Metode Numerice

Prof. Bogdan Gavrea

CTI 2021

Aproximarea în sensul celor mai mici pătrate.
Rezolvarea numerică a ecuațiilor neliniare

Cea mai bună aproximare în sensul celor mai mici pătrate

Fie $m \geq n$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ și $b \in \mathbb{R}^m$. În cele ce urmează vom considera că matricea A are rangul n. Considerăm următoarea problemă:

Să se determine x^* ca soluție a problemei de optimizare

$$\min_x ||b - Ax||_2 \,. \tag{1}$$

Cea mai bună aproximare în sensul celor mai mici pătrate

Fie $m \geq n$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ și $b \in \mathbb{R}^m$. În cele ce urmează vom considera că matricea A are rangul n. Considerăm următoarea problemă:

Să se determine x^* ca soluție a problemei de optimizare

$$\min_x ||b - Ax||_2 \,. \tag{1}$$

Problema de mai sus se numește *problema liniară de aproximare în sensul celor mai mici pătrate (linear least squares)*. Se observă ușor că (1) este echivalentă cu problema de minim:

$$\min_x \frac{1}{2} ||b - Ax||_2^2 \,. \tag{2}$$

Cea mai bună aproximare în sensul celor mai mici pătrate

Fie $m \geq n$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ și $b \in \mathbb{R}^m$. În cele ce urmează vom considera că matricea A are rangul n. Considerăm următoarea problemă:

Să se determine x^* ca soluție a problemei de optimizare

$$\min_x ||b - Ax||_2 \,. \tag{1}$$

Problema de mai sus se numește *problema liniară de aproximare în sensul celor mai mici pătrate (linear least squares)*. Se observă ușor că (1) este echivalentă cu problema de minim:

$$\min_x \frac{1}{2} ||b - Ax||_2^2 \,. \tag{2}$$

Teoremă

Fie $m \geq n$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ și $rang(A) = n$. Atunci x^* este o soluție a problemei (1) dacă și numai dacă x^* verifică:

$$\left(A^T A\right) x = A^T b \textbf{ (ecuațiile normale)}.$$

Matricea $A^\dagger := \left(A^T A\right)^{-1} A^T$ se numește *pseudo-inversa (pseudo-inverse)* matricii A.

Ecuații neliniare. Ordin de convergență.

În cele ce urmează vom considera ecuații neliniare de forma

$$f(x) = 0$$

și vom căuta procedee aproximative pentru determinarea unei rădăcini α.

Ecuații neliniare. Ordin de convergență.

În cele ce urmează vom considera ecuații neliniare de forma

$$f(x) = 0$$

și vom căuta procedee aproximative pentru determinarea unei rădăcini α.

Definiție

Spunem că un șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge cu rapiditate de ordin p către α, dacă există $c > 0$ și $N_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq c\,|x_n - \alpha|^p\,,\ \forall n \geq N_0.$$

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât

$$f(a)f(b) < 0.$$

- Din condiția de mai sus și din continuitatea funcției $f(x)$, rezultă că $f(x) = 0$ admite cel puțin o rădăcină în intervalul $[a, b]$.

Ecuații neliniare. Ordin de convergență.

În cele ce urmează vom considera ecuații neliniare de forma

$$f(x) = 0$$

și vom căuta procedee aproximative pentru determinarea unei rădăcini α.

Definiție

Spunem că un șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge cu rapiditate de ordin p către α, dacă există $c > 0$ și $N_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq c\,|x_n - \alpha|^p\,,\ \forall n \geq N_0.$$

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât

$$f(a)f(b) < 0.$$

- Din condiția de mai sus și din continuitatea funcției $f(x)$, rezultă că $f(x) = 0$ admite cel puțin o rădăcină în intervalul $[a, b]$.(*Putem spune mai mult despre numărul de rădăcini?*).

Ecuații neliniare. Ordin de convergență.

În cele ce urmează vom considera ecuații neliniare de forma

$$f(x) = 0$$

și vom căuta procedee aproximative pentru determinarea unei rădăcini α.

Definiție

Spunem că un șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge cu rapiditate de ordin p către α, dacă există $c > 0$ și $N_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq c\, |x_n - \alpha|^p\,,\ \forall n \geq N_0.$$

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încât

$$f(a)f(b) < 0.$$

- Din condiția de mai sus și din continuitatea funcției $f(x)$, rezultă că $f(x) = 0$ admite cel puțin o rădăcină în intervalul $[a, b]$.(*Putem spune mai mult despre numărul de rădăcini?*).
- În general, intervalul $[a, b]$ se alege astfel încât să conțină doar o rădăcină.

Metoda bisecției

Fie $\epsilon > 0$ și a, b valori specificate de utilizator astfel încât $f(a)f(b) < 0$. Metoda bisecției constă în următorul algoritm:

1) Fie $c := \frac{a+b}{2}$;
2) Dacă $b - c < \epsilon$, atunci $\alpha := c$, **exit**;
3) Dacă $sgn(f(c)) \cdot sgn(f(b)) \leq 0$, atunci $a := c$. În caz contrar $b := c$;
4) Întoarcere la pasul 1).

Metoda bisecției

Fie $\epsilon > 0$ și a, b valori specificate de utilizator astfel încât $f(a)f(b) < 0$. Metoda bisecției constă în următorul algoritm:

1) Fie $c := \frac{a+b}{2}$;
2) Dacă $b - c < \epsilon$, atunci $\alpha := c$, **exit**;
3) Dacă $sgn(f(c)) \cdot sgn(f(b)) \leq 0$, atunci $a := c$. În caz contrar $b := c$;
4) Întoarcere la pasul 1).

Observații:

- Dacă notăm cu c_n șirul generat de algoritmul de mai sus, atunci este ușor de remarcat că:

$$|c_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a).$$

Metoda bisecției

Fie $\epsilon > 0$ și a, b valori specificate de utilizator astfel încât $f(a)f(b) < 0$. Metoda bisecției constă în următorul algoritm:

1) Fie $c := \frac{a+b}{2}$;
2) Dacă $b - c < \epsilon$, atunci $\alpha := c$, **exit**;
3) Dacă $sgn(f(c)) \cdot sgn(f(b)) \leq 0$, atunci $a := c$. În caz contrar $b := c$;
4) Întoarcere la pasul 1).

Observații:

- Dacă notăm cu c_n șirul generat de algoritmul de mai sus, atunci este ușor de remarcat că:

$$|c_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a).$$

- Ce ordin de convergență are metoda?

Metoda bisecției

Fie $\epsilon > 0$ și a, b valori specificate de utilizator astfel încât $f(a)f(b) < 0$. Metoda bisecției constă în următorul algoritm:

1) Fie $c := \frac{a+b}{2}$;
2) Dacă $b - c < \epsilon$, atunci $\alpha := c$, **exit**;
3) Dacă $sgn(f(c)) \cdot sgn(f(b)) \leq 0$, atunci $a := c$. În caz contrar $b := c$;
4) Întoarcere la pasul 1).

Observații:

- Dacă notăm cu c_n șirul generat de algoritmul de mai sus, atunci este ușor de remarcat că:

$$|c_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a).$$

- Ce ordin de convergență are metoda?

Avantaje și dezavantaje:

- (*Pro*) Convergență garantată pentru funcții continue;

Metoda bisecției

Fie $\epsilon > 0$ și a, b valori specificate de utilizator astfel încât $f(a)f(b) < 0$. Metoda bisecției constă în următorul algoritm:

1) Fie $c := \frac{a+b}{2}$;
2) Dacă $b - c < \epsilon$, atunci $\alpha := c$, **exit**;
3) Dacă $sgn(f(c)) \cdot sgn(f(b)) \leq 0$, atunci $a := c$. În caz contrar $b := c$;
4) Întoarcere la pasul 1).

Observații:

- Dacă notăm cu c_n șirul generat de algoritmul de mai sus, atunci este ușor de remarcat că:
$$|c_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a).$$
- Ce ordin de convergență are metoda?

Avantaje și dezavantaje:

- (*Pro*) Convergență garantată pentru funcții continue;
- (*Contra*) Metoda converge *"încet"*; sensibilă la erori de trunchiere.

Metoda lui Newton

Fie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă și $\alpha \in (a, b)$ astfel încât $f(\alpha) = 0$ și $f'(\alpha) \neq 0$. Metoda lui Newton constă în generarea unui șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ după formula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, ... \tag{3}$$

unde x_0 este dat.

Metoda lui Newton

Fie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă și $\alpha \in (a, b)$ astfel încât $f(\alpha) = 0$ și $f'(\alpha) \neq 0$. Metoda lui Newton constă în generarea unui șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ după formula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, ... \tag{3}$$

unde x_0 este dat.

Metoda lui Newton poate fi obținută în următorii pași:

Metoda lui Newton

Fie $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ o funcție derivabilă și $\alpha\in(a,b)$ astfel încât $f(\alpha)=0$ și $f'(\alpha)\neq 0$. Metoda lui Newton constă în generarea unui șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ după formula:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\, n=0,1,2,... \tag{3}$$

unde x_0 este dat.
Metoda lui Newton poate fi obținută în următorii pași:

- Presupunând că f satisface condițiile necesare de derivabilitate și continuitate a derivatelor, din dezvoltarea Taylor în jurul lui x_n avem

$$f(x)=f(x_n)+(x-x_n)f'(x_n)+\frac{(x-x_n)^2}{2}f''(c_n). \tag{4}$$

Metoda lui Newton

Fie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă și $\alpha \in (a, b)$ astfel încât $f(\alpha) = 0$ și $f'(\alpha) \neq 0$. Metoda lui Newton constă în generarea unui șir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ după formula:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 0, 1, 2, ... \tag{3}$$

unde x_0 este dat.
Metoda lui Newton poate fi obținută în următorii pași:

- Presupunând că f satisface condițiile necesare de derivabilitate și continuitate a derivatelor, din dezvoltarea Taylor în jurul lui x_n avem

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n) + \frac{(x - x_n)^2}{2} f''(c_n). \tag{4}$$

- Înlocuind funcția $f(x)$ cu primii doi termeni din identitatea de mai sus și egalând cu 0, ne conduce la x_{n+1} ca soluție a ecuației liniare:

$$0 = f(x_n) + (x - x_n)f'(x_n).$$

Convergența metodei lui Newton

Teoremă

Fie $\epsilon > 0$ *și* $I = [\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]$ *astfel încât* $f \in C^2(I)$. *Presupunem că* $f(\alpha) = 0$ *și* $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$. *Atunci pentru* x_0 *ales suficient de aproape de* α *șirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *generat prin metoda lui Newton converge la* α *și*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}. \tag{5}$$

Demonstrație (*pe scurt*)

Convergența metodei lui Newton

Teoremă

Fie $\epsilon > 0$ și $I = [\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]$ astfel încât $f \in C^2(I)$. Presupunem că $f(\alpha) = 0$ și $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$. Atunci pentru x_0 ales suficient de aproape de α șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ generat prin metoda lui Newton converge la α și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}. \tag{5}$$

Demonstrație (*pe scurt*)

- Dacă în ecuația (4), luăm $x := \alpha$, obținem:

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}, \ n \geq 0. \tag{6}$$

Convergența metodei lui Newton

Teoremă

Fie $\epsilon > 0$ *și* $I = [\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]$ *astfel încât* $f \in C^2(I)$. *Presupunem că* $f(\alpha) = 0$ *și* $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$. *Atunci pentru* x_0 *ales suficient de aproape de* α *șirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *generat prin metoda lui Newton converge la* α *și*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}. \tag{5}$$

Demonstrație (*pe scurt*)

- Dacă în ecuația (4), luăm $x := \alpha$, obținem:

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(c_n)}{2f'(x_n)}, \ \ n \geq 0. \tag{6}$$

- Fie

$$M = \frac{\max_{x\in I} |f''(x)|}{2 \min_{x\in I} |f'(x)|}$$

și alegem x_0 astfel încât $|\alpha - x_0| < \epsilon$ și $M|\alpha - x_0| < 1$.

Convergența metodei lui Newton

Teoremă

Fie $\epsilon > 0$ *și* $I = [\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]$ *astfel încât* $f \in C^2(I)$. *Presupunem că* $f(\alpha) = 0$ *și* $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$. *Atunci pentru* x_0 *ales suficient de aproape de* α *șirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *generat prin metoda lui Newton converge la* α *și*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Demonstrație (*continuare*)

- Se arată că $|x - x_n| < \epsilon$ și $M|x - x_n| < 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$.

Convergența metodei lui Newton

Teoremă

Fie $\epsilon > 0$ *și* $I = [\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]$ *astfel încât* $f \in C^2(I)$. *Presupunem că* $f(\alpha) = 0$ *și* $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$. *Atunci pentru* x_0 *ales suficient de aproape de* α *șirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *generat prin metoda lui Newton converge la* α *și*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Demonstrație (*continuare*)

- Se arată că $|x - x_n| < \epsilon$ și $M|x - x_n| < 1\ \forall n \in \mathbb{N}$.
- Convergența șirului (x_n) se obține din

$$M|\alpha - x_n| \leq \left(M|\alpha - x_0|\right)^{2^n}.$$

Convergența metodei lui Newton

Teoremă

Fie $\epsilon > 0$ *și* $I = [\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]$ *astfel încât* $f \in C^2(I)$. *Presupunem că* $f(\alpha) = 0$ *și* $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$. *Atunci pentru* x_0 *ales suficient de aproape de* α *șirul* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *generat prin metoda lui Newton converge la* α *și*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{(\alpha - x_n)^2} = -\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}.$$

Demonstrație (*continuare*)

- Se arată că $|x - x_n| < \epsilon$ și $M|x - x_n| < 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Convergența șirului (x_n) se obține din

$$M|\alpha - x_n| \leq (M|\alpha - x_0|)^{2^n}.$$

- Valoarea limitei de mai sus se obține din (6) după ce se împarte la $(\alpha - x_n)^2$ și se trece la limită.

Metoda secantei

Fie x_0 și x_1 date. Metoda secantei este definită de iterația:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})},\ n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

Teoremă

Fie $\epsilon > 0$ și $I = [\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]$ astfel încât $f \in C^2(I)$. Presupunem că $f(\alpha) = 0$ și $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$. Atunci pentru x_0 și x_1 aleși suficient de aproape de α șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ generat prin metoda secantei converge la α și ordinul de convergență este

$$p = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$