numai dacă există o normă operator $\|\cdot\|$, astfel încât $\|A\| < 1$.

4) Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Atunci

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A^m = 0$$

dacă și numai dacă $r_\sigma(A) < 1$.

(sau, dacă și numai dacă există o normă operator a.î. $\|A\| < 1$).

5) Fie $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $\|B\| < 1$ (normă operator). Atunci $I - B$ este inversabilă și:

$$(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k.$$

Exerciții

- 1) Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ și $\|\cdot\|$ o normă operator astfel încât $\|A\| < 1$. Arătați că:

$$\left\| (I - A)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

- 2) Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, astfel încât:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Să se arate că $r_\sigma(A) \leq 6$ și $r_\sigma(A^{-1}) \leq 1/2$.

- 3) Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Arătați că $|\text{trace}(A)| \leq nr_\sigma(A)$.
- 4) Fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ o matrice simetrică pozitiv definită. Să se arate că

$$\text{trace}(A) > r_\sigma(A).$$