Metode Numerice

Prof. Bogdan Gavrea

CTI 2021

Rezolvarea numerică a ecuaţiilor neliniare (cont).
Rezolvarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale

Rezolvarea ecuațiilor neliniare folosind metode de punct fix

- Rescriem ecuația neliniara $f(x) = 0$ sub forma $x = g(x)$. Un punct α care satisface $\alpha = g(\alpha)$ se numește **punct fix** al funcției g.

Rezolvarea ecuațiilor neliniare folosind metode de punct fix

- Rescriem ecuația neliniara $f(x) = 0$ sub forma $x = g(x)$. Un punct α care satisface $\alpha = g(\alpha)$ se numește **punct fix** al funcției g.
- Presupunem că $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b]$. Presupunem deasemenea că $g'(x)$ există pentru orice $x \in (a, b)$ și că există $0 < k < 1$, astfel încât:

$$\left| g'(x) \right| \leq k, \forall x \in (a, b).$$

Atunci, pentru orice $x_0 \in [a, b]$, șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin

$$x_{n+1} = g(x_n), n \in \mathbb{N}$$

converge la singurul punct fix x^* din intervalul $[a, b]$ ($x^* = g(x^*)$). Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește șirul iterațiilor succesive.

Rezolvarea ecuațiilor neliniare folosind metode de punct fix

- Rescriem ecuația neliniara $f(x) = 0$ sub forma $x = g(x)$. Un punct α care satisface $\alpha = g(\alpha)$ se numește **punct fix** al funcției g.
- Presupunem că $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b]$. Presupunem deasemenea că $g'(x)$ există pentru orice $x \in (a, b)$ și că există $0 < k < 1$, astfel încât:

  $$\left|g'(x)\right| \leq k, \forall x \in (a, b).$$

  Atunci, pentru orice $x_0 \in [a, b]$, șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin

  $$x_{n+1} = g(x_n), n \in \mathbb{N}$$

  converge la singurul punct fix x^* din intervalul $[a, b]$ ($x^* = g(x^*)$). Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește șirul iterațiilor succesive.
- Se consideră ecuația $x = g(x)$ cu soluția $x^* \in (a, b)$ Presupunem ca g este derivabilă, cu derivata continuă in intervalul (a, b). Dacă $|g'(x^*)| < 1$, atunci există $\delta > 0$ a.î. pentru x_0, cu proprietatea $|x_0 - x^*| < \delta$ șirul aproximațiilor succesive converge la x^* (x_0 suficient de aproape).

Rezolvarea ecuațiilor neliniare folosind metode de punct fix

- Rescriem ecuația neliniara $f(x) = 0$ sub forma $x = g(x)$. Un punct α care satisface $\alpha = g(\alpha)$ se numește **punct fix** al funcției g.
- Presupunem că $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b]$. Presupunem deasemenea că $g'(x)$ există pentru orice $x \in (a, b)$ și că există $0 < k < 1$, astfel încât:

  $$\left|g'(x)\right| \leq k, \forall x \in (a, b).$$

  Atunci, pentru orice $x_0 \in [a, b]$, șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin

  $$x_{n+1} = g(x_n), n \in \mathbb{N}$$

  converge la singurul punct fix x^* din intervalul $[a, b]$ ($x^* = g(x^*)$). Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește șirul iterațiilor succesive.
- Se consideră ecuația $x = g(x)$ cu soluția $x^* \in (a, b)$ Presupunem ca g este derivabilă, cu derivata continuă in intervalul (a, b). Dacă $|g'(x^*)| < 1$, atunci există $\delta > 0$ a.î. pentru x_0, cu proprietatea $|x_0 - x^*| < \delta$ șirul aproximațiilor succesive converge la x^* (x_0 suficient de aproape).
- Exercițiu. Rezolvați ecuația $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ folosind o metoda iterativă de punct fix pe intervalul $[1, 2]$.

Rezolvarea ecuațiilor neliniare folosind metode de punct fix

- Rescriem ecuația neliniara $f(x) = 0$ sub forma $x = g(x)$. Un punct α care satisface $\alpha = g(\alpha)$ se numește **punct fix** al funcției g.
- Presupunem că $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b]$. Presupunem deasemenea că $g'(x)$ există pentru orice $x \in (a, b)$ și că există $0 < k < 1$, astfel încât:

$$\left|g'(x)\right| \leq k, \forall x \in (a, b).$$

  Atunci, pentru orice $x_0 \in [a, b]$, șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin

$$x_{n+1} = g(x_n), n \in \mathbb{N}$$

  converge la singurul punct fix x^* din intervalul $[a, b]$ $(x^* = g(x^*))$. Șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numește șirul iterațiilor succesive.
- Se consideră ecuația $x = g(x)$ cu soluția $x^* \in (a, b)$ Presupunem ca g este derivabilă, cu derivata continuă in intervalul (a, b). Dacă $|g'(x^*)| < 1$, atunci există $\delta > 0$ a.î. pentru x_0, cu proprietatea $|x_0 - x^*| < \delta$ șirul aproximațiilor succesive converge la x^* (x_0 suficient de aproape).
- Exercițiu. Rezolvați ecuația $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ folosind o metoda iterativă de punct fix pe intervalul $[1, 2]$.Fie $g(x) = (3x^2 + 3)^{1/4}$, ...

Ecuații diferențiale. Probleme Cauchy.

- Ecuații diferențiale de ordinul întâi:

$$y' = f(t, y) \text{ sau } y'(t) = f(t, y(t)).$$

Ecuații diferențiale. Probleme Cauchy.

- Ecuații diferențiale de ordinul întâi:

$$y' = f(t, y) \text{ sau } y'(t) = f(t, y(t)).$$

- Probleme Cauchy (IVP): $y' = f(t, y), \ y(0) = y_0$.

Ecuații diferențiale. Probleme Cauchy.

- Ecuații diferențiale de ordinul întâi:

$$y' = f(t, y) \text{ sau } y'(t) = f(t, y(t)).$$

- Probleme Cauchy (IVP): $y' = f(t, y),\ y(0) = y_0$.
- Ecuații diferențiale de ordinul doi:

$$y'' = f(t, y, y').$$

Valori inițiale: $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$.

Ecuații diferențiale. Probleme Cauchy.

- Ecuații diferențiale de ordinul întâi:

$$y' = f(t, y) \text{ sau } y'(t) = f(t, y(t)).$$

- Probleme Cauchy (IVP): $y' = f(t, y),\ y(0) = y_0$.
- Ecuații diferențiale de ordinul doi:

$$y'' = f(t, y, y').$$

  Valori inițiale: $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_0'$.
- Sisteme de ecuații diferențiale de ordinul 1. Fie $y_1(t) := y(t)$ și $y_2(t) := y'(t)$. Atunci ecuația diferențială de ordinul 2 se poate scrie sub forma:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ f(t, y_1, y_2) \end{pmatrix} \text{ sau } u' = F(t, u),$$

  unde $u = (y_1, y_2)^T$, $F(t, u) = (u_1, f(t, u))^T$.

Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

$$\begin{cases} y' & = & f(t, y) \\ y(0) & = & y_0 \end{cases}$$

Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

$$\begin{cases} y' &= f(t,y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

Newton, 1671

$$\begin{cases} y' &= 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

$$\begin{cases} y' &= f(t,y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

Newton, 1671

$$\begin{cases} y' &= 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Serii de puteri:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2!} + y^{(3)}(0)\frac{t^3}{3!} + \ldots$$

Exemplu. *Soluția ecuației lui Newton folosind serii de puteri.*

- $y(0) = 0$ implică

Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

$$\begin{cases} y' & = & f(t, y) \\ y(0) & = & y_0 \end{cases}$$

Newton, 1671

$$\begin{cases} y' & = & 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y(0) & = & 0 \end{cases}$$

Serii de puteri:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2!} + y^{(3)}(0)\frac{t^3}{3!} + \dots$$

Exemplu. *Soluția ecuației lui Newton folosind serii de puteri.*

- $y(0) = 0$ implică $y'(0) = 1$

Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

$$\begin{cases} y' &= f(t,y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

Newton, 1671

$$\begin{cases} y' &= 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Serii de puteri:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2!} + y^{(3)}(0)\frac{t^3}{3!} + \ldots$$

Exemplu. *Soluția ecuației lui Newton folosind serii de puteri.*

- $y(0) = 0$ implică $y'(0) = 1 \Rightarrow y(x) = x + \ldots.$

Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

$$\begin{cases} y' &= f(t,y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

Newton, 1671

$$\begin{cases} y' &= 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Serii de puteri:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2!} + y^{(3)}(0)\frac{t^3}{3!} + \ldots$$

Exemplu. *Soluția ecuației lui Newton folosind serii de puteri.*

- $y(0) = 0$ implică $y'(0) = 1 \Rightarrow y(x) = x + \ldots.$
- $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ implică

Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

$$\begin{cases} y' &= f(t,y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

Newton, 1671

$$\begin{cases} y' &= 1-3x+y+x^2+xy \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Serii de puteri:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2!} + y^{(3)}(0)\frac{t^3}{3!} + \dots$$

Exemplu. *Soluția ecuației lui Newton folosind serii de puteri.*

- $y(0)=0$ implică $y'(0)=1 \Rightarrow y(x)=x+\dots.$
- $y(0)=0,\ y'(0)=1$ implică $y''(0)=-2$

Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

$$\begin{cases} y' &= f(t,y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

Newton, 1671

$$\begin{cases} y' &= 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Serii de puteri:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2!} + y^{(3)}(0)\frac{t^3}{3!} + \dots$$

Exemplu. *Soluția ecuației lui Newton folosind serii de puteri.*

- $y(0) = 0$ implică $y'(0) = 1 \Rightarrow y(x) = x + \dots.$
- $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ implică $y''(0) = -2 \Rightarrow y(x) = x - x^2 + \dots.$

Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

$$\begin{cases} y' &= f(t,y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

Newton, 1671

$$\begin{cases} y' &= 1-3x+y+x^2+xy \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Serii de puteri:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2!} + y^{(3)}(0)\frac{t^3}{3!} + \ldots$$

Exemplu. *Soluția ecuației lui Newton folosind serii de puteri.*

- $y(0)=0$ implică $y'(0)=1 \Rightarrow y(x)=x+\ldots.$
- $y(0)=0,\ y'(0)=1$ implică $y''(0)=-2 \Rightarrow y(x)=x-x^2+\ldots.$
- $y(0)=0,\ y'(0)=1,\ y''(0)=-2$ implică

Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

$$\begin{cases} y' &= f(t,y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

Newton, 1671

$$\begin{cases} y' &= 1-3x+y+x^2+xy \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Serii de puteri:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2!} + y^{(3)}(0)\frac{t^3}{3!} + \ldots$$

Exemplu. *Soluția ecuației lui Newton folosind serii de puteri.*

- $y(0) = 0$ implică $y'(0) = 1 \Rightarrow y(x) = x + \ldots.$
- $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ implică $y''(0) = -2 \Rightarrow y(x) = x - x^2 + \ldots.$
- $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -2$ implică $y^{(3)}(0) = 2$

Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

Newton, 1671

$$\begin{cases} y' &= 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Serii de puteri:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2!} + y^{(3)}(0)\frac{t^3}{3!} + \dots$$

Exemplu. *Soluția ecuației lui Newton folosind serii de puteri.*

- $y(0) = 0$ implică $y'(0) = 1 \Rightarrow y(x) = x + \dots.$
- $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ implică $y''(0) = -2 \Rightarrow y(x) = x - x^2 + \dots.$
- $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -2$ implică $y^{(3)}(0) = 2 \Rightarrow$ $y(x) = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots.$

Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

Probleme Cauchy:

$$\begin{cases} y' &= f(t,y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

Newton, 1671

$$\begin{cases} y' &= 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y(0) &= 0 \end{cases}$$

Serii de puteri:

$$y(t) = y(0) + y'(0)t + y''(0)\frac{t^2}{2!} + y^{(3)}(0)\frac{t^3}{3!} + \dots$$

Exemplu. *Soluția ecuației lui Newton folosind serii de puteri.*

- $y(0) = 0$ implică $y'(0) = 1 \Rightarrow y(x) = x + \dots$.
- $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ implică $y''(0) = -2 \Rightarrow y(x) = x - x^2 + \dots$.
- $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -2$ implică $y^{(3)}(0) = 2 \Rightarrow$ $y(x) = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$.

Soluția obținută de Newton:

$$y(x) = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6 + \dots$$

Rezolvarea ecuațiilor diferențiale folosind serii de puteri

EXEMPL. I.

Sit Æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + y + xx + xy$, cujus Terminos $1 - 3x + xx$ non affectos *Relatâ* Quantitate dispositos vides in lateralem Seriem primo loco, & reliquos y & xy in sinistrâ Columnâ.

	$+1 - 3x + xx$
$+y$	$* + x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5$; &c.
$+xy$	$* \quad x + xx - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{30}x^6$; &c.
Aggreg.	$+1 - 2x + xx - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{30}x^5$; &c.
$y =$	$+x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6$; &c.

Nunc:

Metode numerice

Considerăm din nou problema Cauchy

$$\begin{cases} y' & = & f(t,y) \\ y(0) & = & y_0 \end{cases}$$

și notăm cu $y^* := y^*(t)$ soluția exactă. În cele ce urmează sunt valabile următoarele convenții:

- Pasul de integrare: $h, \ h > 0$;

Metode numerice

Considerăm din nou problema Cauchy

$$\begin{cases} y' & = & f(t,y) \\ y(0) & = & y_0 \end{cases}$$

și notăm cu $y^* := y^*(t)$ soluția exactă. În cele ce urmează sunt valabile următoarele convenții:

- Pasul de integrare: $h,\ h > 0$;
- Timpii de integrare: $t_i,\ t_i = ih,\ i = 0, 1, 2, ...$;

Metode numerice

Considerăm din nou problema Cauchy

$$\begin{cases} y' & = & f(t, y) \\ y(0) & = & y_0 \end{cases}$$

și notăm cu $y^* := y^*(t)$ soluția exactă. În cele ce urmează sunt valabile următoarele convenții:

- Pasul de integrare: $h, \ h > 0$;
- Timpii de integrare: $t_i, \ t_i = ih, \ i = 0, 1, 2, ...$;
- Soluția exactă la pasul n: $y_n^*, \ y_n^* := y^*(t_n)$;

Metode numerice

Considerăm din nou problema Cauchy

$$\begin{cases} y' & = & f(t,y) \\ y(0) & = & y_0 \end{cases}$$

și notăm cu $y^* := y^*(t)$ soluția exactă. În cele ce urmează sunt valabile următoarele convenții:

- Pasul de integrare: $h,\ h > 0$;
- Timpii de integrare: $t_i,\ t_i = ih,\ i = 0, 1, 2, \ldots$;
- Soluția exactă la pasul n: $y_n^*,\ y_n^* := y^*(t_n)$;
- Soluția numerică la pasul n: $y_n,\ y_n \approx y_n^*$;

Metode numerice

Considerăm din nou problema Cauchy

$$\begin{cases} y' & = & f(t,y) \\ y(0) & = & y_0 \end{cases}$$

și notăm cu $y^* := y^*(t)$ soluția exactă. În cele ce urmează sunt valabile următoarele convenții:

- Pasul de integrare: $h,\ h > 0$;
- Timpii de integrare: $t_i,\ t_i = ih,\ i = 0, 1, 2, \dots$;
- Soluția exactă la pasul n: $y_n^*,\ y_n^* := y^*(t_n)$;
- Soluția numerică la pasul n: $y_n,\ y_n \approx y_n^*$;
- Eroarea la pasul n: $e_n,\ e_n := |y_n^* - y_n|$

Metode numerice. Metoda lui Euler.

- Din definiția derivatei avem:

$$y'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \text{ și folosind aproximarea } y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

  în ecuația diferențială $y'(t) = f(t, y(t))$ ne conduce la

Metode numerice. Metoda lui Euler.

- Din definiția derivatei avem:

$$y'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \text{ și folosind aproximarea } y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

în ecuația diferențială $y'(t) = f(t, y(t))$ ne conduce la

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)).$$

Metode numerice. Metoda lui Euler.

- Din definiția derivatei avem:

$$y'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \text{ și folosind aproximarea } y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

  în ecuația diferențială $y'(t) = f(t, y(t))$ ne conduce la

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)).$$

- Pentru $t := t_n$, $y_n \approx y(t_n)$, $y_{n+1} \approx y(t_{n+1})$ obținem metoda lui Euler (1768):

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n),\ n = 0, 1, ...$$

Metode numerice. Metoda lui Euler.

- Din definiția derivatei avem:

$$y'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \text{ și folosind aproximarea } y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

în ecuația diferențială $y'(t) = f(t, y(t))$ ne conduce la

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)).$$

- Pentru $t := t_n$, $y_n \approx y(t_n)$, $y_{n+1} \approx y(t_{n+1})$ obținem metoda lui Euler (1768):

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \;\; n = 0, 1, \ldots$$

- Eroarea de trunchiere (discretizare) la pasul $n+1$ este definită prin

$$T_{n,h} := y^*(t_{n+1}) - \left[y^*(t_n) + hf(t_n, y^*(t_n))\right].$$

Metode numerice. Metoda lui Euler.

- Din definiția derivatei avem:

$$y'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \text{ și folosind aproximarea } y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

  în ecuația diferențială $y'(t) = f(t, y(t))$ ne conduce la

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)).$$

- Pentru $t := t_n$, $y_n \approx y(t_n)$, $y_{n+1} \approx y(t_{n+1})$ obținem metoda lui Euler (1768):

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \ \ n = 0, 1, \ldots$$

- Eroarea de trunchiere (discretizare) la pasul $n+1$ este definită prin

$$T_{n,h} := y^*(t_{n+1}) - \left[y^*(t_n) + hf(t_n, y^*(t_n))\right].$$

  Pentru metoda lui Euler avem:

$$T_{n,h} = \frac{h^2}{2}(y^*)''(\xi_n),$$

  unde $\xi_n \in [t_n, t_{n+1}]$. Vom scrie $T_{n,h} = \mathcal{O}(h^2)$.

Convergența metodei lui Euler

În cele ce urmează presupunem ca $f(t,y)$ este o funcție Lipschitz în raport cu a doua variabilă. Mai precis, presupunem că există $K > 0$, astfel încât:

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq K\,|y_1 - y_2|\,.$$

Teoremă

Presupunem că soluția y^* are derivată de ordinul 2 mărginită pe intervalul $[0,b]$. Atunci

$$\max_{0\leq t_n\leq b} |y_n^* - y_n| \leq e^{bK} e_0 + \frac{e^{bK}-1}{K}\tau(h),$$

unde

$$\tau(h) = \frac{h}{2}\,||y''||_\infty \text{ și } e_n = |y_n^* - y_n|.$$

Convergența metodei lui Euler

În cele ce urmează presupunem ca $f(t, y)$ este o funcție Lipschitz în raport cu a doua variabilă. Mai precis, presupunem că există $K > 0$, astfel încât:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq K\,|y_1 - y_2|\,.$$

Teoremă

Presupunem că soluția y^* are derivată de ordinul 2 mărginită pe intervalul $[0, b]$. Atunci

$$\max_{0\leq t_n\leq b} |y_n^* - y_n| \leq e^{bK} e_0 + \frac{e^{bK} - 1}{K}\tau(h),$$

unde

$$\tau(h) = \frac{h}{2}\,||y''||_\infty \text{ și } e_n = |y_n^* - y_n|.$$

Observație. Eroarea de trunchiere $T_{n,h} = \frac{h^2}{2}(y^*)''(\xi_n)$ satisface

$$|T_{n,h}| \leq h\tau(h).$$

Convergența metodei lui Euler

i) Scriem

$$
\begin{aligned}
y_{n+1}^* &= y_n^* + hf(t_n, y_n^*) + T_{n,h}, \\
y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n).
\end{aligned}
$$

Convergența metodei lui Euler

i) Scriem

$$\begin{aligned} y^*_{n+1} &= y^*_n + hf(t_n, y^*_n) + T_{n,h}, \\ y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n). \end{aligned}$$

ii) Prin scădere: $y^*_{n+1} - y_{n+1} = y^*_n - y_n + h\left[f(t_n, y^*_n) - f(t_n, y_n)\right] + T_{n,h}$.

Convergența metodei lui Euler

i) Scriem

$$\begin{aligned} y^*_{n+1} &= y^*_n + hf(t_n, y^*_n) + T_{n,h}, \\ y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n). \end{aligned}$$

ii) Prin scădere: $y^*_{n+1} - y_{n+1} = y^*_n - y_n + h[f(t_n, y^*_n) - f(t_n, y_n)] + T_{n,h}$.

iii) Folosind proprietatea Lipschitz a funcției $f(t, y)$ și $|T_{n,h}| \leq h\tau(h)$ obținem:

$$e_{n+1} \leq (1 + hK)e_n + h\tau(h).$$

Convergența metodei lui Euler

i) Scriem

$$\begin{aligned} y_{n+1}^* &= y_n^* + hf(t_n, y_n^*) + T_{n,h}, \\ y_{n+1} &= y_n + hf(t_n, y_n). \end{aligned}$$

ii) Prin scădere: $y_{n+1}^* - y_{n+1} = y_n^* - y_n + h\left[f(t_n, y_n^*) - f(t_n, y_n)\right] + T_{n,h}$.

iii) Folosind proprietatea Lipschitz a funcției $f(t, y)$ și $|T_{n,h}| \leq h\tau(h)$ obținem:

$$e_{n+1} \leq (1 + hK)e_n + h\tau(h).$$

iv) Din folosirea repetată a inegalității de mai sus obținem:

$$e_n \leq (1 + hK)^n e_0 + h\tau(h)\left[1 + (1 + hK) + ... + (1 + hK)^{n-1}\right]$$

v) Folosind formula de calcul a sumei unei progresii geometrice, ajungem la:

$$e_n \leq (1 + hK)^n e_0 + \left[\frac{(1 + hK)^n - 1}{K}\right]\tau(h)$$

Concluzia teoremei se obține folosind acum inegalitatea $(1 + x)^m \leq e^{mx}$ $(x \geq -1)$.

Metoda lui Euler implicită

Metoda Euler implicită (*"backward Euler"* sau *"implicit Euler"*) este dată de:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}), \; n = 0, 1, ...$$

Observații:

- Eroarea de trunchiere $T_{n,h}$ pentru metoda Euler implicită satisface

$$T_{n,h} = \mathcal{O}(h^2).$$

Metoda lui Euler implicită

Metoda Euler implicită (*"backward Euler"* sau *"implicit Euler"*) este dată de:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}),\ n = 0, 1, \ldots$$

Observații:

- Eroarea de trunchiere $T_{n,h}$ pentru metoda Euler implicită satisface

$$T_{n,h} = \mathcal{O}(h^2).$$

- Rezultatul de convergență este similar cu cel obținut pentru metoda lui Euler (explicită).

Metoda lui Euler implicită

Metoda Euler implicită (*"backward Euler"* sau *"implicit Euler"*) este dată de:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}),\ n = 0, 1, \ldots$$

Observații:

- Eroarea de trunchiere $T_{n,h}$ pentru metoda Euler implicită satisface

$$T_{n,h} = \mathcal{O}(h^2).$$

- Rezultatul de convergență este similar cu cel obținut pentru metoda lui Euler (explicită).
- La fiecare pas de integrare metoda Euler implicită trebuie sa rezolve o ecuație (neliniară în general). Mai precis y_{n+1} este determinat ca soluție a ecuației în u:

$$u - y_n + hf(t_{n+1}, u) = 0.$$

Metoda lui Euler implicită

Metoda Euler implicită (*"backward Euler"* sau *"implicit Euler"*) este dată de:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}),\ n = 0, 1, ...$$

Observații:

- Eroarea de trunchiere $T_{n,h}$ pentru metoda Euler implicită satisface

$$T_{n,h} = \mathcal{O}(h^2).$$

- Rezultatul de convergență este similar cu cel obținut pentru metoda lui Euler (explicită).
- La fiecare pas de integrare metoda Euler implicită trebuie sa rezolve o ecuație (neliniară în general). Mai precis y_{n+1} este determinat ca soluție a ecuației în u:

$$u - y_n + hf(t_{n+1}, u) = 0.$$

- Având în vedere efortul computațional mai mare al metodei Euler implicită, care este avantajul acestei metode față de metoda lui Euler explicită?

Stabilitate. Implicit *vs.* explicit.

Fie $\lambda \in \mathbb{C}$. Considerăm următoarea problemă test:

$$\begin{cases} y' & = & \lambda y, \\ y(0) & = & 1, \end{cases}$$

având soluția exactă

Stabilitate. Implicit *vs.* explicit.

Fie $\lambda \in \mathbb{C}$. Considerăm următoarea problemă test:

$$\begin{cases} y' & = & \lambda y, \\ y(0) & = & 1, \end{cases}$$

având soluția exactă $y(t) = e^{\lambda t}$. Se observă că dacă $Re(\lambda) < 0$ atunci $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} e^{\lambda t} = 0$.

Stabilitate. Implicit *vs.* explicit.

Fie $\lambda \in \mathbb{C}$. Considerăm următoarea problemă test:

$$\begin{cases} y' &= \lambda y, \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

având soluția exactă $y(t) = e^{\lambda t}$. Se observă că dacă $Re(\lambda) < 0$ atunci $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} e^{\lambda t} = 0$. Pentru care din metodele lui Euler, obținem un comportament similar?

Stabilitate. Implicit *vs.* explicit.

Fie $\lambda \in \mathbb{C}$. Considerăm următoarea problemă test:

$$\begin{cases} y' & = & \lambda y, \\ y(0) & = & 1, \end{cases}$$

având soluția exactă $y(t) = e^{\lambda t}$. Se observă că dacă $Re(\lambda) < 0$ atunci $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} e^{\lambda t} = 0$. Pentru care din metodele lui Euler, obținem un comportament similar? Pentru problema test avem următoarele rezultate:

Stabilitate. Implicit *vs.* explicit.

Fie $\lambda \in \mathbb{C}$. Considerăm următoarea problemă test:

$$\begin{cases} y' & = & \lambda y, \\ y(0) & = & 1, \end{cases}$$

având soluția exactă $y(t) = e^{\lambda t}$. Se observă că dacă $Re(\lambda) < 0$ atunci $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} e^{\lambda t} = 0$. Pentru care din metodele lui Euler, obținem un comportament similar? Pentru problema test avem următoarele rezultate:

Metoda lui Euler (explicită)

$$y_n = (1 + h\lambda)^n, \; n = 0, 1, \ldots$$

Stabilitate. Implicit *vs.* explicit.

Fie $\lambda \in \mathbb{C}$. Considerăm următoarea problemă test:

$$\begin{cases} y' & = & \lambda y, \\ y(0) & = & 1, \end{cases}$$

având soluția exactă $y(t) = e^{\lambda t}$. Se observă că dacă $Re(\lambda) < 0$ atunci $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} e^{\lambda t} = 0$. Pentru care din metodele lui Euler, obținem un comportament similar? Pentru problema test avem următoarele rezultate:

Metoda lui Euler (explicită)

$$y_n = (1 + h\lambda)^n, \ n = 0, 1, \dots$$

Se obține $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ pentru acele valori λ pentru care $|1 + h\lambda| < 1$.

Stabilitate. Implicit *vs.* explicit.

Fie $\lambda \in \mathbb{C}$. Considerăm următoarea problemă test:

$$\begin{cases} y' & = & \lambda y, \\ y(0) & = & 1, \end{cases}$$

având soluția exactă $y(t) = e^{\lambda t}$. Se observă că dacă $Re(\lambda) < 0$ atunci $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} e^{\lambda t} = 0$. Pentru care din metodele lui Euler, obținem un comportament similar? Pentru problema test avem următoarele rezultate:

Metoda lui Euler (explicită)

$$y_n = (1 + h\lambda)^n, \; n = 0, 1, \ldots$$

Se obține $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ pentru acele valori λ pentru care $|1 + h\lambda| < 1$. Regiunea de stabilitate este:

$$R_e(h) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |1 + h\lambda| < 1\}.$$

Stabilitate. Implicit *vs.* explicit.

Fie $\lambda \in \mathbb{C}$. Considerăm următoarea problemă test:

$$\begin{cases} y' & = & \lambda y, \\ y(0) & = & 1, \end{cases}$$

având soluția exactă $y(t) = e^{\lambda t}$. Se observă că dacă $Re(\lambda) < 0$ atunci $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} e^{\lambda t} = 0$. Pentru care din metodele lui Euler, obținem un comportament similar? Pentru problema test avem următoarele rezultate:

Metoda lui Euler (explicită)

$$y_n = (1 + h\lambda)^n, \; n = 0, 1, \ldots$$

Se obține $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ pentru acele valori λ pentru care $|1 + h\lambda| < 1$. Regiunea de stabilitate este:

$$R_e(h) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |1 + h\lambda| < 1\}.$$

Metoda lui Euler implicită

$$y_n = \left(\frac{1}{1 - h\lambda}\right)^n, \; n = 0, 1, \ldots$$

Stabilitate. Implicit *vs.* explicit.

Fie $\lambda \in \mathbb{C}$. Considerăm următoarea problemă test:

$$\begin{cases} y' &= \lambda y, \\ y(0) &= 1, \end{cases}$$

având soluția exactă $y(t) = e^{\lambda t}$. Se observă că dacă $Re(\lambda) < 0$ atunci $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} e^{\lambda t} = 0$. Pentru care din metodele lui Euler, obținem un comportament similar? Pentru problema test avem următoarele rezultate:

Metoda lui Euler (explicită)

$$y_n = (1 + h\lambda)^n, \; n = 0, 1, \dots$$

Se obține $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ pentru acele valori λ pentru care $|1 + h\lambda| < 1$. Regiunea de stabilitate este:

$$R_e(h) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |1 + h\lambda| < 1\}.$$

Metoda lui Euler implicită

$$y_n = \left(\frac{1}{1 - h\lambda}\right)^n, \; n = 0, 1, \dots$$

Se obține $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ pentru acele valori λ pentru care $|1 - h\lambda| > 1$.

Stabilitate. Implicit *vs.* explicit.

Fie $\lambda \in \mathbb{C}$. Considerăm următoarea problemă test:

$$\begin{cases} y' & = & \lambda y, \\ y(0) & = & 1, \end{cases}$$

având soluția exactă $y(t) = e^{\lambda t}$. Se observă că dacă $Re(\lambda) < 0$ atunci $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} e^{\lambda t} = 0$. Pentru care din metodele lui Euler, obținem un comportament similar? Pentru problema test avem următoarele rezultate:

Metoda lui Euler (explicită)

$$y_n = (1 + h\lambda)^n, \; n = 0, 1, \ldots$$

Se obține $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ pentru acele valori λ pentru care $|1 + h\lambda| < 1$. Regiunea de stabilitate este:

$$R_e(h) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |1 + h\lambda| < 1\}.$$

Metoda lui Euler implicită

$$y_n = \left(\frac{1}{1 - h\lambda}\right)^n, \; n = 0, 1, \ldots$$

Se obține $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$ pentru acele valori λ pentru care $|1 - h\lambda| > 1$. Regiunea de stabilitate este:

$$R_i(h) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |1 - h\lambda| > 1\},$$

regiune care include $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid Re(\lambda) < 0\}$.

Metode Runge-Kutta

Metodele Runge-Kutta de ordin $p+1$ sunt obținute prin următoarea schemă:

$$
\begin{aligned}
K_0 &= hf(t_n, y_n) \\
K_1 &= hf(t_n + a_1 h, y_n + b_{1,0} K_0) \\
\vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\
K_p &= hf\left(t_n + a_p h, y_n + \sum_{i=0}^{p-1} b_{p,i} K_i\right),
\end{aligned}
$$

iar valoarea aproximativă a soluției la pasul t_{n+1} este calculată prin

$$
y_{n+1} = y_n + \sum_{i=0}^{p} A_i K_i.
$$

Coeficienții a_j, $b_{k,i}$ și A_l, $j = \overline{1,p}$, $l = \overline{0,p}$, $k = \overline{1,p}$, $i = \overline{0,k-1}$ se determină din dezvoltări în serie Taylor, astfel încât eroarea de trunchiere asociată metodei să satisfacă

$$
T_{n,h} = \mathcal{O}(h^{p+2}).
$$