Ecuaţii diferenţiale. Interpolare.

Metode numerice pentru ecuaţii diferenţiale.
Interpolare polinomială: Lagrange, Hermite pe noduri duble.
Interpolare spline: spline liniar, spline cubic de tip Hermite.

1. Se consideră problema Cauchy

$$\begin{cases} y' &= 1 - 3x + y + x^2 + xy \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

   Folosiţi metoda dezvoltării în serie de puteri pentru a determina coeficienţii puterilor $x^0, x^1, ..., x^5$ din dezvoltarea soluţiei $y(x)$.

2. Să se determine metodele Runge-Kutta de ordin 3.

3. Să se calculeze:

$$\left[0, 1, 2, ..., 100; 5x^{102} + 2015\right].$$

4. Să se calculeze $[1, 2, 3, 4, 5; f]$, unde

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)x^{2013} - 5\sin(\pi x).$$

5. Se consideră problema Cauchy,

$$\begin{cases} y' &= f(t, y) \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

   şi metoda numerică

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[3f(t_n, y_n) - f(t_{n-1}, y_{n-1}\right], \ n = 1, 2, ...$$

   Determinaţi eroarea de trunchiere a metodei de mai sus.

6. Să se determine α şi β astfel încât ordinul erorii de trunchiere al metodei

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\beta f(t_n, y_n) + \frac{3}{4} f\left(t_n + \alpha h, y_n + \frac{2}{3} h f(t_n, y_n)\right)\right)$$

   să fie 3.

7. Polinomul de interpolare Hermite pe nodurile duble a, b se poate da sub forma

$$\begin{aligned} H_3(f)(x) := H_3(f; a, a, b, b)(x) &= \left(1 + 2\frac{x-a}{b-a}\right)\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2 \cdot f(a) \\ &+ \left(1 + 2\frac{b-x}{b-a}\right)\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 \cdot f(b) \\ &+ \frac{(x-a)(b-x)^2}{(b-a)^2} f'(a) \\ &- \frac{(x-a)^2(b-x)}{(b-a)^2} f'(b). \end{aligned}$$

   (a) Verificaţi că polinomul de mai sus este polinomul de interpolare Hermite pe nodurile duble a şi b.

   (b) Arătaţi că

$$\begin{aligned} H_3(f)(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + (x-a)^2[a, a, b; f] \\ &+ (x-a)^2(x-b)[a, a, b, b; f]. \end{aligned} \tag{1}$$

8. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, Δ o diviziune a intervalului $[0, 1]$ şi $s_\Delta(f)$ spline-ul liniar de interpolare a lui f relativ la diviziunea Δ. Să se calculeze:

$$(s_\Delta \circ ... \circ s_\Delta)(f).$$

9. Fie $x_0, ..., x_n$ noduri distincte. Considerăm funcţii de interpolare de forma

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k e^{kx}.$$

   Să se arate că există $c_0, ..., c_n$ unic determinaţi astfel încât

$$G_n(x_i) = y_i, \ i = \overline{0, n},$$

   oricare ar fi numerele reale $y_0, ..., y_n$.

10. Să se determine spline-ul liniar de interpolare $s_\Delta(f)$, dacă

$$f(x) = 5\left|x - \frac{3}{4}\right| + 15\left|x - \frac{1}{3}\right| + 3x + 1$$

   şi $\Delta = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}$.

11. Dacă $f \in C^4[0, 1]$ să se calculeze o estimare a restului în interpolarea prin spline-uri cubice de tip Hermite.

12. Fie $s_\Delta(f)$ spline-ul liniar de interpolare pentru funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, relativ la diviziunea Δ. Să se arate că:

$$s_\Delta(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2} \left[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}; |t-x|\right]_t f(x_k),$$

unde notaţia $\left[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}; |t-x|\right]_t$ indică faptul că diferenţa divizată acţionează asupra variabilei t.

13. Arătaţi că polinomul de interpolare Lagrange pentru datele de mai jos are gradul 3:

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	1	4	11	16	13	-4

14. Următoarele informaţii corespund unui polinom $P(x)$ de grad necunoscut.

x	0	1	2
P(x)	2	-1	4

Să se determine coeficientul lui x^2 din $P(x)$ dacă diferenţa divizată pe oricare patru puncte distincte este egală cu 1.