Calcul Numeric

Prof. Bogdan Gavrea

CTI 2021

Spline-ul cubic de tip Hermite. Formule de cuadratură

Spline-ul cubic de tip Hermite

Fie $\Delta := \Delta_n : \ 0 = x_0 < ... < x_n = 1$ o diviziune a intervalului $[0, 1]$ și $f \in C[0, 1]$. Funcția $s_3(f) := s_{3,\Delta}(f) := s_{3,\Delta_n}(f)$ se numește spline cubic de tip Hermite dacă este un spline de ordinul 3 și:

$$s_3(f)(x_i) = f(x_i), \ i = \overline{0, n} \tag{1}$$

$$s_3'(f)(x_i) = f'(x_i), \ i = \overline{0, n} \tag{2}$$

Căutăm spline-ul sub forma

$$s_3(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^{n} h_i(x) f'(x_i),$$

Spline-ul cubic de tip Hermite

Fie $\Delta := \Delta_n : \ 0 = x_0 < ... < x_n = 1$ o diviziune a intervalului $[0,1]$ și $f \in C[0,1]$. Funcția $s_3(f) := s_{3,\Delta}(f) := s_{3,\Delta_n}(f)$ se numește spline cubic de tip Hermite dacă este un spline de ordinul 3 și:

$$s_3(f)(x_i) = f(x_i), \ i = \overline{0,n} \tag{1}$$

$$s_3'(f)(x_i) = f'(x_i), \ i = \overline{0,n} \tag{2}$$

Căutăm spline-ul sub forma

$$s_3(f)(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^{n} h_i(x) f'(x_i),$$

$$\begin{cases} l_i(x_k) & = & \delta_{i,k} \\ l_i'(x_k) & = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} h_i(x_k) & = & 0 \\ h_i'(x_k) & = & \delta_{i,k} \end{cases}$$

Spline-urile fundamentale

- Spline-urile $l_0(x)$ și $l_n(x)$

$$l_0(x) = \begin{cases} (x - x_1)^2 \left(\frac{2x}{x_1^3} + \frac{1}{x_1^2} \right), & x \in [0, x_1] \\ 0, & x > x_1. \end{cases}$$

$$l_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{n-1} \\ \frac{(x-x_{n-1})^2}{(1-x_{n-1})^3}(-2x + 3 - x_{n-1}), & x \in [x_{n-1}, 1]. \end{cases}$$

- Spline-urile $l_i(x)$, $0 < i < n$.

$$l_i(x) = \begin{cases} \frac{3(x-x_{i-1})^2}{(x_i-x_{i-1})^2} - \frac{2(x-x_{i-1})^3}{(x_i-x_{i-1})^3}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{3(x-x_{i+1})^2}{(x_i-x_{i+1})^2} - \frac{2(x-x_{i+1})^3}{(x_i-x_{i+1})^3}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Spline-urile fundamentale

- Spline-urile $h_0(x)$ și $h_n(x)$

$$h_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{x_1^2} x(x - x_1)^2, & x \in [0, x_1] \\ 0, & x > x_1. \end{cases}$$

$$h_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{n-1} \\ \frac{1}{(1-x_{n-1})^2}(x - 1)(x - x_{n-1})^2, & x \in [x_{n-1}, 1]. \end{cases}$$

- Spline-urile $h_i(x)$, $0 < i < n$.

$$h_i(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{i-1})^2(x-x_i)}{(x_i-x_{i-1})^2}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{(x-x_{i+1})^2(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_i)^2}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 0, & \text{altfel}. \end{cases}$$

Formule de cuadratură

Fle $w : (a, b) \to \mathbb{R}_+$ o funcție cu proprietatea că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, există și este finită:

$$\int_a^b w(x)x^k dx.$$

Formule de cuadratură

FIe $w : (a, b) \to \mathbb{R}_+$ o funcție cu proprietatea că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, există și este finită:

$$\int_a^b w(x)x^k dx.$$

Definiție

Fie $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{0, n}$ puncte distincte din intervalul $[a, b]$. Se numește formulă de cuadratură cu nodurile simple x_i, $i = \overline{0, n}$ o formulă de forma

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R(f), \tag{3}$$

unde A_k sunt numere independente de funcția f.

Formule de cuadratură

FIe $w : (a, b) \to \mathbb{R}_+$ o funcție cu proprietatea că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, există și este finită:

$$\int_a^b w(x)x^k dx.$$

Definiție

Fie $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{0, n}$ puncte distincte din intervalul $[a, b]$. Se numește formulă de cuadratură cu nodurile simple x_i, $i = \overline{0, n}$ o formulă de forma

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R(f), \tag{3}$$

unde A_k sunt numere independente de funcția f.

Terminologie:

- A_k: coeficienții cuadraturii;

Formule de cuadratură

FIe $w : (a,b) \to \mathbb{R}_+$ o funcție cu proprietatea că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, există și este finită:

$$\int_a^b w(x)x^k dx.$$

Definiție

Fie $x_i \in [a,b]$, $i = \overline{0,n}$ puncte distincte din intervalul $[a,b]$. Se numește formulă de cuadratură cu nodurile simple x_i, $i = \overline{0,n}$ o formulă de forma

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R(f), \tag{3}$$

unde A_k sunt numere independente de funcția f.

Terminologie:

- A_k: coeficienții cuadraturii;
- $R(f)$: restul cuadraturii;

Formule de cuadratură

FIe $w : (a, b) \to \mathbb{R}_+$ o funcție cu proprietatea că pentru orice $k \in \mathbb{N}$, există și este finită:

$$\int_a^b w(x)x^k dx.$$

Definiție

Fie $x_i \in [a, b]$, $i = \overline{0, n}$ puncte distincte din intervalul $[a, b]$. Se numește formulă de cuadratură cu nodurile simple x_i, $i = \overline{0, n}$ o formulă de forma

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R(f), \tag{3}$$

unde A_k sunt numere independente de funcția f.

Terminologie:

- A_k: coeficienții cuadraturii;
- $R(f)$: restul cuadraturii;
- Cuadratura (5) are **ordinul de exactitate** m dacă

$$R(x^k) = 0, k = 0, ..., m \text{ și } R(x^{m+1}) \neq 0.$$

Formule de cuadratură de tip interpolator

Fie $L_n(f; x_0, ..., x_n)$ polinomul de interpolare Lagrange al funcției f pe nodurile $x_0, ..., x_n$,

$$L_n(f; x_0, ..., x_n)(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k).$$

Formule de cuadratură de tip interpolator

Fie $L_n(f; x_0, ..., x_n)$ polinomul de interpolare Lagrange al funcției f pe nodurile $x_0, ..., x_n$,

$$L_n(f; x_0, ..., x_n)(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k).$$

Formulele de cuadratură în care coeficienții A_k sunt dați de:

$$A_k = \int_a^b w(x) l_k(x) dx$$

se numesc **formule de cuadratură de tip interpolator.**

Formule de cuadratură de tip interpolator

Fie $L_n(f; x_0, \dots, x_n)$ polinomul de interpolare Lagrange al funcției f pe nodurile $x_0, \dots, x_n$,

$$L_n(f; x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k).$$

Formulele de cuadratură în care coeficienții A_k sunt dați de:

$$A_k = \int_a^b w(x) l_k(x) dx$$

se numesc **formule de cuadratură de tip interpolator.**
Gradul de exactitate:

Formule de cuadratură de tip interpolator

Fie $L_n(f; x_0, ..., x_n)$ polinomul de interpolare Lagrange al funcției f pe nodurile $x_0, ..., x_n$,

$$L_n(f; x_0, ..., x_n)(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k).$$

Formulele de cuadratură în care coeficienții A_k sunt dați de:

$$A_k = \int_a^b w(x) l_k(x) dx$$

se numesc **formule de cuadratură de tip interpolator.**
Gradul de exactitate:

- O formulă de cuadratură de tip interpolator are gradul de exactitate m, $m \geq n$.

Formule de cuadratură de tip interpolator

Fie $L_n(f; x_0, ..., x_n)$ polinomul de interpolare Lagrange al funcției f pe nodurile $x_0, ..., x_n$,

$$L_n(f; x_0, ..., x_n)(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k).$$

Formulele de cuadratură în care coeficienții A_k sunt dați de:

$$A_k = \int_a^b w(x) l_k(x) dx$$

se numesc **formule de cuadratură de tip interpolator.**

Gradul de exactitate:

- O formulă de cuadratură de tip interpolator are gradul de exactitate m, $m \geq n$.
- Dacă o formulă de cuadratură are gradul de exactitate $m \geq n$, atunci formula este de tip interpolator.

Formula dreptunghiului

Fie $w = 1$ și $n = 0$. Considerăm formule de cuadratura cu un singur nod, i.e.,

$$\int_a^b f(x)dx = A_0 f(x_0) + R(f). \tag{4}$$

Formula dreptunghiului

Fie $w = 1$ și $n = 0$. Considerăm formule de cuadratura cu un singur nod, i.e.,

$$\int_a^b f(x)dx = A_0 f(x_0) + R(f). \tag{4}$$

- Pt ca formula (4) să fie de tip interpolator trebuie ca gradul de exactitate să fie ≥ 0 ($n = 0$) $\Rightarrow A_0 = b - a$.

Formula dreptunghiului

Fie $w = 1$ și $n = 0$. Considerăm formule de cuadratura cu un singur nod, i.e.,

$$\int_a^b f(x)dx = A_0 f(x_0) + R(f). \tag{4}$$

- Pt ca formula (4) să fie de tip interpolator trebuie ca gradul de exactitate să fie ≥ 0 $(n = 0) \Rightarrow A_0 = b - a$.
- Se poate determina x_0 astfel încât gradul de exactitate să fie $(\geq)$ 1?

Formula dreptunghiului

Fie $w = 1$ și $n = 0$. Considerăm formule de cuadratura cu un singur nod, i.e.,

$$\int_a^b f(x)dx = A_0 f(x_0) + R(f). \tag{4}$$

- Pt ca formula (4) să fie de tip interpolator trebuie ca gradul de exactitate să fie ≥ 0 $(n = 0) \Rightarrow A_0 = b - a$.
- Se poate determina x_0 astfel încât gradul de exactitate să fie $(\geq)$ 1?Se obține $x_0 = (b + a)/2$ și se ajunge la formula dreptunghiului

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) + R(f).$$

Formula dreptunghiului

Fie $w = 1$ și $n = 0$. Considerăm formule de cuadratura cu un singur nod, i.e.,

$$\int_a^b f(x)dx = A_0 f(x_0) + R(f). \tag{4}$$

- Pt ca formula (4) să fie de tip interpolator trebuie ca gradul de exactitate să fie ≥ 0 $(n = 0) \Rightarrow A_0 = b - a$.
- Se poate determina x_0 astfel încât gradul de exactitate să fie $(\geq)$ 1?Se obține $x_0 = (b + a)/2$ și se ajunge la formula dreptunghiului

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) + R(f).$$

- Restul în formula dreptunghiului este dat de

$$R(f) = \frac{f''(c)}{24}(b - a)^3,$$

unde $c = c(f) \in [a, b]$.

Formula repetată a dreptunghiului

- Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Considerăm nodurile echidistante

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n},\ k = \overline{0, n}.$$

Formula repetată a dreptunghiului

- Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Considerăm nodurile echidistante

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n},\ k = \overline{0, n}.$$

- Avem:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx.$$

Formula repetată a dreptunghiului

- Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Considerăm nodurile echidistante

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \ k = \overline{0, n}.$$

- Avem:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx.$$

- Fie $f \in C^2[a, b]$. Pe fiecare interval $[x_k, x_{k+1}]$, aplicăm formula dreptunghiului si obținem:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \frac{b-a}{n} f\left(a + (2k+1)\frac{b-a}{2n}\right) + \frac{f''(c_k)}{24}\frac{(b-a)^3}{n^3},$$

unde $c_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$.

Formula repetată a dreptunghiului

- Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Considerăm nodurile echidistante

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \ k = \overline{0, n}.$$

- Avem:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx.$$

- Fie $f \in C^2[a,b]$. Pe fiecare interval $[x_k, x_{k+1}]$, aplicăm formula dreptunghiului si obținem:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = \frac{b-a}{n} f\left(a + (2k+1)\frac{b-a}{2n}\right) + \frac{f''(c_k)}{24}\frac{(b-a)^3}{n^3},$$

unde $c_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$.

- **Formula repetată a dreptunghiului**, $f \in C^2[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (2k+1)\frac{b-a}{2n}\right) + \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(c_n).$$

Formula trapezului. Formula repetată a trapezului.

- Fie $f \in C^2[a,b]$. Formula trapezului se obține din aproximarea funției $f(x)$ cu polinomul Lagrange de interpolare $L_1(f;a,b)(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + R(f).$$

Formula trapezului. Formula repetată a trapezului.

- Fie $f \in C^2[a,b]$. Formula trapezului se obține din aproximarea funției $f(x)$ cu polinomul Lagrange de interpolare $L_1(f;a,b)(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + R(f).$$

- Din interpolarea Lagrange, avem:

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b (x-a)(x-b)[a,b,x;f]dx = -\int_a^b (x-a)(b-x)[a,b,x;f]dx \\ &= -[a,b,c;f]\int_a^b (x-a)(b-x)dx, \text{ unde } c \in [a,b]. \end{aligned}$$

Formula trapezului. Formula repetată a trapezului.

- Fie $f \in C^2[a,b]$. Formula trapezului se obține din aproximarea funției $f(x)$ cu polinomul Lagrange de interpolare $L_1(f;a,b)(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + R(f).$$

- Din interpolarea Lagrange, avem:

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b (x-a)(x-b)[a,b,x;f]dx = -\int_a^b (x-a)(b-x)[a,b,x;f]dx \\ &= -[a,b,c;f]\int_a^b (x-a)(b-x)dx, \text{ unde } c \in [a,b]. \end{aligned}$$

- Folosind formula de medie pentru diferențe divizate, obținem **formula trapezului**:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\theta).$$

Formula trapezului. Formula repetată a trapezului.

- Fie $f \in C^2[a,b]$. Formula trapezului se obține din aproximarea funției $f(x)$ cu polinomul Lagrange de interpolare $L_1(f;a,b)(x)$:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + R(f).$$

- Din interpolarea Lagrange, avem:

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b (x-a)(x-b)[a,b,x;f]dx = -\int_a^b (x-a)(b-x)[a,b,x;f]dx \\ &= -[a,b,c;f]\int_a^b (x-a)(b-x)dx, \text{ unde } c \in [a,b]. \end{aligned}$$

- Folosind formula de medie pentru diferențe divizate, obținem **formula trapezului**:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12}f''(\theta).$$

- Formula repetată a trapezului ($x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $k = \overline{0,n}$):

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + f(b)\right] - \frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(c).$$

Grad maxim de exactitate. Formule de tip Gauss.

- Considerăm formule de cuadratură de forma:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R(f), \tag{5}$$

unde x_k, $k = \overline{0, n}$ sunt noduri distincte. Pentru n fixat, **gradul maxim de exactitate** este $2n+1$.

Grad maxim de exactitate. Formule de tip Gauss.

- Considerăm formule de cuadratură de forma:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R(f), \tag{5}$$

  unde x_k, $k = \overline{0, n}$ sunt noduri distincte. Pentru n fixat, **gradul maxim de exactitate** este $2n + 1$.

- Formulele de cuadratură cu grad maxim de exactitate se numesc **formule de cuadratură de tip Gauss**.

Grad maxim de exactitate. Formule de tip Gauss.

- Considerăm formule de cuadratură de forma:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R(f), \tag{5}$$

  unde x_k, $k = \overline{0, n}$ sunt noduri distincte. Pentru n fixat, **gradul maxim de exactitate** este $2n+1$.

- Formulele de cuadratură cu grad maxim de exactitate se numesc **formule de cuadratură de tip Gauss**. Exemplu: formula dreptunghiului este o formulă de cuadratură de tip Gauss ($n = 0$, grad de exactitate $= 1$).

Grad maxim de exactitate. Formule de tip Gauss.

- Considerăm formule de cuadratură de forma:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R(f), \tag{5}$$

  unde $x_k,\ k = \overline{0, n}$ sunt noduri distincte. Pentru n fixat, **gradul maxim de exactitate** este $2n + 1$.

- Formulele de cuadratură cu grad maxim de exactitate se numesc **formule de cuadratură de tip Gauss**. Exemplu: formula dreptunghiului este o formulă de cuadratură de tip Gauss ($n = 0$, grad de exactitate $= 1$).

- Formulele de cuadratură de tip Gauss fiind formule de tip interpolator este suficient să determinăm nodurile $x_k,\ k = \overline{0, n}$.

Grad maxim de exactitate. Formule de tip Gauss.

- Considerăm formule de cuadratură de forma:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R(f), \tag{5}$$

  unde $x_k,\ k = \overline{0, n}$ sunt noduri distincte. Pentru n fixat, **gradul maxim de exactitate** este $2n + 1$.

- Formulele de cuadratură cu grad maxim de exactitate se numesc **formule de cuadratură de tip Gauss**. Exemplu: formula dreptunghiului este o formulă de cuadratură de tip Gauss ($n = 0$, grad de exactitate $= 1$).
- Formulele de cuadratură de tip Gauss fiind formule de tip interpolator este suficient să determinăm nodurile $x_k,\ k = \overline{0, n}$.
- Vom determina nodurile cuadraturilor de tip Gauss ca fiind rădăcinile polinoamelor ortogonale corespunzătoare.

Grad maxim de exactitate. Formule de tip Gauss.

- Considerăm formule de cuadratură de forma:

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R(f), \tag{5}$$

  unde $x_k,\ k = \overline{0, n}$ sunt noduri distincte. Pentru n fixat, **gradul maxim de exactitate** este $2n + 1$.

- Formulele de cuadratură cu grad maxim de exactitate se numesc **formule de cuadratură de tip Gauss**. Exemplu: formula dreptunghiului este o formulă de cuadratură de tip Gauss ($n = 0$, grad de exactitate $= 1$).

- Formulele de cuadratură de tip Gauss fiind formule de tip interpolator este suficient să determinăm nodurile $x_k,\ k = \overline{0, n}$.

- Vom determina nodurile cuadraturilor de tip Gauss ca fiind rădăcinile polinoamelor ortogonale corespunzătoare. **Observație.** Pe mulțimea $C[a, b]$ introducem produsul scalar definit prin:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx, \quad f, g \in C[a, b].$$

Polinoame ortogonale

Definiție

Fie $w : (a, b) \to \mathbb{R}_+$. *Se numește polinom ortogonal de grad* $n+1$ *relativ la ponderea* w *un polinom* $P \in Pi_{n+1}$ *cu proprietatea*

$$\int_a^b w(x)x^k P(x)dx = 0, \quad k = \overline{0, n}.$$

Polinoame ortogonale

Definiție

Fie $w : (a, b) \to \mathbb{R}_+$. *Se numește polinom ortogonal de grad* $n+1$ *relativ la ponderea* w *un polinom* $P \in Pi_{n+1}$ *cu proprietatea*

$$\int_a^b w(x)x^k P(x)dx = 0, \quad k = \overline{0, n}.$$

Teoremă

Fie $P \in \Pi_{n+1}$ *un polinom ortogonal de grad efectiv* $n+1$ *relativ la ponderea* $w : (a, b) \to \mathbb{R}$. *Atunci* P *are toate rădăcinile reale și distincte situate în* (a, b).

Demonstrație (sketch). P fiind polinom ortogonal de grad $n+1$, avem

$$\int_a^b w(x)P(x)dx = 0,$$

deci $P(x)$ schimbă cel puțin odata semnul în (a, b).

Polinoame ortogonale

Definiție

Fie $w : (a, b) \to \mathbb{R}_+$. *Se numește polinom ortogonal de grad* $n + 1$ *relativ la ponderea* w *un polinom* $P \in Pi_{n+1}$ *cu proprietatea*

$$\int_a^b w(x)x^k P(x)dx = 0, \quad k = \overline{0, n}.$$

Teoremă

Fie $P \in \Pi_{n+1}$ *un polinom ortogonal de grad efectiv* $n + 1$ *relativ la ponderea* $w : (a, b) \to \mathbb{R}$. *Atunci* P *are toate rădăcinile reale și distincte situate în* (a, b).

Demonstrație (sketch). P fiind polinom ortogonal de grad $n + 1$, avem

$$\int_a^b w(x)P(x)dx = 0,$$

deci $P(x)$ schimbă cel puțin odata semnul în (a, b). Fie $x_0, .., x_k \in (a, b)$ punctele în care P(x) schimbă semnul.

Polinoame ortogonale

Definiție

Fie $w:(a,b)\to\mathbb{R}_+$. Se numește polinom ortogonal de grad $n+1$ relativ la ponderea w un polinom $P\in Pi_{n+1}$ cu proprietatea

$$\int_a^b w(x)x^k P(x)dx = 0, \quad k=\overline{0,n}.$$

Teoremă

Fie $P\in\Pi_{n+1}$ un polinom ortogonal de grad efectiv $n+1$ relativ la ponderea $w:(a,b)\to\mathbb{R}$. Atunci P are toate rădăcinile reale și distincte situate în (a,b).

Demonstrație (sketch). P fiind polinom ortogonal de grad $n+1$, avem

$$\int_a^b w(x)P(x)dx = 0,$$

deci $P(x)$ schimbă cel puțin odata semnul în (a,b). Fie $x_0,..,x_k\in(a,b)$ punctele în care P(x) schimbă semnul. Dacă $k=n$ teorema este demonstrată.

Polinoame ortogonale

Definiție

Fie $w : (a, b) \to \mathbb{R}_+$*. Se numește polinom ortogonal de grad* $n+1$ *relativ la ponderea* w *un polinom* $P \in Pi_{n+1}$ *cu proprietatea*

$$\int_a^b w(x)x^k P(x)dx = 0, \quad k = \overline{0, n}.$$

Teoremă

Fie $P \in \Pi_{n+1}$ *un polinom ortogonal de grad efectiv* $n+1$ *relativ la ponderea* $w : (a, b) \to \mathbb{R}$*. Atunci* P *are toate rădăcinile reale și distincte situate în* (a, b)*.*

Demonstrație (sketch). P fiind polinom ortogonal de grad $n+1$, avem

$$\int_a^b w(x)P(x)dx = 0,$$

deci $P(x)$ schimbă cel puțin odata semnul în (a, b). Fie $x_0, .., x_k \in (a, b)$ punctele în care P(x) schimbă semnul. Dacă $k = n$ teorema este demonstrată. Se presupune că $k \leq n-1$ si se ajunge la contradictie cu condiția de ortogonalitate asupra lui $P(x)$.

Polinoame ortogonale

Teoremă

Două polinoame ortogonale de grad $n+1$ în raport cu ponderea $w(x)$ au aceleași rădăcini.

Demonstrație (sketch) Presupunem că P și Q sunt polinoame ortogonale de grad $n+1$ relativ la ponderea $w : (a, b) \to \mathbb{R}$.

Polinoame ortogonale

Teoremă

Două polinoame ortogonale de grad $n+1$ în raport cu ponderea $w(x)$ au aceleași rădăcini.

Demonstrație (sketch) Presupunem că P și Q sunt polinoame ortogonale de grad $n+1$ relativ la ponderea $w:(a,b)\to\mathbb{R}$. Fie

$$\alpha = coeff_{x^{n+1}} P(x) \text{ și } \beta = coeff_{x^{n+1}} Q(x).$$

Polinoame ortogonale

Teoremă

Două polinoame ortogonale de grad $n+1$ în raport cu ponderea $w(x)$ au aceleași rădăcini.

Demonstrație (sketch) Presupunem că P și Q sunt polinoame ortogonale de grad $n+1$ relativ la ponderea $w:(a,b)\to\mathbb{R}$. Fie

$$\alpha = coeff_{x^{n+1}} P(x) \text{ și } \beta = coeff_{x^{n+1}} Q(x).$$

Fie $R(x) = \beta P(x) - \alpha Q(x) \in \Pi_n$.

Polinoame ortogonale

Teoremă

Două polinoame ortogonale de grad $n+1$ în raport cu ponderea $w(x)$ au aceleași rădăcini.

Demonstrație (sketch) Presupunem că P și Q sunt polinoame ortogonale de grad $n+1$ relativ la ponderea $w : (a, b) \to \mathbb{R}$. Fie

$$\alpha = coeff_{x^{n+1}} P(x) \text{ și } \beta = coeff_{x^{n+1}} Q(x).$$

Fie $R(x) = \beta P(x) - \alpha Q(x) \in \Pi_n$.Pe de altă parte avem

$$\int_a^b w(x) x^k R(x) dx = 0,\ k = \overline{0, n}$$

Polinoame ortogonale

Teoremă

Două polinoame ortogonale de grad $n+1$ în raport cu ponderea $w(x)$ au aceleași rădăcini.

Demonstrație (sketch) Presupunem că P și Q sunt polinoame ortogonale de grad $n+1$ relativ la ponderea $w:(a,b)\to\mathbb{R}$. Fie

$$\alpha = coeff_{x^{n+1}} P(x) \text{ și } \beta = coeff_{x^{n+1}} Q(x).$$

Fie $R(x)=\beta P(x)-\alpha Q(x)\in\Pi_n$.Pe de altă parte avem

$$\int_a^b w(x)x^k R(x)dx = 0,\ k=\overline{0,n}$$

Din relația de mai sus avem: $R(x)=0$ adică $\beta P(x)=\alpha Q(x)$.

Polinoame ortogonale clasice

i) **Polinoamele Legendre.** Fie $w : [a, b] \to \mathbb{R}$, $w(x) = 1$. Atunci polinoamele ortoogonale de grad $n + 1$ (numite polinoamele Legendre) au forma:

$$P_{n+1}(x) = k \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[(x - a)^{n+1} (b - x)^{n+1} \right].$$

Polinoame ortogonale clasice

i) **Polinoamele Legendre.** Fie $w : [a, b] \to \mathbb{R}$, $w(x) = 1$. Atunci polinoamele ortoogonale de grad $n + 1$ (numite polinoamele Legendre) au forma:

$$P_{n+1}(x) = k \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[(x-a)^{n+1} (b-x)^{n+1} \right].$$

ii) **Polinoamele Jacobi.** Fie $\alpha, \beta > -1$, $w : (a, b) \to \mathbb{R}$, $w(x) = (x-a)^{\alpha} (b-x)^{\beta}$. Polinoamele de grad $n + 1$, ortogonoale în raport cu ponderea w se numesc polinoamele Jacobi și au forma:

$$J_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = k(x-a)^{-\alpha} (b-x)^{-\beta} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[(x-a)^{\alpha+n+1} (b-x)^{\beta+n+1} \right].$$

În cazul particular $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, $[a, b] = [-1, 1]$, polinoamele corespunzătoare poartă numele de polinoame Chebysev de prima speță și sunt date de

$$T_{n+1}(x) = k \cos[(n+1) arccos x].$$

Polinoame ortogonale clasice

iii) **Polinoamele Laguerre.** Fie $w : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $w(x) = e^{-x}$. Polinoamele de grad $n+1$ ortogonale relativ la ponderea w se numesc polinoame Laguerre și au forma

$$L_{n+1}(x) = ke^{x} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[x^{n+1} e^{-x} \right].$$

Polinoame ortogonale clasice

iii) **Polinoamele Laguerre.** Fie $w : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $w(x) = e^{-x}$. Polinoamele de grad $n+1$ ortogonale relativ la ponderea w se numesc polinoame Laguerre și au forma

$$L_{n+1}(x) = ke^{x} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[x^{n+1} e^{-x} \right].$$

iv) **Polinoamele Hermite.** Fie $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $w(x) = e^{-x^2}$. Polinoamele de grad $n+1$ ortogonale relativ la ponderea w se numesc polinoame Hermite și au forma

$$H_{n+1}(x) = ke^{x^2} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left[e^{-x^2} \right].$$