

Metode Numerice

Prof. Bogdan Gavrea

CTi 2021

Interpolare polinomială

Problema de interpolare Lagrange

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și x_0, \dots, x_n , $n + 1$ puncte distincte în intervalul $[a, b]$. Presupunem cunoscute valorile funcției $f(x)$ în punctele x_0, \dots, x_n , i.e.,

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Problema de interpolare Lagrange

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și x_0, \dots, x_n , $n + 1$ puncte distincte în intervalul $[a, b]$. Presupunem cunoscute valorile funcției $f(x)$ în punctele x_0, \dots, x_n , i.e.,

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Problema de interpolare Lagrange constă în determinarea unui polinom $P(x)$ de grad cel mult n , $P \in \Pi_n$, astfel încât:

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Problema de interpolare Lagrange

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și x_0, \dots, x_n , $n + 1$ puncte distincte în intervalul $[a, b]$. Presupunem cunoscute valorile funcției $f(x)$ în punctele x_0, \dots, x_n , i.e.,

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Problema de interpolare Lagrange constă în determinarea unui polinom $P(x)$ de grad cel mult n , $P \in \Pi_n$, astfel încât:

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Definim următoarele polinoame:

- $l(x) = (x - x_0)\dots(x - x_n) \in \Pi_{n+1}$ se numește **polinomul nodurilor**.
- **Polinomul fundamental** $l_i(x)$ este definit prin

$$l_i(x) = \frac{l(x)}{(x - x_i)l'(x_i)} \quad \text{sau} \quad l_i(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}.$$

Problema de interpolare Lagrange

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și x_0, \dots, x_n , $n + 1$ puncte distincte în intervalul $[a, b]$. Presupunem cunoscute valorile funcției $f(x)$ în punctele x_0, \dots, x_n , i.e.,

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Problema de interpolare Lagrange constă în determinarea unui polinom $P(x)$ de grad cel mult n , $P \in \Pi_n$, astfel încât:

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Definim următoarele polinoame:

- $l(x) = (x - x_0)\dots(x - x_n) \in \Pi_{n+1}$ se numește **polinomul nodurilor**.
- **Polinomul fundamental** $l_i(x)$ este definit prin

$$l_i(x) = \frac{l(x)}{(x - x_i)l'(x_i)} \quad \text{sau} \quad l_i(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}.$$

Observație:

$$l_i(x_k) = \delta_{i,k} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

Existența și unicitatea polinomului de interpolare

Teoremă

Fiind date punctele distincte x_0, \dots, x_n există un singur polinom de grad cel mult n , $P \in \Pi_n$ care interpolează funcția în punctele x_i , i.e.,

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Existența și unicitatea polinomului de interpolare

Teoremă

Fiind date punctele distincte x_0, \dots, x_n există un singur polinom de grad cel mult n , $P \in \Pi_n$ care interpolează funcția în punctele x_i , i.e.,

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Demonstrație (schită):

- Existența. Polinomul $P(x)$ dat de

$$P(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x)$$

satisface $P \in \Pi_n$ și

Existența și unicitatea polinomului de interpolare

Teoremă

Fiind date punctele distincte x_0, \dots, x_n există un singur polinom de grad cel mult n , $P \in \Pi_n$ care interpolează funcția în punctele x_i , i.e.,

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Demonstrație (schită):

- Existența. Polinomul $P(x)$ dat de

$$P(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)$$

satisface $P \in \Pi_n$ și $P(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, \dots, n$.

Existența și unicitatea polinomului de interpolare

Teoremă

Fiind date punctele distincte x_0, \dots, x_n există un singur polinom de grad cel mult n , $P \in \Pi_n$ care interpolează funcția în punctele x_i , i.e.,

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Demonstrație (schită):

- Existența. Polinomul $P(x)$ dat de

$$P(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)$$

satisface $P \in \Pi_n$ și $P(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, \dots, n$.

- Unicitatea: prin reducere la absurd

Existența și unicitatea polinomului de interpolare

Teoremă

Fiind date punctele distincte x_0, \dots, x_n există un singur polinom de grad cel mult n , $P \in \Pi_n$ care interpolează funcția în punctele x_i , i.e.,

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Demonstrație (schită):

- Existența. Polinomul $P(x)$ dat de

$$P(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)$$

satisface $P \in \Pi_n$ și $P(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, \dots, n$.

- Unicitatea: prin reducere la absurd (se ajunge la un polinom din Π_n cu cel puțin $n + 1$ rădăcini distincte, lucru ce implică că acel polinom este egal cu polinomul nul).

Existența și unicitatea polinomului de interpolare

Teoremă

Fiind date punctele distincte x_0, \dots, x_n există un singur polinom de grad cel mult n , $P \in \Pi_n$ care interpoalează funcția în punctele x_i , i.e.,

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Demonstrație (schită):

- Existența. Polinomul $P(x)$ dat de

$$P(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x)$$

satisface $P \in \Pi_n$ și $P(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, \dots, n$.

- Unicitatea: prin reducere la absurd (se ajunge la un polinom din Π_n cu cel puțin $n + 1$ rădăcini distincte, lucru ce implică că acel polinom este egal cu polinomul nul).

Notații: $P(x) = L_n(f; x_0, \dots, x_n)(x) =$

Existența și unicitatea polinomului de interpolare

Teoremă

Fiind date punctele distincte x_0, \dots, x_n există un singur polinom de grad cel mult n , $P \in \Pi_n$ care interpoalează funcția în punctele x_i , i.e.,

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Demonstrație (schită):

- Existența. Polinomul $P(x)$ dat de

$$P(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)l_i(x)$$

satisface $P \in \Pi_n$ și $P(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, \dots, n$.

- Unicitatea: prin reducere la absurd (se ajunge la un polinom din Π_n cu cel puțin $n + 1$ rădăcini distincte, lucru ce implică că acel polinom este egal cu polinomul nul).

Notații: $P(x) = L_n(f; x_0, \dots, x_n)(x) = L_n(f)(x)$.

Generarea recursivă a polinoamelor Lagrange

Fie x_0, \dots, x_n puncte distincte și $i \in \{0, \dots, n\}$. Notăm prin $L_{n-1}^{(i)}(f)(x)$ polinomul de interpolare Lagrange al funcției $f(x)$ pe punctele $x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. Mai precis,

$$L_{n-1}^{(i)}(f)(x) = L_{n-1}(f; x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)(x).$$

Notăm prin A_n coeficientul lui x^n din $L_n(f)(x)$ și scriem:

Generarea recursivă a polinoamelor Lagrange

Fie x_0, \dots, x_n puncte distincte și $i \in \{0, \dots, n\}$. Notăm prin $L_{n-1}^{(i)}(f)(x)$ polinomul de interpolare Lagrange al funcției $f(x)$ pe punctele $x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. Mai precis,

$$L_{n-1}^{(i)}(f)(x) = L_{n-1}(f; x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)(x).$$

Notăm prin A_n coeficientul lui x^n din $L_n(f)(x)$ și scriem:

$$L_n(f)(x) - L_{n-1}^{(i)}(f)(x) =$$

Generarea recursivă a polinoamelor Lagrange

Fie x_0, \dots, x_n puncte distincte și $i \in \{0, \dots, n\}$. Notăm prin $L_{n-1}^{(i)}(f)(x)$ polinomul de interpolare Lagrange al funcției $f(x)$ pe punctele $x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. Mai precis,

$$L_{n-1}^{(i)}(f)(x) = L_{n-1}(f; x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)(x).$$

Notăm prin A_n coeficientul lui x^n din $L_n(f)(x)$ și scriem:

$$L_n(f)(x) - L_{n-1}^{(i)}(f)(x) = A_n(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)$$

Generarea recursivă a polinoamelor Lagrange

Fie x_0, \dots, x_n puncte distincte și $i \in \{0, \dots, n\}$. Notăm prin $L_{n-1}^{(i)}(f)(x)$ polinomul de interpolare Lagrange al funcției $f(x)$ pe punctele $x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. Mai precis,

$$L_{n-1}^{(i)}(f)(x) = L_{n-1}(f; x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)(x).$$

Notăm prin A_n coeficientul lui x^n din $L_n(f)(x)$ și scriem:

$$L_n(f)(x) - L_{n-1}^{(i)}(f)(x) = A_n(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)$$

$$L_n(f)(x) - L_{n-1}^{(j)}(f)(x) = A_n(x - x_0) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)$$

Generarea recursivă a polinoamelor Lagrange

Fie x_0, \dots, x_n puncte distincte și $i \in \{0, \dots, n\}$. Notăm prin $L_{n-1}^{(i)}(f)(x)$ polinomul de interpolare Lagrange al funcției $f(x)$ pe punctele $x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. Mai precis,

$$L_{n-1}^{(i)}(f)(x) = L_{n-1}(f; x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)(x).$$

Notăm prin A_n coeficientul lui x^n din $L_n(f)(x)$ și scriem:

$$L_n(f)(x) - L_{n-1}^{(i)}(f)(x) = A_n(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)$$

$$L_n(f)(x) - L_{n-1}^{(j)}(f)(x) = A_n(x - x_0)\dots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\dots(x - x_n)$$

Prin simple manipulări algebrice obținem:

$$L_n(f)(x) = \frac{(x - x_i)L_{n-1}^{(j)}(f)(x) - (x - x_j)L_{n-1}^{(i)}(f)(x)}{x_j - x_i}$$

Diferențe divizate

Definiție

Fie x_0, \dots, x_n puncte distincte și $f(x)$ o funcție definită pe un domeniu ce conține punctele x_i . Se numește **diferență divizată** de ordinul n pe punctele x_i , $i = \overline{0, n}$ a funcției f , coeficientul lui x^n din polinomul de interpolare Lagrange $L_n(f; x_0, \dots, x_n)(x)$.

Diferențe divizate

Definiție

Fie x_0, \dots, x_n puncte distincte și $f(x)$ o funcție definită pe un domeniu ce conține punctele x_i . Se numește **diferență divizată** de ordinul n pe punctele x_i , $i = \overline{0, n}$ a funcției f , coeficientul lui x^n din polinomul de interpolare Lagrange $L_n(f; x_0, \dots, x_n)(x)$. Diferența divizată se notează cu $[x_0, \dots, x_n; f]$ și se poate calcula după formula:

$$[x_0, \dots, x_n; f] = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{l'(x_i)}.$$

Diferențe divizate

Definiție

Fie x_0, \dots, x_n puncte distincte și $f(x)$ o funcție definită pe un domeniu ce conține punctele x_i . Se numește **diferență divizată** de ordinul n pe punctele x_i , $i = \overline{0, n}$ a funcției f , coeficientul lui x^n din polinomul de interpolare Lagrange $L_n(f; x_0, \dots, x_n)(x)$. Diferența divizată se notează cu $[x_0, \dots, x_n; f]$ și se poate calcula după formula:

$$[x_0, \dots, x_n; f] = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{l'(x_i)}.$$

Exemple:

- Pt $n = 0$, $[x_0; f] = f(x_0)$.

Diferențe divizate

Definiție

Fie x_0, \dots, x_n puncte distincte și $f(x)$ o funcție definită pe un domeniu ce conține punctele x_i . Se numește **diferență divizată** de ordinul n pe punctele x_i , $i = \overline{0, n}$ a funcției f , coeficientul lui x^n din polinomul de interpolare Lagrange $L_n(f; x_0, \dots, x_n)(x)$. Diferența divizată se notează cu $[x_0, \dots, x_n; f]$ și se poate calcula după formula:

$$[x_0, \dots, x_n; f] = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{l'(x_i)}.$$

Exemple:

- Pt $n = 0$, $[x_0; f] = f(x_0)$.
- Pt $n = 1$,

$$[x_0, x_1; f] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Diferențe divizate

Definiție

Fie x_0, \dots, x_n puncte distincte și $f(x)$ o funcție definită pe un domeniu ce conține punctele x_i . Se numește **diferență divizată** de ordinul n pe punctele x_i , $i = \overline{0, n}$ a funcției f , coeficientul lui x^n din polinomul de interpolare Lagrange $L_n(f; x_0, \dots, x_n)(x)$. Diferența divizată se notează cu $[x_0, \dots, x_n; f]$ și se poate calcula după formula:

$$[x_0, \dots, x_n; f] = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{l'(x_i)}.$$

Exemple:

- Pt $n = 0$, $[x_0; f] = f(x_0)$.
- Pt $n = 1$,

$$[x_0, x_1; f] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Relația de recurență pentru diferențe divizate:

$$[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n; f] = \frac{[x_1, \dots, x_n; f] - [x_0, \dots, x_{n-1}; f]}{x_n - x_0}.$$

Diferențe divizate. Proprietăți

- Demonstrația recurenței: $[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n; f] = \frac{[x_1, \dots, x_n; f] - [x_0, \dots, x_{n-1}; f]}{x_n - x_0}$.

Diferențe divizate. Proprietăți

- Demonstrația recurenței: $[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n; f] = \frac{[x_1, \dots, x_n; f] - [x_0, \dots, x_{n-1}; f]}{x_n - x_0}$. Din relația de recurență

$$L_n(f)(x) = \frac{(x - x_i)L_{n-1}^{(0)}(f)(x) - (x - x_j)L_{n-1}^{(n)}(f)(x)}{x_0 - x_n},$$

pentru polinoamele Lagrange se obține relația de recurență pentru diferențe divizate prin identificarea coeficienților.

Diferențe divizate. Proprietăți

- Demonstrația recurenței: $[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n; f] = \frac{[x_1, \dots, x_n; f] - [x_0, \dots, x_{n-1}; f]}{x_n - x_0}$. Din relația de recurență

$$L_n(f)(x) = \frac{(x - x_i)L_{n-1}^{(0)}(f)(x) - (x - x_j)L_{n-1}^{(n)}(f)(x)}{x_0 - x_n},$$

pentru polinoamele Lagrange se obține relația de recurență pentru diferențe divizate prin identificarea coeficienților.

- Avem $[x_0, \dots, x_n; x^n] = 1$ și $[x_0, \dots, x_n; x^k] = 0$ pentru $k < n$. Pe scurt:

$$[x_0, \dots, x_n; x^k] = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k < n \end{cases}$$

Diferențe divizate. Proprietăți

- Demonstrația recurenței: $[x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n; f] = \frac{[x_1, \dots, x_n; f] - [x_0, \dots, x_{n-1}; f]}{x_n - x_0}$. Din relația de recurență

$$L_n(f)(x) = \frac{(x - x_i)L_{n-1}^{(0)}(f)(x) - (x - x_j)L_{n-1}^{(n)}(f)(x)}{x_0 - x_n},$$

pentru polinoamele Lagrange se obține relația de recurență pentru diferențe divizate prin identificarea coeficienților.

- Avem $[x_0, \dots, x_n; x^n] = 1$ și $[x_0, \dots, x_n; x^k] = 0$ pentru $k < n$. Pe scurt:

$$[x_0, \dots, x_n; x^k] = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k < n \end{cases}$$

- Diferența divizată este un operator liniar, i.e.,

$$[x_0, \dots, x_n; \alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha [x_0, \dots, x_n; f(x)] + \beta [x_0, \dots, x_n; g(x)].$$

Diferențe divizate. Proprietăți

Diferențe divizate. Proprietăți

- Dacă $f(x_i) = g(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, atunci

$$[x_0, \dots, x_n; f] = [x_0, \dots, x_n; g].$$

Diferențe divizate. Proprietăți

- Dacă $f(x_i) = g(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, atunci

$$[x_0, \dots, x_n; f] = [x_0, \dots, x_n; g].$$

- $[x_0, \dots, x_n; l(x)] = 0$.

Diferențe divizate. Proprietăți

- Dacă $f(x_i) = g(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, atunci

$$[x_0, \dots, x_n; f] = [x_0, \dots, x_n; g].$$

- $[x_0, \dots, x_n; l(x)] = 0$.
- **Formula de medie pentru diferențe divizate** Fie $f \in C^{(n)}[a, b]$ și x_i , $i = \overline{0, n}$, puncte distincte în $[a, b]$.

Diferențe divizate. Proprietăți

- Dacă $f(x_i) = g(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, atunci

$$[x_0, \dots, x_n; f] = [x_0, \dots, x_n; g].$$

- $[x_0, \dots, x_n; l(x)] = 0$.
- **Formula de medie pentru diferențe divizate** Fie $f \in C^{(n)}[a, b]$ și x_i , $i = \overline{0, n}$, puncte distincte în $[a, b]$. Atunci există $c \in \left(\min_{i=\overline{0, n}} x_i, \max_{i=\overline{0, n}} x_i \right)$ astfel încât

$$[x_0, \dots, x_n; f] = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

Diferențe divizate. Proprietăți

- Dacă $f(x_i) = g(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, atunci

$$[x_0, \dots, x_n; f] = [x_0, \dots, x_n; g].$$

- $[x_0, \dots, x_n; l(x)] = 0$.
- **Formula de medie pentru diferențe divizate** Fie $f \in C^{(n)}[a, b]$ și x_i , $i = \overline{0, n}$, puncte distincte în $[a, b]$. Atunci există $c \in \left(\min_{i=\overline{0, n}} x_i, \max_{i=\overline{0, n}} x_i\right)$ astfel încât

$$[x_0, \dots, x_n; f] = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}.$$

- Calculați:

$$D = [x_0, \dots, x_n; x^{n+1}].$$

Polinomul de interpolare Lagrange sub forma lui Newton

Polinomul de interpolare Lagrange sub forma lui Newton

- Avem:

$$L_i(f; x_0, x_1, \dots, x_i)(x) - L_{i-1}(f; x_0, x_1, \dots, x_{i-1})(x) = (x - x_0) \dots (x - x_{i-1}) [x_0, \dots, x_i; f], \quad i = \overline{1, n}.$$

Polinomul de interpolare Lagrange sub forma lui Newton

- Avem:

$$L_i(f; x_0, x_1, \dots, x_i)(x) - L_{i-1}(f; x_0, x_1, \dots, x_{i-1})(x) = (x - x_0) \dots (x - x_{i-1}) [x_0, \dots, x_i; f], \quad i = \overline{1, n}.$$

- Adunăm relațiile de mai sus membru cu membru și obținem:

$$\sum_{i=1}^n [L_i(f)(x) - L_{i-1}(f)(x)] = \sum_{i=1}^n (x - x_0) \dots (x - x_{i-1}) [x_0, \dots, x_i; f].$$

Polinomul de interpolare Lagrange sub forma lui Newton

- Avem:

$$L_i(f; x_0, x_1, \dots, x_i)(x) - L_{i-1}(f; x_0, x_1, \dots, x_{i-1})(x) = (x - x_0) \dots (x - x_{i-1}) [x_0, \dots, x_i; f], \quad i = \overline{1, n}.$$

- Adunăm relațiile de mai sus membru cu membru și obținem:

$$\sum_{i=1}^n [L_i(f)(x) - L_{i-1}(f)(x)] = \sum_{i=1}^n (x - x_0) \dots (x - x_{i-1}) [x_0, \dots, x_i; f].$$

- Se obține **polinomul lui Lagrange sub forma lui Newton**,

$$L_n(f)(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n (x - x_0) \dots (x - x_{i-1}) [x_0, \dots, x_i; f]$$

Restul în interpolarea Lagrange

Restul în interpolarea Lagrange

- Avem:

$$L_{n+1}(f; x_0, \dots, x_n, x_{n+1})(t) - L_n(f; x_0, \dots, x_n)(t) = [x_0, \dots, x_n, x_{n+1}; f] l(t).$$

Restul în interpolarea Lagrange

- Avem:

$$L_{n+1}(f; x_0, \dots, x_n, x_{n+1})(t) - L_n(f; x_0, \dots, x_n)(t) = [x_0, \dots, x_n, x_{n+1}; f] l(t).$$

- Dacă acum alegem $t = x_{n+1}$, obținem:

$$f(x_{n+1}) - L_n(f; x_0, \dots, x_n)(x_{n+1}) = [x_0, \dots, x_n, x_{n+1}; f] l(x_{n+1}).$$

Restul în interpolarea Lagrange

- Avem:

$$L_{n+1}(f; x_0, \dots, x_n, x_{n+1})(t) - L_n(f; x_0, \dots, x_n)(t) = [x_0, \dots, x_n, x_{n+1}; f] l(t).$$

- Dacă acum alegem $t = x_{n+1}$, obținem:

$$f(x_{n+1}) - L_n(f; x_0, \dots, x_n)(x_{n+1}) = [x_0, \dots, x_n, x_{n+1}; f] l(x_{n+1}).$$

- Cum alegerea lui x_{n+1} a fost arbitrară, putem scrie:

$$f(x) - L_n(f; x_0, \dots, x_n)(x) = [x_0, \dots, x_n, x; f] l(x).$$

Restul în interpolarea Lagrange

- Avem:

$$L_{n+1}(f; x_0, \dots, x_n, x_{n+1})(t) - L_n(f; x_0, \dots, x_n)(t) = [x_0, \dots, x_n, x_{n+1}; f] l(t).$$

- Dacă acum alegem $t = x_{n+1}$, obținem:

$$f(x_{n+1}) - L_n(f; x_0, \dots, x_n)(x_{n+1}) = [x_0, \dots, x_n, x_{n+1}; f] l(x_{n+1}).$$

- Cum alegerea lui x_{n+1} a fost arbitrară, putem scrie:

$$f(x) - L_n(f; x_0, \dots, x_n)(x) = [x_0, \dots, x_n, x; f] l(x).$$

- Dacă $f \in C^{(n+1)}[a, b]$, atunci există un punct $\theta := \theta(x) \in [a, b]$, astfel încât

$$f(x) - L_n(f; x_0, \dots, x_n)(x) = l(x) \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}.$$

Convergența polinoamelor Lagrange

Teoremă

Fie $T = (x_{i,j})$ o matrice triunghiulară infinită de noduri și $f \in C^\infty[a, b]$. Notăm cu $M_{n+1} = \|f^{(n+1)}\|_\infty$. Dacă pentru linia de noduri

$$x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$$

considerăm polinomul de interpolare Lagrange

$$L_n(f)(x) := L_n(f; x_{n,0}, \dots, x_{n,n})(x)$$

și dacă există $M > 0$, a.î., $M_{n+1} \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_\infty = 0.$$

Convergența polinoamelor Lagrange

Teoremă

Fie $T = (x_{i,j})$ o matrice triunghiulară infinită de noduri și $f \in C^\infty[a, b]$. Notăm cu $M_{n+1} = \|f^{(n+1)}\|_\infty$. Dacă pentru linia de noduri

$$x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$$

considerăm polinomul de interpolare Lagrange

$$L_n(f)(x) := L_n(f; x_{n,0}, \dots, x_{n,n})(x)$$

și dacă există $M > 0$, a.î., $M_{n+1} \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_\infty = 0.$$

Observație. Condiția $M_{n+1} \leq M$ este esențială în obținerea rezultatului de convergență.

Convergența polinoamelor Lagrange

Teoremă

Fie $T = (x_{i,j})$ o matrice triunghiulară infinită de noduri și $f \in C^\infty[a, b]$. Notăm cu $M_{n+1} = \|f^{(n+1)}\|_\infty$. Dacă pentru linia de noduri

$$x_{n,0}, x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$$

considerăm polinomul de interpolare Lagrange

$$L_n(f)(x) := L_n(f; x_{n,0}, \dots, x_{n,n})(x)$$

și dacă există $M > 0$, a.î., $M_{n+1} \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$, atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\|_\infty = 0.$$

Observație. Condiția $M_{n+1} \leq M$ este esențială în obținerea rezultatului de convergență. Faber și Bernstein au arătat că pentru orice matrice triunghiulară de noduri, există o funcție continuă $f(x)$ pentru care polinoamele $L_n(f)$ diverg.

Interpolarea Hermite pe noduri duble

Fie $f \in C^1[a, b]$ și x_0, \dots, x_n noduri distincte în $[a, b]$. **Problema de interpolare Hermite** constă în determinarea unui polinom $P \in \Pi_{2n+1}$, astfel încât:

$$\begin{aligned}P(x_k) &= f(x_k) \\P'(x_k) &= f'(x_k), \quad k = \overline{0, n}.\end{aligned}$$

Notăție. Polinomul lui Hermite pe nodurile duble x_0, \dots, x_n se notează cu

$$H_{2n+1}(f)(x) \text{ sau } H_{2n+1}(f; x_0, \dots, x_n)(x).$$

Căutăm polinomul de interpolare Hermite sub forma:

$$H_{2n+1}(f)(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)l_k(x) + \sum_{k=0}^n f'(x_k)h_k(x), \quad (1)$$

unde $l_k, h_k \in \Pi_{2n+1}$,

$$\begin{cases} l_i(x_k) = \delta_{i,k} \\ l'_i(x_k) = 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} h_i(x_k) = 0 \\ h'_i(x_k) = \delta_{i,k} \end{cases}$$

Polinoamele fundamentale Hermite

Din condițiile de mai sus, avem

$$l_i(x) = \frac{l^2(x)}{(x - x_i)^2} \left[\frac{1}{l'^2(x_i)} + \frac{x_i l''(x_i)}{[l'(x_i)]^3} - x \frac{l''(x_i)}{[l'(x_i)]^3} \right]$$

Polinoamele fundamentale Hermite

Din condițiile de mai sus, avem

$$l_i(x) = \frac{l^2(x)}{(x - x_i)^2} \left[\frac{1}{l'^2(x_i)} + \frac{x_i l''(x_i)}{[l'(x_i)]^3} - x \frac{l''(x_i)}{[l'(x_i)]^3} \right]$$
$$h_i(x) = \frac{1}{l'^2(x_i)} \frac{l^2(x)}{x - x_i}, \quad i = \overline{0, n}.$$

Proprietăți:

- 1) Diferența divizată pe nodurile duble x_0, \dots, x_n se notează cu $[x_0, x_0, \dots, x_n, x_n; f]$ și este egală cu coeficientul lui x^{2n+1} din $H_{2n+1}(f)(x)$.

Polinoamele fundamentale Hermite

Din condițiile de mai sus, avem

$$l_i(x) = \frac{l^2(x)}{(x-x_i)^2} \left[\frac{1}{l'^2(x_i)} + \frac{x_i l''(x_i)}{[l'(x_i)]^3} - x \frac{l''(x_i)}{[l'(x_i)]^3} \right]$$
$$h_i(x) = \frac{1}{l'^2(x_i)} \frac{l^2(x)}{x-x_i}, \quad i = \overline{0, n}.$$

Proprietăți:

- 1) Diferența divizată pe nodurile duble x_0, \dots, x_n se notează cu $[x_0, x_0, \dots, x_n, x_n; f]$ și este egală cu coeficientul lui x^{2n+1} din $H_{2n+1}(f)(x)$.
- 2) Restul în interpolarea Hermite:

$$f(x) - H_{2n+1}(f)(x) = l^2(x)[x_0, x_0, \dots, x_n, x_n, x; f].$$