

4

CALCULUL SECȚIUNILOR ÎN DOMENIUL ELASTO-PLASTIC. APLICAȚIA ASEP

4.1. INTRODUCERE

Privind structurile în cadre ca un ansamblu complex, format din bare și noduri, modelarea corectă a caracteristicilor elasto-plastice ale secțiunilor transversale și ale conexiunilor flexibile de prindere ale barelor în noduri, are o influență fundamentală asupra determinării răspunsului global al structurii în domeniul elasto-plastic. În cazurile în care se urmărește o analiză avansată a comportării unei structuri plane sau spațiale în ansamblul ei, devine necesară cunoașterea valorilor modulului de rigiditate la încovoiere EI și a modulului de rigiditate axial EA , în diferite stadii de solicitare intermediare ale secțiunilor transversale, stabilindu-se o lege continuă de variație a acestora. Determinarea explicită sau aproximarea prin relații analitice a acestor legi stă la baza metodei de analiză neliniară avansată propusă în această lucrare și care este detaliată în capitolul 5 al acestei cărți. Forma cea mai comodă pentru exprimarea variației modulului de rigiditate la încovoiere EI și a modulului de rigiditate axial EA , în funcție de starea de solicitare, se obține utilizând relațiile moment-curbură parametrice în raport cu forța axială ($M-N-\Phi$) respectiv a relațiilor efort axial-deformație axială în funcție de momentul încovoietor ($N-M-\epsilon$). Acestei probleme i-au fost consacrate numeroase cercetări teoretice și experimentale ajungându-se la diverse propuneri de exprimare a relațiilor ($M-N-\Phi$) și ($N-M-\epsilon$), analitice sau prin curbe trasate prin puncte în cazul secțiunilor metalice (Ramberg-Osgood, 1945; Chen, 1971; Chen & Atsuta 1976; Chen & Sohal 1988; Orbison. s.al, 1982; Sanz-Picon, 1992; Attalla s.al., 1995). În principal, modul de determinare a acestor relații analitice constă în aproximarea curbilor experimentale sau numerice, obținute pe baza unor încercări de laborator respectiv pe baza unor programe complexe de analiză a secțiunilor la nivel de fibră (Rotter, J.M, 1985; De Vivo&Rosati, 1998; Rodrigues&Ochoa, 1999; Fafitis, A, 2001; Chen,S.F., ș.al., 2001; Sfakianakis, 2002; Bonet, J.L., s.al., 2004; Chiorean, 2004) prin curbe polinomiale, exponențiale, etc., utilizând diferite metode de interpolare (Attalla s.al., 1995). Câteva din relațiile analitice de determinare a curbilor caracteristice propuse în literatura de specialitate pentru secțiunile

metalice vor fi prezentate în acest capitol. De asemenea este prezentată o metodă originală și unitară de analiză în domeniul elasto-plastic al secțiunilor metalice și din beton armat sau mixte (oțel-beton), elaborată de autorul lucrării, în baza căreia s-a realizat un program de calcul performant.

4.2. ANALIZA SECȚIUNILOR ÎN DOMENIUL ELASTO-PLASTIC

4.2.1 Generalități

O secțiune lucrează în domeniul elastic atâta timp cât eforturile unitare în fibrele cele mai solicitate nu depășesc limita elastică a materialului. Dacă această limită este depășită pe o anumită porțiune a secțiunii, restul secțiunii fiind solicitată în domeniul elastic, secțiunea lucrează în domeniul elasto-plastic, iar dacă limita elastică este depășită pe întreaga secțiune, aceasta lucrează în domeniul plastic.

La calculul secțiunilor în domeniul elasto-plastic și plastic se admit următoarele ipoteze și simplificări:

- 1) Secțiunile transversale rămân plane și la solicitări dincolo de limita elastică, deformațiile având o variație liniară pe înălțimea secțiunii (valabilitatea ipotezei lui Bernouli).
- 2) În cazul secțiunilor neomegene, cum sunt cele din beton armat sau mixte, se acceptă compatibilitatea deformațiilor specifice ale materialelor din care este alcătuită secțiunea.
- 3) Secțiunile au cel puțin o axă de simetrie.
- 4) Curba caracteristică a materialelor din care este alcătuită secțiunea poate fi diferită pentru întindere sau compresiune.

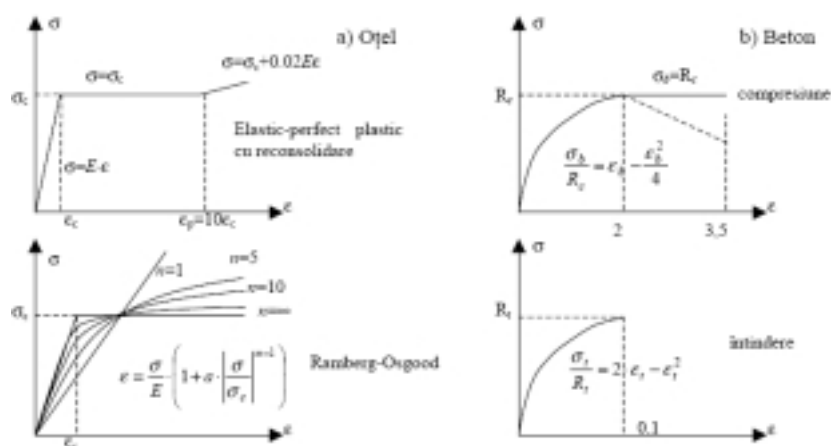


Fig.4.1. Curbe caracteristice schematizate ale materialelor.

Pentru calculele practice, curbele caracteristice reale ale materialelor se înlocuiesc cu una din curbele caracteristice schematizate: curba Prandtl (elastic

perfect plastic) cu sau fără zona de reconsolidare (pentru oțel), curbe exponentiale, parabolice sau multiliniare (pentru beton), curbe parametrice de tip Ramberg-Osgood etc. (fig 4.1).

Răspunsul secțiunilor la eforturi, precum și pătrunderea plastificării în secțiune este determinată în principal de: relațiile constitutive neliniare σ - ϵ folosite la modelarea curbelor caracteristice, forma și dimensiunile secțiunilor, încărcările care solictă secțiunea, lungimea palierului de curgere a materialelor, tensiunile reziduale, în cazul secțiunilor metalice, neomogenitatea secțiunii, deformațiile din curgere lentă și din contracția betonului, în cazul secțiunilor din beton armat sau mixte. Toate acestea impun trecerea de la analiza fenomenului de deformare a elementelor la nivel de secțiune la o analiză la nivel de fibră, cu considerarea cât mai exactă a acestor efecte. Stabilirea caracteristicilor de rigiditate și deformabilitate a secțiunilor impune utilizarea pentru calcule curente a două caracteristici de rigiditate: E – modulul de elasticitate inițial, obținut în prima fază a încărcării, și E_t – modulul de elasticitate tangent, ce se exprimă ca tangentă a funcției $\sigma=f(\epsilon)$. În cazul secțiunilor de beton armat se apelează, de obicei, la modulul de elasticitate secant, E_s denumit modul de deformare.

În cazul secțiunilor metalice, cu curbe caracteristice schematizate ca cele din figura 4.1, modulul de elasticitate tangent este dat de următoarele relații:

$$E_t = \begin{cases} E, \epsilon \leq \epsilon_c \\ 0, \epsilon_c < \epsilon \leq k \cdot \epsilon_c \\ \xi \cdot E, \epsilon > k \cdot \epsilon_c \end{cases} \quad (4.1)$$

Modulul de deformare E_s este necesar în calculul eforturilor și deformațiilor secțiunilor din beton armat sau mixte, în domeniul elasto-plastic. Pentru beton se utilizează relații distincte între eforturi unitare și deformații (fig. 4.1), rezultând următoarele valori pentru modulul de deformare la compresiune respectiv întindere, în cazul încărcărilor de scurtă durată (Nicula&Oneț, 1982):

$$E_s = E \cdot \frac{\frac{\sigma_{b(t)}}{R_{c(t)}}}{2 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma_{b(t)}}{R_{c(t)}}} \right)} \quad (4.2)$$

Dacă încărcările sunt în totalitate sau numai parțial de lungă durată se dezvoltă deformații neelastice de tip vâscos. În acest caz rezultă pentru modulii de deformare la compresiune respectiv întindere, relații generale mai complete decât (4.2):

$$E_s = E \cdot \frac{\frac{\sigma_{b(t)}}{R_{c(t)}}}{2 \cdot (1 + \nu \cdot \varphi) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\sigma_{b(t)}}{R_{c(t)}}} \right)} \quad (4.3)$$

unde ν reprezintă raportul dintre încărcarea de lungă durată și încărcarea totală, iar φ exprimă raportul dintre deformația de curgere lentă și deformația elastică. Dacă

încărcarea este în întregime de lungă durată $\nu=1$, deci influența curgerii lente este completă, iar dacă $\nu=0$ se obțin relațiile (2.2). În cazul în care deformațiile de compresiune depășesc 2 ‰ (în fibra extremă comprimată la încovoiere deformațiile pot depăși această valoare ajungând până la limita de 3.5 ‰) modulul de deformație rezultă ca raport între rezistența de calcul la compresiune și deformația obținută prin calcul.

4.2.2 Analiza $M-N-\Phi$ și $N-M-M$ a secțiunilor de formă oarecare

În majoritatea structurilor în cadre combinația dintre forța axială și momentele încovoietoare constituie una dintre cele mai frecvente forme de solicitare compuse. Determinarea relațiilor moment încovoietor-efort axial-curbură ($M-N-\Phi$), precum și a caracteristicilor de rigiditate la încovoiere (EI) și la compresiune (EA) ținând seama de: forma și dimensiunile secțiunilor, acțiunea momentelor încovoietoare pe cele două direcții principale ale secțiunii, lungimea palierului de curgere a materialului din care este realizată secțiunea, efectele tensiunilor reziduale sau a deformațiilor de curgere lentă asupra plastificării anumitor fibre ale secțiunii, relațiile neliniare constitutive ale materialelor, reprezintă în general o problemă dificilă. În principiu aceste procedee numerice pot fi împărțite în două categorii: prima, presupune un calcul prin încercări succesive de determinare a poziției axei neutre în secțiune care să satisfacă condiția de coliniaritate a rezultatelor eforturilor interioare și exterioare, și odată găsită această poziție, ecuațiile de echilibru oferă valorile capabile ale forței axiale și momentului resultant, iar al doilea procedeu presupune o modelare a secțiunii la nivel de fibră, considerând ecuațiile de compatibilitate între deformații cu considerarea expresă a tensiunilor reziduale sau a deformațiilor de curgere lentă, și aplicarea unor metode numerice de rezolvare a ecuațiilor de echilibru static în secțiune. Metodele din cea de-a doua categorie sunt mai eficiente decât primele sub aspectul timpului de calcul, dar prezintă unele dificultăți în cazul considerării unor încărcări alternante. Metodele din prima categorie bazându-se pe generarea uni șir monoton crescător sau descrescător pentru valorile deformațiilor maxime din fibrele extreme ale secțiunii și impunerea condiției de echilibru static între eforturile axiale interior rezultat și exterior dat, rezultând poziția axei neutre, poate lua în considerare orice tip de încărcare.

Comportarea secțiunilor metalice în domeniul elasto-plastic depinde în mare măsură de distribuția și valorile tensiunilor reziduale pe înălțimea secțiunii. Tensiunile reziduale sunt tensiuni, autoechilibrate, care există pe secțiunea transversală a secțiunilor metalice, înainte de a se aplica sarcina exterioară. Ele apar ca un rezultat al unor deformații plastice suferite în procesul laminării, sudării, ambutisării sau al deformării la rece. Cercetările teoretice și experimentale făcute începând cu anul 1935 (M. Wilson, R.L. Brown) și continuate pînă în prezent au arătat că factorul principal care influențează comportarea stălpilor din oțel este mărimea și distribuția eforturilor unitare reziduale de pe secțiunea transversală.

Aceste tensiuni depind de forma secțiunii, de temperatura de laminare sau de sudare, de condițiile de răcire și de proprietățile materialului. O secțiune transversală care conține eforturi unitare reziduale va avea unele fibre care vor intra în curgere înaintea altora, atunci când secțiunea este încărcată, deoarece în ele există deja unele eforturi reziduale de compresiune.

În cazul secțiunilor de beton armat sau mixte, curgerea lentă a betonului afectează atât starea de eforturi, cât și starea de fisurare și de deformare a secțiunilor și elementelor. În stadiul I de solicitare curgerea lentă are un efect favorabil micșorând eforturile de întindere în beton pe seama creșterii eforturilor de întindere din armătura și întârziind, astfel, momentul apariției fisurilor. După fisurarea elementului, creșterea în timp a deformațiilor betonului din zona comprimată, la un moment încovoietor constant, este însoțită de reducerea eforturilor unitare din această zonă, de creșterea înălțimii zonei comprimate, de o anumită sporire a deformațiilor și eforturilor din armătura întinsă, putând determina intrarea în curgere a armăturii, și de micșorarea brațului de pârghie al eforturilor interioare. Prin urmare, deschiderea fisurilor și săgeata (curbura sau rotirea) elementului înregistrează creșteri însemnate în timp, ca efect al fenomenului de curgere lentă a betonului.

În continuare va fi descris un procedeu numeric cu privire la determinarea caracteristicilor de rigiditate și deformabilitate respectiv a suprafețelor de interacțiune $N-M-M$, în cazul secțiunilor de formă oarecare realizate din beton armat sau mixte oțel-beton, în cazul solicitării la compresiune cu încovoiere biaxială (oblică). Modelarea inelasticității se face la nivel de "fibră" considerând relațiile constitutive neliniare pentru beton și oțel. Metodele numerice propuse sunt metode incremental-iterative și se bazează în principal pe metoda Newton, încorporată într-un procedeu de conducere a analizei în metoda pașilor controlați de lungimea de arc (Crisfield, 1991), pentru rezolvare a sistemului ecuațiilor neliniare de echilibru static în secțiune, dintre eforturile exterioare ce solicită secțiunea și cele interioare corespunzătoare.

Procedeele numerice și programul de calculator elaborat în acest sens, permite studiul comportamentului secțiunilor compozite oțel-beton solicate la compresiune excentrică oblică prin trasarea curbelor moment-curbură parametrică în forță axială ($M-N-\Phi$), respectiv prin trasarea curbelor de interacțiune $N-M_x-M_y$. Având în vedere caracterul general al metodei, în limitele ipotezelor admise în paragraful 4.2.1, raționamentul se va conduce considerând cazul secțiunilor oarecare.

4.2.2.1. Formularea matematică

Se consideră secțiunea de formă oarecare din figura 4.2 supusă la acțiunea concomitentă a efortului axial N_{ext} și a momentelor încovoietoare $M_{x,ref}$ și $M_{y,ref}$. Se consideră valabilă ipoteza secțiunilor plane Bernoulli conform căreia secțiunea rămâne plană și la solicitări dincolo de limita de elasticitate, deformațiile având o variație liniară pe înălțimea secțiunii, și de asemenea în cazul secțiunilor mixte

oțel-beton se presupune perfecta compatibilitate a deformațiilor specifice ale materialelor din care este alcătuită secțiunea. Influența deformațiilor de lunecare se neglijează. În limitele acestor ipoteze de calcul rezultă următoarea expresie pentru deformațiile specifice, pentru un punct oarecare al secțiunii $\mathbf{r} = \{x, y\}$:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \Phi_x y + \Phi_y x = \varepsilon_0 + \Phi \mathbf{r}^T \quad (4.4)$$

unde ε_0 reprezintă deformația axială iar Φ_x, Φ_y reprezintă curbura față de axele principale ale secțiunii.

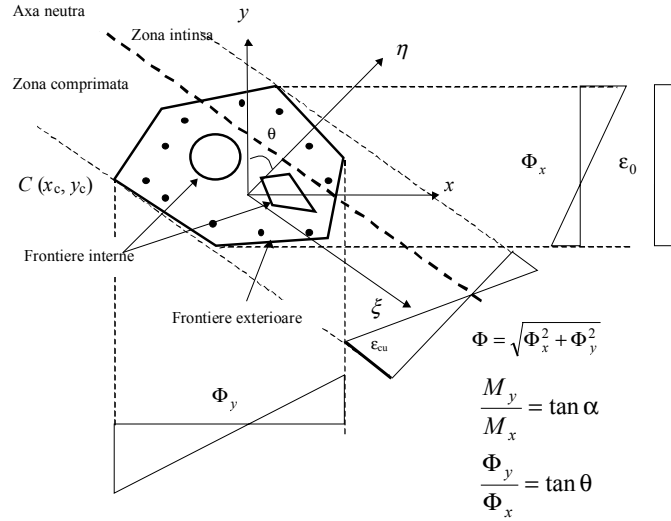


Fig. 4.2. Analiza secțiunilor de formă oarecare solicitate la compresiune cu încovoiere oblică.

Echilibrul este satisfăcut dacă forțele exterioare care acționează secțiunea sunt în echilibru cu cele interne calculate în funcție de starea de tensiune-deformație existentă. Sistemul ecuațiilor de bază se scrie atunci sub forma:

$$\begin{aligned} \int_A \sigma(\varepsilon_0, \Phi_x, \Phi_y) dA - N_{ext} &= 0 \\ \int_A \sigma(\varepsilon_0, \Phi_x, \Phi_y) y dA - \lambda M_{x,ref} &= 0 \\ \int_A \sigma(\varepsilon_0, \Phi_x, \Phi_y) x dA - \lambda M_{y,ref} &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

unde cu λ s-a notat parametrul cu ajutorul căruia se monitorizează intensitatea momentelor încovoietoare exterioare. În cazul în care se dorește determinarea curbelor moment-curbură sistemul (4.5) se poate rezolva simplu prin aplicarea uneia din metodele incremental iterative descrise în cadrul capitolului 3. Relațiile incrementale între eforturi și deformații scriindu-se în acest caz astfel:

$$\begin{bmatrix} \delta N \\ \delta M_x \\ \delta M_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_0 \\ \delta \Phi_x \\ \delta \Phi_y \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

unde:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \iint E_T dA \\ k_{12} &= k_{21} = \iint E_T y dA \\ k_{13} &= k_{31} = \iint E_T x dA \\ k_{22} &= \iint E_T y^2 dA \\ k_{23} &= k_{32} = \iint E_T xy dA \\ k_{33} &= \iint E_T x^2 dA \end{aligned} \quad (4.7)$$

Conducerea iterațiilor în baza relațiilor incrementale (4.6) este prezentată detaliat în lucrarea (Chiorean, 2001) și nu va mai fi prezentată aici. Se face doar observația că dacă se dorește trasarea ramurei descendente a curbei $M-N-\Phi$ aplicarea unei metode cu control în lungimea de arc este recomandată.

Determinarea directă a curbelor de interacțiune $N-M_x-M_y$, reprezintă însă o problemă mai complicată (De Vivo&Rosati, 1998). În cazul secțiunilor din beton armat sau mixte oțel-beton problema poate fi formulată astfel: *Să se gasească valoarea parametrului de încărcare λ astfel încât să fie îndeplinite cel puțin una din următoarele două condiții:*

$$\max_{r \in A_c^*} \{\Phi^* r^T + \varepsilon_0^*\} = \varepsilon_{cu} \quad (4.8)$$

$$\max_{i \in \{1..N_a\}} \{\Phi^* r^T + \varepsilon_0^*\} = \varepsilon_{su} \quad (4.9)$$

unde Φ^* și ε_0^* reprezintă componentele vectorului de deformare generalizat $\mathbf{d} = \{\Phi_x^*, \Phi_y^*, \varepsilon_0^*\}$ soluție a sistemului de ecuații neliniar (4.5), N_a numărul de armături din secțiune, A_c^* reprezintă zona comprimată a secțiunii de beton:

$$A_c^* = \{r \in A_c : \Phi r^T + \varepsilon_0 \leq 0\} \quad (4.10)$$

În formularea de mai sus, se admite faptul că, secțiunile din oțel structural nu își depășesc deformările ultime înaintea atingerii capacității limită a deformărilor de compresiune în fibrele de beton respectiv întindere în cele de armătură. O posibilă soluționare a problemei mai sus menționate ar putea consta în trasarea curbelor moment-curbură pentru o valoare constantă a efortului axial și a raportului momentelor încovoietoare (M_x și M_y) și determinarea punctului de pe această curbă corespunzător depășirii unui criteriu de stare limită ultimă (depășirea valorii ultime a deformăției în fibra de beton comprimat sau în cea de armătură). Această procedură este una mare consumatoare de timp, pentru trasarea unei curbe de

interacțiune fiind nevoie de foarte multe rulări corespunzătoare diferitelor valori ale efortului axial. Trasarea suprafeței de interacțiune $N-M_x-M_y$ poate fi definită prin diferite tehnici cum ar fi (Rodrigues&Ochoa, 1999) (Fig. 4.3): (1) trasarea curbelor de interacțiune pentru diferite rapoarte ale momentelor încovoietoare $\frac{M_y}{M_x} = \tan \alpha = \text{constant}$; (2) curbele de interacțiune pentru $N = \text{constant}$; (3) trasarea curbelor izogonice 3D, $\frac{\Phi_y}{\Phi_x} = \tan \theta = \text{constant}$.

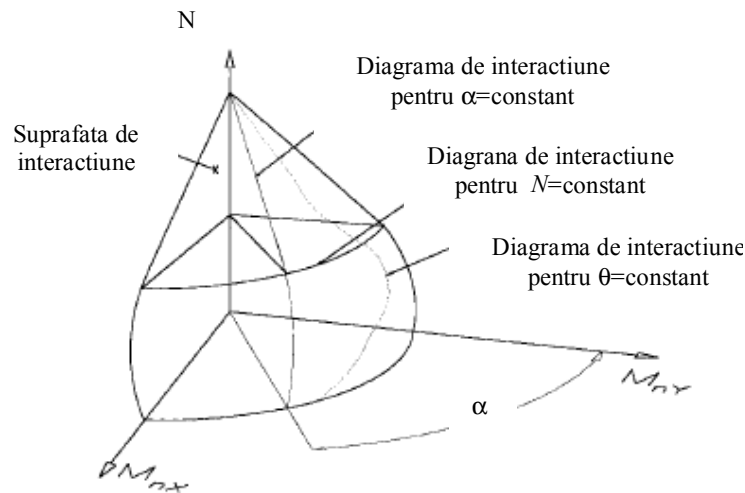


Fig. 4.3. Trasarea diagramelor de interacțiune.

Procedeul numeric descris în continuare face parte din prima categorie și anume, trasarea automată a curbelor de interacțiune pentru valori constante ale raportului momentelor încovoietoare.

4.2.2.2 Metoda de soluționare

Pentru soluționarea problemei mai sus enunțată este aplicat un procedeu numeric original elaborat de autor. Procedeul are la bază o strategie de soluționare incremental-iterativă bazată pe rezolvarea sistemelor de ecuații neliniare cu control în lungimea de arc. Metoda poate fi aplicată la determinarea curbelor de interacțiune $N-M-M$ pentru secțiuni compozite de formă oarecare pentru o valoare prescrisă a raportului $\frac{M_y}{M_x} = \tan \alpha$. Pentru simplificarea expunerii procedurii, în continuare se consideră că suprafața de interacțiune corespunde doar deformațiilor de compresiune maximă din zona de beton comprimată, relația (4.9) fiind omisă

din criteriul de cedare. Considerând în continuare secțiunea din figura 4.2, sistemul de axe principale atașat secțiunii pot fi considerate cu originea fie în centrul de greutate elastic al secțiunii fie în cel plastic. Pe parcursul iterațiilor de echilibrare, pentru fiecare înclinare a axei neutre definită de parametrii Φ_x și Φ_y poate fi determinat punctul aflat pe periferia exterioară a secțiunii la distanța maximă de axa neutră din zona comprimată a secțiunii. Fie x_c, y_c coordonatele acestui punct. Presupunem că în acest punct condiția (4.8) este îndeplinită:

$$\varepsilon_{cu} = \varepsilon_0 + \Phi_x y_c + \Phi_y x_c \quad (4.11)$$

Din relația (4.11) componenta axială a deformației ε_0 poate fi exprimată astfel:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_u - (\Phi_x y_c + \Phi_y x_c) \quad (4.12)$$

Astfel, expresia deformației specifice corespunzătoare curburilor Φ_x și Φ_y poate fi exprimată în formă liniară astfel:

$$\varepsilon(\Phi_x, \Phi_y) = \varepsilon_u + \Phi_x (y - y_c) + \Phi_y (x - x_c) \quad (4.13)$$

În acest fel problema neliniară (4.5) cu restricția (4.8) se reduce la următorul sistem de ecuații neliniar unde necunoscutele problemei sunt curbura Φ_x și Φ_y respectiv factorul de încărcare λ :

$$\begin{aligned} \int_A \sigma(\varepsilon(\Phi_x, \Phi_y)) y dA - \lambda M_{x,ext} &= 0 \\ \int_A \sigma(\varepsilon(\Phi_x, \Phi_y)) x dA - \lambda M_{y,ext} &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Acest sistem poate fi rescris condensat în formă matriceală sub următoarea formă:

$$\mathbf{F}(\lambda, \Phi) = \mathbf{f}^{int} - \lambda \mathbf{f}^{ext} = 0 \quad (4.15)$$

În metodele incremental-iterative, acest sistem de ecuații poate fi rezolvat aplicând metoda cu control în lungimea de arc, de obicei pornind de la valoarea 0 a parametrului λ , și considerând de asemenea o relație suplimentară de constrângere. Fie această ecuație:

$$g(\lambda, \Phi) = 0 \quad (4.16)$$

Prin soluționarea sistemului (4.15) împreună cu relația suplimentară de control a parametrului de încărcare se obține curba de echilibru. Presupunând că un punct $({}^\tau \Phi, {}^\tau \lambda)$ aparținând curbei de echilibrare a fost atins următoarea soluție, $({}^{\tau+1} \Phi, {}^{\tau+1} \lambda)$ este calculată prin rezolvarea sistemului (4.14) și (4.16) prin aplicarea metodei Newton-Raphson:

$$\begin{Bmatrix} {}^{\tau+\Delta\tau} \Phi \\ \Delta\lambda \end{Bmatrix}^{k+1} = \begin{Bmatrix} {}^{\tau+\Delta\tau} \Phi \\ \Delta\lambda \end{Bmatrix}^k - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial g}{\partial \Phi} & \frac{\partial g}{\partial \lambda} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\lambda, \Phi)^k \\ g(\lambda, \Phi)^k \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

unde cu k s-a notat numărul iterației iar Jacobianul sistemului respectiv matricea de rigiditate tangentă a secțiunii rezultă de următoarea formă:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\mathbf{f}_{ext} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \Phi} & \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \lambda} \end{bmatrix}, \mathbf{K}_T = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \Phi} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_{x,int}}{\partial \Phi_x} & \frac{\partial M_{x,int}}{\partial \Phi_y} \\ \frac{\partial M_{y,int}}{\partial \Phi_x} & \frac{\partial M_{y,int}}{\partial \Phi_y} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Derivatele parțiale din relațiile de mai sus se calculează în raport cu starea τ de deformare a secțiunii, astfel încât coeficienții de rigiditate ai matricei de rigiditate a secțiunii pot fi exprimați simbolic astfel:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \frac{\partial M_{x,int}}{\partial \Phi_x} = \frac{\partial}{\partial \Phi_x} \int_A \sigma(\epsilon(\Phi_x, \Phi_y)) y dA = \int_A \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \Phi_x} y dA = \int_A E_T y (y - y_c) dA \\ k_{12} &= \frac{\partial M_{x,int}}{\partial \Phi_y} = \int_A E_T y (x - x_c) dA \\ k_{21} &= \frac{\partial M_{y,int}}{\partial \Phi_x} = \int_A E_T x (y - y_c) dA \\ k_{22} &= \frac{\partial M_{y,int}}{\partial \Phi_y} = \int_A E_T x (x - x_c) dA \end{aligned} \quad (4.19)$$

unde coeficienții k_{ij} pot fi exprimați fie în funcție de valoarea modului tangent de elasticitate E_T , fie în funcție de valoarea modului secant de elasticitate. Alegerea modului tangent de elasticitate are efecte benefice asupra creșterii vitezei de convergență, dar în unele situații cum ar fi cele corespunzătoare formării soluției în origine este de preferat iterarea cu modulul de elasticitate secant. Procedeu (4.17) este aplicat pâna când se atinge unul din criteriile de convergență impuse, cel mai adesea cu control în închiderea (disiparea) forțelor reziduale-diferența dintre forțele exterioare și cele interioare. Factorul de încărcare fiind reactualizat apoi în baza relației:

$$\tau + \Delta\tau \lambda = \tau \lambda + \Delta\lambda \quad (4.20)$$

Curba de interacțiune în spațiul N - M_x - M_y este definită ca locul geometric al punctelor (N^*, M_x^*, M_y^*) care corespund depășirii deformăției limită ultime într-una din fibrele secțiunii. În acest context efortul axial N^* este calculat ca și rezultanta tensiunilor pe secțiune, prin integrarea numerică a acestora, corespunzătoare curburilor Φ_x^* și Φ_y^* soluții ale sistemului (4.14), în timp ce momentele încovoietoare corespunzătoare acestei stări limită M_x^* și M_y^* , sunt obținute prin scalarea momentelor încovoietoare de referință $M_{x,ref}$ și $M_{y,ref}$ prin intermediul factorului de încărcare λ^* dat de ecuația (4.20).

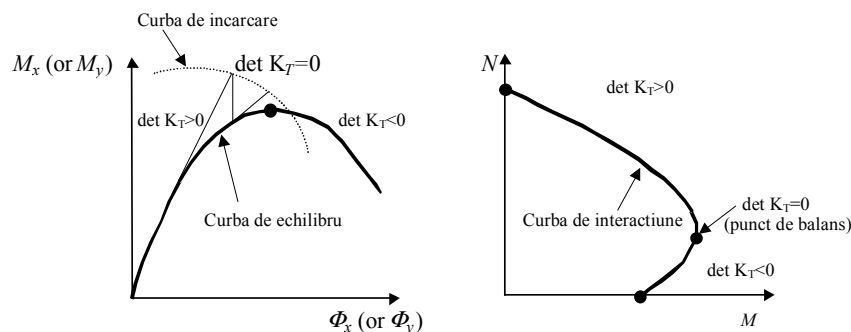


Fig. 4.4. Reprezentarea grafică a metodei.

Reprezentarea grafică a metodei propuse, în concordanță cu ecuația (4.14), este înfățișată în figura 4.4. Trebuie menționat faptul că matricea de rigiditate tangentă a secțiunii transversale K_T dată de ecuațiile (4.19), devine singulară după punctul de balans (Fig. 4.4), astfel încât aplicarea unui procedeu cu controlul încărcărilor și a deformațiilor în lungimea de arc este esențial pentru depășirea acelui punct și în consecință pentru trasarea completă a curbei de interacțiune. În metoda propusă ecuația de constrângere suplimentară luată în considerare este dată de ecuația (Crisfield, 1991):

$$g(\Delta\Phi, \Delta\lambda) = (\tau + \Delta\tau \Phi - \tau \Phi)^T (\tau + \Delta\tau \Phi - \tau \Phi) + \Psi \Delta\lambda^2 f_{ext}^T f_{ext} - \Delta l^2 = 0 \quad (4.21)$$

unde parametrul de scalare are o influență mică asupra condiționării sistemului și de obicei este setat la valoarea zero $\Psi=0$, iar Δl reprezintă lungimea de arc specificată sau calculată pe parcursul unui increment de încărcare. Detalii cu privire la implementarea acestor metode a fost descrisă în capitolul 3 al acestei cărți.

4.2.2.3 Evaluarea coeficienților matricei de rigiditate secționale și a eforturilor interne

În baza teoremei Green de evaluare a integralelor de suprafață, evaluarea numerică a coeficienților matricei de rigiditate a secțiunii respectiv a eforturilor interne se face prin transformarea integralelor de suprafață în integrale curbilinii pe conturul zonelor secțiunilor. Aceasta conduce în general, la un timp de calcul semnificativ mai redus, și de asemenea la obținerea unor valori mai exacte, decât în cazul în care aceste integrale s-ar efectua prin tehnici numerice de integrare a integralelor duble. În plus nu mai este necesară efectuarea procedurii de discretizare a secțiunilor specific metodelor de integrare pe suprafață. În acest scop este necesară o transformare de variabile astfel încât câmpul tensiunilor să devină

uniform pentru o direcție particulară definită de poziția instantanee a axei neutre. Aceasta se realizează printr-o rotație a sistemului de axe la care s-a raportat secțiunea (x,y) la sistemul de axe (ξ, η) orientată paralel respectiv perpendicular față de axa neutră (Fig.4.2):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

unde $\tan \theta = \Phi_y / \Phi_x$. În acest fel câmpul tensiunilor devine unul uniform în direcția paralelă cu axa neutră: $\sigma(\xi, \eta) = \sigma(\eta)$; $E_T(\xi, \eta) = E_T(\eta)$. În urma aplicării acestei transformări eforturile interne ale secțiunii pot fi calculate prin intermediul următoarelor relații:

$$\begin{aligned} N_{\text{int}} &= \iint \sigma(x, y) dx dy = \iint \sigma(\eta) d\xi d\eta \\ M_{x,\text{int}} &= \iint \sigma(x, y) y dx dy = \iint \sigma(\eta) (-\xi \sin \theta + \eta \cos \theta) d\xi d\eta = \\ &= M_{\xi,\text{int}} \cos \theta - M_{\eta,\text{int}} \sin \theta \\ M_{y,\text{int}} &= \iint \sigma(x, y) x dx dy = \iint \sigma(\eta) (\xi \cos \theta + \eta \sin \theta) d\xi d\eta = \\ &= M_{\xi,\text{int}} \sin \theta + M_{\eta,\text{int}} \cos \theta \end{aligned} \quad (4.23)$$

unde N_{int} , $M_{\xi,\text{int}}$ și $M_{\eta,\text{int}}$ sunt eforturile interne (efortul axial, respectiv momentele încovoietoare) raportată la sistemul de axe rotit ξ și η și pot fi calculate prin următoarele relații:

$$\begin{aligned} M_{\xi,\text{int}} &= \iint \sigma(\eta) \eta d\xi d\eta = \oint \sigma(\eta) \eta \xi d\eta \\ M_{\eta,\text{int}} &= \iint \sigma(\eta) \xi d\xi d\eta = \frac{1}{2} \oint \sigma(\eta) \xi^2 d\eta \\ N_{\text{int}} &= \iint \sigma(\eta) d\xi d\eta = \oint \sigma(\eta) \xi d\xi d\eta \end{aligned} \quad (4.24)$$

Folosindu-ne de următoarele notații:

$$\begin{aligned} s_1 &= \iint E_T(\eta) \eta^2 d\xi d\eta = \oint E_T(\eta) \eta^2 \xi d\eta \\ s_2 &= \iint E_T(\eta) \xi^2 d\xi d\eta = \frac{1}{3} \oint E_T(\eta) \xi^3 d\eta \\ s_3 &= \iint E_T(\eta) \xi \eta d\xi d\eta = \frac{1}{2} \oint E_T(\eta) \xi^2 \eta d\eta \\ s_4 &= \iint E_T(\eta) \eta d\xi d\eta = \oint E_T(\eta) \eta \xi d\eta \\ s_5 &= \iint E_T(\eta) \xi d\xi d\eta = \frac{1}{2} \oint E_T(\eta) \xi^2 d\eta \end{aligned} \quad (4.25)$$

elementele matricei de rigiditate a secțiunii pot fi de asemenea calculate astfel:

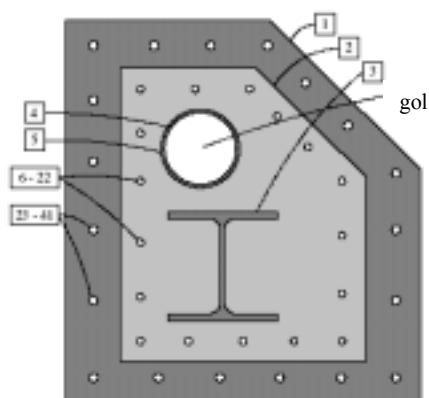
$$\begin{aligned} k_{11} &= S_1 - y_c S_4 \\ k_{12} &= S_3 - x_c S_4 \\ k_{21} &= S_3 - y_c S_5 \\ k_{22} &= S_2 - x_c S_5 \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s & & & \\ s & c & & & \\ & & -2sc & c^2 & s^2 \\ & & c^2 - s^2 & sc & -sc \\ & & 2sc & s^2 & c^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

unde $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$ iar domeniul de integrare se extinde pe fiecare zonă distinctă a secțiunii (cu caracteristici de material distincte), L reprezentând conturul acestor zone, $\sigma(\eta)$ și $E_T(\eta)$ reprezintă valoarea tensiunii respectiv a modulului de elasticitate tangent în fibra aflată la distanța η . Pentru evaluarea numerică integralelor de contur, pe segmentele (L_i) este utilizată metoda Gauss-Lobatto. Avantajul acestei metode față de altele similare constă în faptul că la un același număr de puncte de integrare ca și metoda Gauss-Legendre, spre exemplu, are avantajul că prevede noduri de integrare și la capetele intervalului (capetele conturului), unde în mod frecvent dezvoltările plastice sunt considerabile. Cu toate acestea, deoarece în majoritatea situațiilor câmpul tensiunilor este definit de funcții de tip scară (spre exemplu în cazul curbelor constitutive ale betonului funcția este o parabolă pentru ramura ascendentă urmată de o funcție liniară pentru ramura descendentă) iar în punctul de schimbare de pantă funcția derivată nu mai este continuă, interpolarea polinomială poate conduce la importante erori de integrare numerice (Bonet, ș.al., 2004). Este util în asemenea cazuri, ca secțiunea să fie divizată în subdomenii paralele cu axa neutră a secțiunii corepunzătoare zonelor de continuitate a funcțiilor ce definesc valoarea modulului de elasticitate tangent. Contribuția barelor de armătură nu prezintă dificultăți de calcul, întrucât în modelul de analiză propus, aceste bare sunt considerate ca fibre independente, punctuale și discrete având aria A_{sj} , coordonatele x_{sj} , y_{sj} și valoarea tensiunilor f_{sj} . Rezultanta eforturilor interne date de barele de armături fiind:

$$N_s = \sum_{i=1}^{N_b} A_{sj} f_{sj}; \quad M_{xs} = \sum_{i=1}^{N_b} y_{sj} A_{sj} f_{sj}; \quad M_{ys} = \sum_{i=1}^{N_b} x_{sj} A_{sj} f_{sj} \quad (4.28)$$

Pentru a evita dubla contorizare a ariei de beton care este deslocuită de barele de armătură forțele interne $A_{sj} f_{cj}$ sunt scăzute din forțele interne ale armăturii $A_{sj} f_{sj}$, unde $A_{sj} f_{cj}$ reprezintă forțele interne corespunzătoare betonului din centrul barei de armătură.



Entitatea	Nr. noduri	Material "Constituent"	Material "Deslocuit"
1	5	Beton neconfinat	Nu există
2	5	Beton confinat	Beton neconfinat
3	16	Oțel structural (profil I)	Beton confinat
4	1	Nu există	Oțel structural (profil rotund)
5	1	Oțel structural (profil rotund)	Beton confinat
6-22	17	Bare de armatură	Beton confinat
23-41	19	Bare de armatură	Beton neconfinat

Fig. 4.5. Modelarea secțiunilor complexe.

În cazul secțiunilor complexe, pentru a evita dubla contorizare a materialelor cu caracteristici diferite de material și pentru a reduce efortul de calcul, fiecărei entități constitutive a secțiunii îi este asignată proprietatea de "material deslocuit" așa cum este prezentat în figura 4.5 (Chiorean, 2006). Integrarea numerică pentru materialul "constituent" este luată cu "semnul plus" în timp ce integrarea se face cu "semnul minus" pentru materialul "deslocuit". În cazul secțiunilor din oțel, profile metalice, influența tensiunilor reziduale asupra răspunsului elasto-plastic este determinantă în situațiile de solicitare cu efort axial puternic, astfel că acest efect trebuie să fie luat în considerare. Efectul tensiunilor reziduale pot fi încorporate în algoritmul de calcul descris până acum, cu mențiunea ca aceeași liniarizare a

câmpului de tensiuni trebuie să fie făcută pentru diferitele zone individuale ale secțiunii, corespunzătoare variației tensiunilor reziduale pe înălțimea secțiunii. Spre exemplificare în cazul acceptării unei distribuții a acestor tensiuni conforme cu cea admisă în normele europene de calcul, împărțirea secțiunii în zone distincte poate fi făcută așa cum se prezintă în figura 4.6.

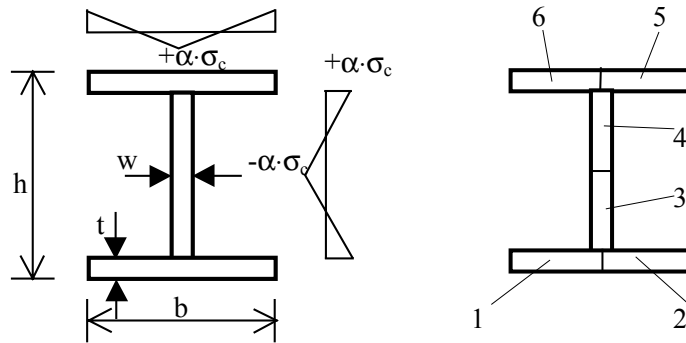


Fig. 4.6. Discretizarea secțiunilor metalice. Efectul tensiunilor reziduale.

Considerând pe mai departe că pe o anumită zonă deformația într-un punct oarecare (x,y) este dată de relația:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \Phi_x \cdot y + \Phi_y \cdot x + \varepsilon_r \quad (4.29)$$

unde cu ε_r s-a notat tensiunea reziduală a cărei exprimare pe zona considerată în calcul poate fi liniarizată astfel:

$$\varepsilon_r = a_1 + a_2 x + a_3 y \quad (4.30)$$

În continuare integralele pentru determinarea eforturilor interne respectiv a coeficienților matricei de rigiditate pot fi efectuate în mod similar cu metoda descrisă anterior dar în acest caz rotirea sistemului de axe trebuie să se realizeze cu valoarea:

$$\tan \theta = \frac{\Phi_y + a_2}{\Phi_x + a_3} \quad (4.31)$$

a. Secțiuni de formă poligonală

În cazul în care conturul secțiunii este asimilat de formă poligonală integrala curbilinie pe acest contur (L) poate fi calculată prin descompunerea integralei pe fiecare segment al poligonului (L_i):

$$\oint_L h(\eta) \xi^p d\eta = \sum_{i=1}^{nL} \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} h(\eta) \xi^p d\eta \quad (4.32)$$

unde s-a notat cu nL numărul de segmente ce formează linia poligonală (L). Delimitarea capetelor segmentelor se face în sistemul $\xi\eta$ ca în figura 4.2. Ecuația unui segment i se scrie astfel:

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha_i + \beta_i \eta \\ \alpha_i &= \xi_i - \beta_i \eta_i \\ \beta_i &= \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\xi_{i+1} - \xi_i}\end{aligned}\quad (4.33)$$

unde (ξ_i, η_i) și (ξ_{i+1}, η_{i+1}) reprezintă coordonatele de start respectiv de sfârșit ale segmentului considerat. Cu aceste relații integrala (4.32) devine:

$$\oint_L h(\eta) \xi^p d\eta = \sum_{i=1}^{nL} \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} h(\eta) (\alpha_i + \beta_i \eta)^p d\eta \quad (4.34)$$

Pentru efectuarea numerică a acestor integrale este utilizată metoda de integrare numerică Gauss-Lobatto:

$$\int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} H(\eta) d\eta = \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{2} \int_{-1}^1 H(u) du = \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{2} \sum_{i=1}^{nIP} \omega_i H(z_i) \quad (4.35)$$

unde z_i sunt punctele de integrare, iar ω_i coeficienții de pondere asociați metodei Gauss-Lobatto iar nIP reprezintă numărul punctelor de integrare.

b. Secțiuni de formă circulară

Pentru calculul secțiunilor de formă circulară, în majoritatea lucrărilor din literatura de specialitate aceste secțiuni sunt discretizate în mod aproximativ prin linii poligonale. Acest mod de abordare va conduce la o soluție aproximativă a problemei analizate pe de o parte, iar pe de altă parte conduce la amplificarea dimesniunilor problemei și la un timp de analiză mult sporit.

În metoda pe care o propunem, integrala de suprafață se descompune pe conturul circular (L) de rază R astfel:

$$\oint_L h(\eta) \xi^p d\eta = \int_{-R}^R h(\eta) (R^2 - \eta^2)^{p/2} d\eta + (-1)^p \int_R^{-R} h(\eta) (R^2 - \eta^2)^{p/2} d\eta \quad (4.36)$$

Aceasta va conduce la un volum de date de intrare semnificativ mai mic (coordoanatele centrului cercului, respectiv raza acestuia) și de asemenea la rezultate mult mai exacte într-un timp de calcul semnificativ redus, cu privire la răpsunsul inelastic al secțiunilor circulare.

4.2.3. Aplicația ASEP. Exemple numerice

Pe baza procedeelelor numerice descrise în paragrafele anterioare s-a elaborat un program de analiză a secțiunilor metalice, din beton armat sau mixte oțel-beton, de

formă oarecare în domeniul elasto-plastic *ASEP* (Analiza Secțiunilor în domeniul Elasto-Plastic). Programul permite analiza acestor tipuri de secțiuni prin reprezentarea curbelor moment-curbură și a diagramelor de interacțiune $N-M-M$. Aplicația este scrisă modular, integrând modulul de analiză scris în C++ în modulele de vizualizare grafică scrise în mediul de programare Visual Basic 5 pentru sisteme de operare Windows 95/98/2000/XP. Comunicarea între acestea realizându-se prin intermediul bibliotecilor cu legare dinamică (DLL). Aplicația dezvoltată pune la dispoziția utilizatorilor o interfață grafică fiind o aplicație de tip multi-document, oferind utilizatorului facilități deosebite pentru pre și post procesarea datelor referitoare la descrierea secțiunilor și prezentarea rezultatelor furnizate de program în urma analizei într-o formă atractivă (Fig. 4.7). Interfața grafică permite generarea ușoară a secțiunilor, definirea relațiilor constitutive pentru fiecare material în parte, reprezentarea stării de tensiune și deformare în secțiune la diferite valori ale solicitărilor exterioare, reprezentarea poziției axei neutre, reprezentarea diagramelor moment încovoietor curbură respectiv a celor de interacțiune $N-M-M$, etc.

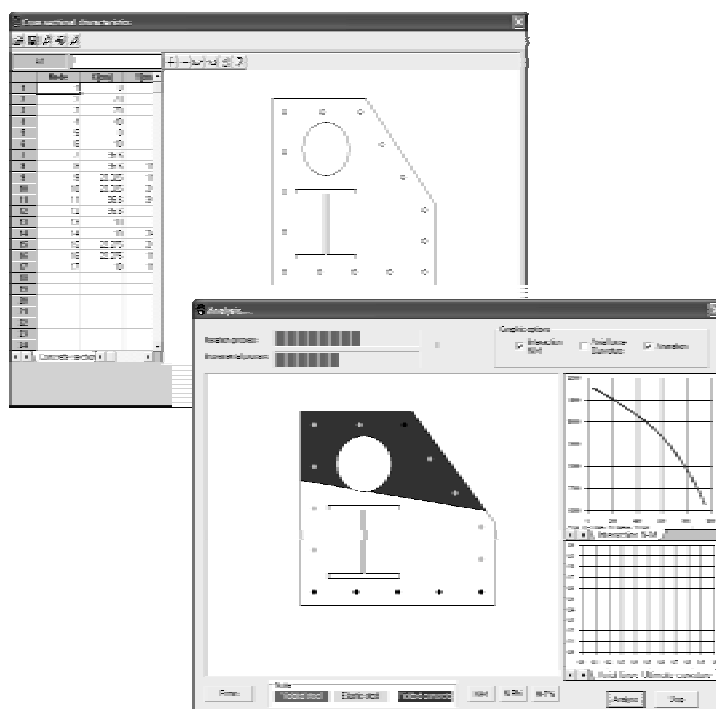


Fig. 4.7. Aplicația *ASEP*-capurti ecran.

Programul în versiunea actuala permite utilizarea a șase modele pentru reprezentarea comportării materialelor: relațiile constitutive EC2 pentru betonul confinat sau neconfinat; modelul elastic-perfect plastic; modelul elastic perfect

plastic cu reconsolidare; modelul Ramberg-Osgood; modelul definit de utilizator prin combinații de funcții liniare. Asignarea acestor tipuri de materiale diferitelor zone ale secțiunii poate fi făcută grafic foarte ușor cu vizualizarea grafică de asemenea într-un sistem de culori codat a fiecărui tip de material.

Acuratetea rezultatelor metodei de calcul prezentate și programului de calculator realizat au fost testate pe o multitudine de exemple prezentate în literatura de specialitate, utilizând metode de calcul diferite de cea propusă de autor. O parte dintre aceste exemple numerice vor fi prezentate în continuare.

4.2.3.1 Exemplul de calcul 1. Influența tensiunilor reziduale asupra răspunsului elasto-plastic al secțiunilor metalice

Comportarea secțiunilor metalice în domeniul elasto-plastic depinde în mare măsură de distribuția și valorile tensiunilor reziduale pe înălțimea secțiunii. Aceste tensiuni sunt determinate de forma secțiunii, de temperatura de laminare sau de sudare, de condițiile de răcire și de proprietățile materialului. Tensiunile reziduale sunt tensiuni, autoechilibrate, care există pe secțiunea transversală a secțiunilor metalice, înainte de a se aplica sarcina exterioară (fig.4.8), eforturile interioare date de acestea fiind nule:

$$\int_A \sigma_r \cdot y \cdot dA = 0; \quad \int_A \sigma_r \cdot x \cdot dA = 0; \quad \int_A \sigma_r \cdot dA = 0 \quad (4.37)$$

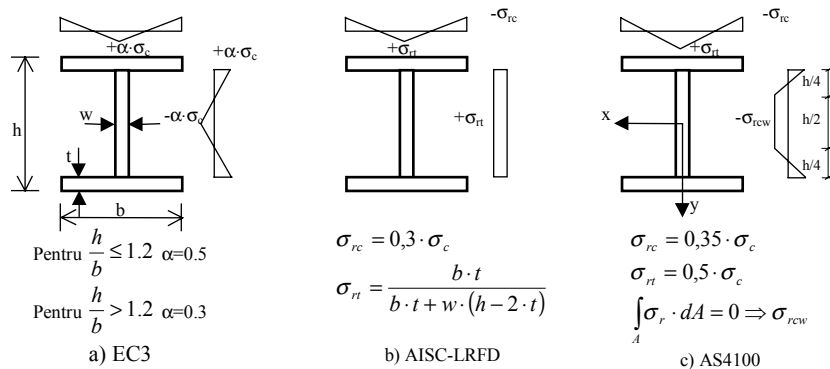


Fig. 4.8. Valorile și distribuția tensiunilor reziduale în secțiune.

O secțiune transversală care conține eforturi unitare reziduale va avea unele fibre care vor intra în curgere înaintea altora, atunci când secțiunea este încărcată, deoarece în ele există deja unele eforturi reziduale de compresie sau întindere, rezultând o comportare diferită a secțiunilor comprimate față de cele întinse (fig.4.8). Astfel pentru un profil I, tensiunile de compresie cele mai importante apar la capetele tălpilor, mărimea lor variind în funcție de raportul h/b , unde h este

înălțimea profilului, iar b este lățimea tălpii și de caracterul profilului (cu intradosul tălpii orizontal sau înclinat spre conșeuri), între $\sigma_{rc}=(0\ldots0,5)\sigma_c$. Distribuția tensiunilor reziduale în lungul liniei mediane a profilului depinde în mare măsură de procesul de laminare și prezintă în consecință variații mari. De aceea, aproximările în ceea ce privește distribuția și valorile acestor tensiuni pe înălțimea secțiunii, prevăzute în codurile de proiectare, este pur convențională. În figura 2.10 sunt prezentate prevederile codurilor de proiectare EC3, AISC-LRFD și AS4100 cu privire la distribuția și valorile tensiunilor reziduale. Având în vedere caracterul aleator al tensiunilor reziduale, aceste valori trebuie privite cu rezerva specifică distribuțiilor statistice. În figurile 4.9-4.12 sunt prezentate comparativ curbele moment-curbură parametrică în forță axială, pentru o secțiune W8x31 ($E=200\text{N/mm}^2$, $\sigma_c=25\text{N/mm}^2$), considerând cazul unor forțe axiale de întindere respectiv compresiune, rezultate în urma unei analize a secțiunii la nivel de fibră, pe baza programului *ASEP*. În analiza făcută s-au considerat valorile și distribuțiile tensiunilor reziduale în secțiune conform celor prevăzute în codurile europene EC3, respectiv american AISC-LRFD, iar relațiile constitutive σ - ϵ avute în vedere sunt cele prevăzute de codul european EC3 (elastic-perfect plastic) și reprezentate în fig.4.1a. S-a analizat atât cazul încovoierii după axa de inerție minimă cât și cazul încovoierii după axa de inerție maximă. Efectul mai defavorabil al tensiunilor reziduale față de axa de inerție minimă se explică prin faptul că în cazul profilelor I cu tălpi late, tensiunile reziduale de compresiune, maxime la capetele tălpii, afectează toate fibrele extreme, de pondere maximă.

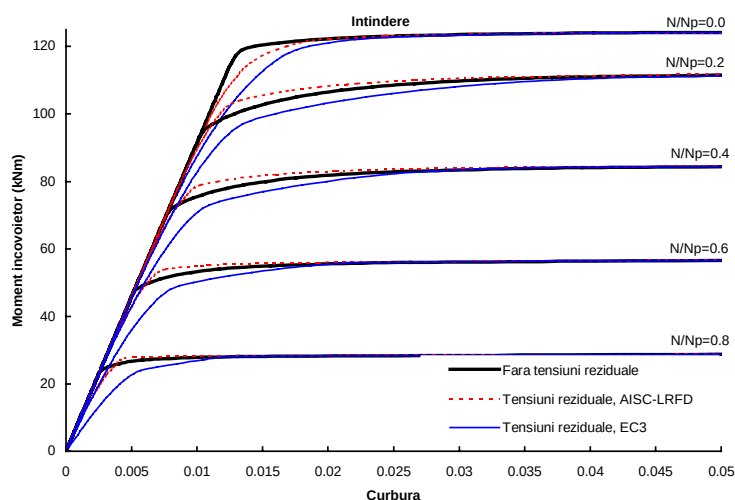


Fig. 4.9. Curbele M - N - Φ pentru secțiunea W8x31 considerând încovoierea în planul de rigiditate maxim și forțe axiale de întindere.

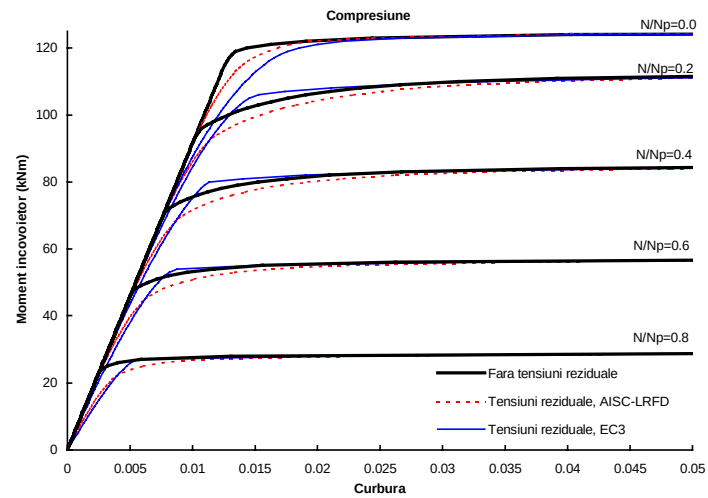


Fig. 4.10 Curbele $M-N-\Phi$ pentru secțiunea W8x31 considerând încovoierea în planul de rigiditate maxim și forțe axiale de compresiune.

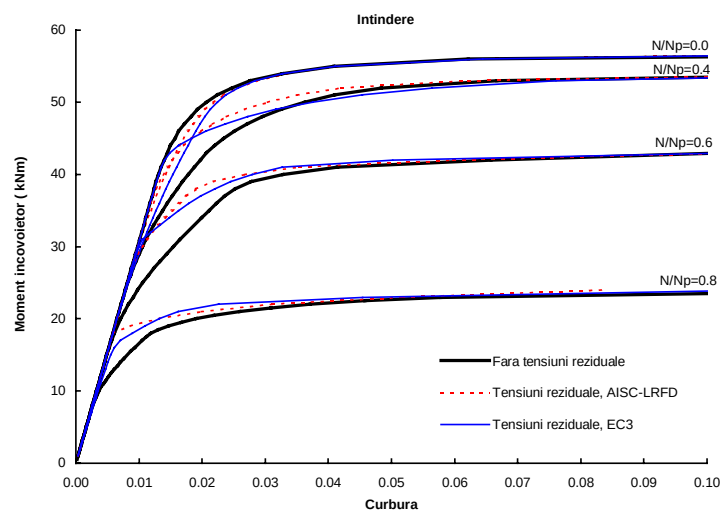


Fig. 4.11. Curbele $M-N-\Phi$ pentru secțiunea W8x31 considerând încovoierea în planul de rigiditate minim și forțe axiale de întindere.

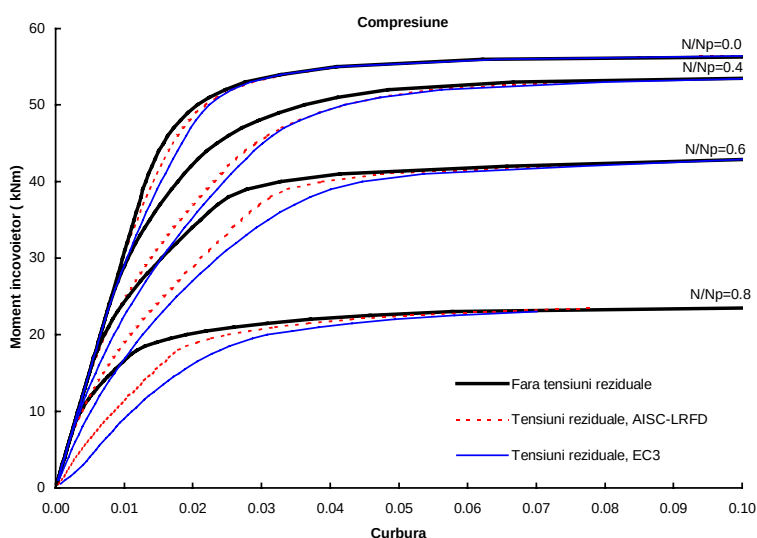


Fig. 4.12 Curbele $M-N-\Phi$ pentru secțiunea W8x31 considerând încovoiera în planul de rigiditate minim și forțe axiale de compresiune.

În cazul încovoierii în planul de inerție maximă, fibrele extreme față de axa de inerție maximă prezintă, în schimb, tensiuni reziduale atât de compresiune, cât și de întindere (fig. 4.8). De asemenea se constată comportamentul diferit al secțiunii sub forțe axiale de compresiune respectiv de întindere, datorat efectului tensiunilor reziduale. Prin urmare trebuie ținut cont de acest lucru la stabilirea relațiilor analitice $M-N-\Phi$ deși, în cele mai multe cazuri atenția se concentrează asupra cazului de compresiune, considerat mai restrictiv.

În cazul secțiunilor compuse prin sudură, tensiunile de întindere apar în dreptul depunerii cordoanelor de sudură longitudinale și sunt introduse de scurtarea împiedicată a acestor zone, puternic încălzite în cadrul procesului de sudare, supuse apoi răcirii. Astfel, la secțiunea compusă I, tensiunile de compresiune cele mai importante apar în mod obișnuit tot la capătul tălpilor, fiind de regulă până la de doua ori mai mari ca la profilele laminate.

4.2.3.2 Exemplul de calcul 2. Trasarea curbelor de interacțiune N-M-M pentru o secțiune de beton armat.

În acest exemplu de calcul se urmărește trasarea diagramelor de interacțiune $N-M_x-M_y$ cu ajutorul programului *ASEP*, pentru secțiunea de formă din figura 4.14.a și compararea acestora cu rezultatele din literatura de specialitate. Secțiunea este solicitată la încovoiere oblică considerând pentru raportul momentelor încovoietoare valoarea unghiului $\alpha = 26.57^\circ$. Forma secțiunii, caracteristicile geometrice și poziționarea armăturilor în secțiune este reprezentată în fig. 4.14.a.

Relațiile constitutive ale betonului din zona comprimată sunt reprezentate prin combinația unei parabole de gradul doi pentru ramura ascendentă urmată de o variație liniară pentru zona descendentă (Fig.4.13a):

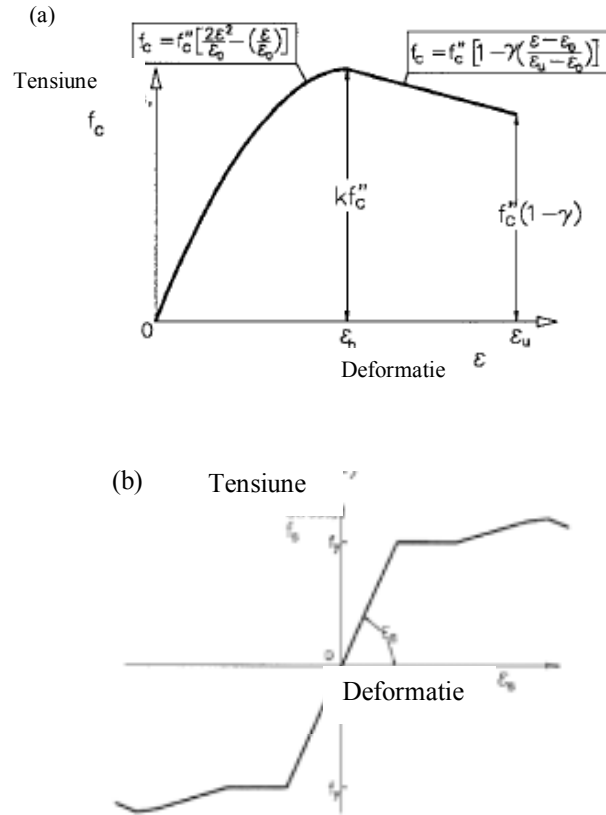


Fig. 4.13. Relațiile constitutive pentru betonul din zona comprimată și armăturile din oțel.

$$\begin{aligned}
 f_c &= f_c'' \left[\frac{2\varepsilon^2}{\varepsilon_0} - \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right) \right], \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\
 f_c &= f_c'' \left[1 - \gamma \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_u - \varepsilon_0} \right) \right], \varepsilon > \varepsilon_0
 \end{aligned}
 \tag{4.38}$$

unde cu ε_0 s-a notat deformația specifică limită a betonului la compresiune, ε_u deformația specifică limită ultimă, f_c'' rezistența la compresiune a betonului, γ s-a notat gradul de confinare al betonului. Rezistența la întindere a betonului se neglijează. Oțelul este schematizat prin relații constitutive elasto-plastice cu reconsolidare (Fig. 4.13b).

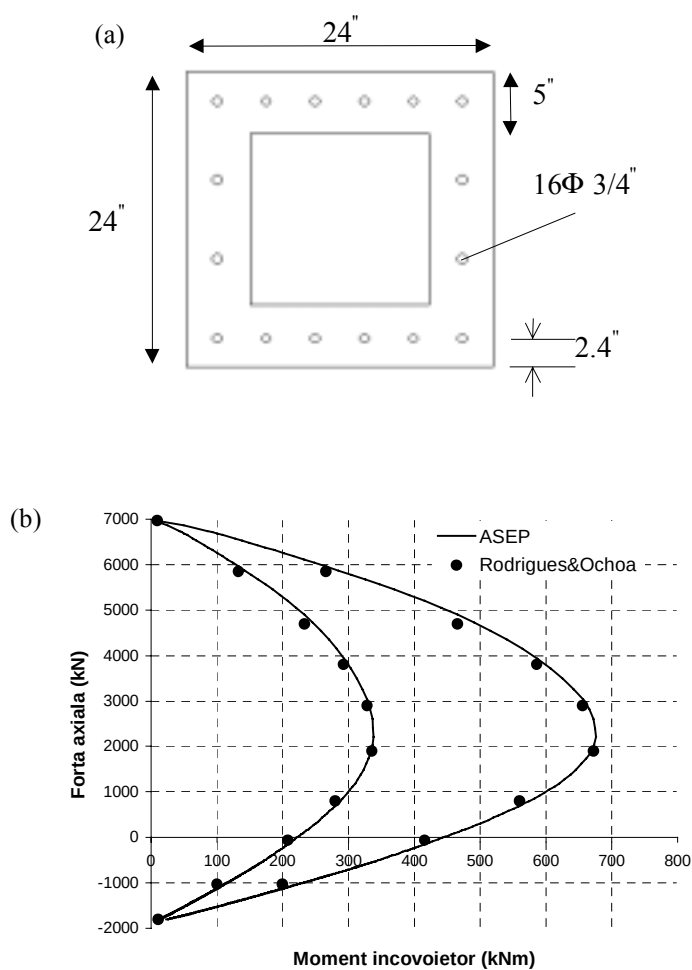


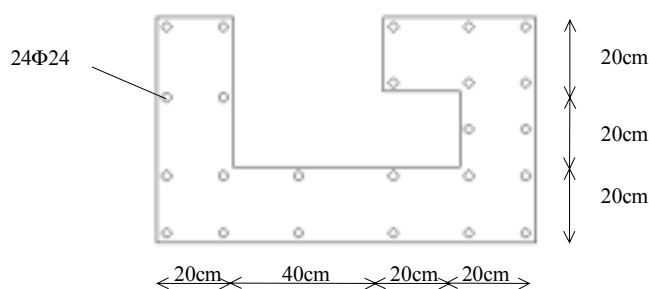
Fig. 4.14.Exemplul 2.(a) Caracteristicile geometrice și poziționarea armăturilor în secțiune; (b) Diagramele de interacțiune.

În exemplul de calcul se consideră următoarele valori în relațiile constitutive ale betonului comprimat și ale oțelului din armături: $f'_c = 27.58 \text{ Mpa}$, $\epsilon_u = 0.0038$, $\epsilon_0 = 0.002$, $f_c'' = 0.85 f'_c$, $\gamma = 0.15$, $f_y = 413.69 \text{ Mpa}$. În Figura 4.14.b sunt prezentate comparativ curbele de interacțiune corespunzătoare celor două direcții de încovoiere obținute cu programul ASEP și cele obținute de Rodrigues și Ochoa (Rodrigues&Ochoa, 1999). Se constată o foarte bună concordanță între rezultatele furnizate de programul ASEP și cele de referință pentru ambele direcții de încovoiere.

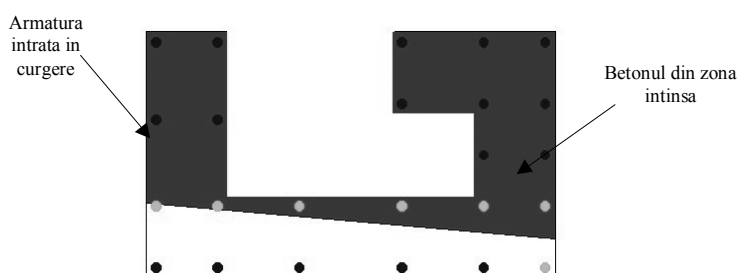
4.2.3.3. Exemplul de calcul 3. Trasare curbilor de interacțiune pentru o secțiune din beton armat asimetrică

Următorul exemplu de calcul constă în determinarea curbilor de interacțiune pentru diferite valori ale raportului $\frac{M_y}{M_x} = \tan \alpha$ și compararea acestor rezultate cu cele din literatura (De Vivo&Rosati, 1998). Secțiunea asimetrică este prezentată în Fig. 4.15.a împreună cu caracteristicile geometrice și dispunerea armăturilor în interiorul secțiunii. Se folosesc aceleași modele constitutive pentru betonul comprimat și barele de armături ca și în exemplul anterior cu următoarele caracteristici: $f'_c = 11.023$ Mpa, $f_y = 326.08$ Mpa, $\epsilon_0 = 0.002$, $\epsilon_u = 0.0035$, $\gamma = 0$, $f'_c = f'_c$.

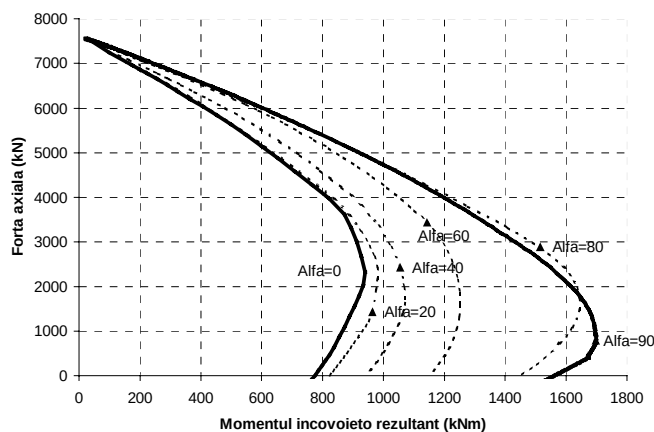
În figura 4.15.c sunt prezentate curbile de interacțiune obținute cu ajutorul aplicației *ASEP* pentru diferite valori ale unghiului $\alpha = 0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ și 90° . Tabelul 4.1 prezintă valorile comparative ale rezultatelor obținute cu metoda propusă și cea din literatura Vivo&Rosati 1998.



(a) Configurația geometrică și dispunerea barelor de armătură.



(b) Secțiunea intrată în domeniul elasto-plastic (intrarea în curgere a betonului din zona întinsă, armături intrate în curgere).



(c) Diagramele de interacțiune.

Fig. 4.15. Exemplul de calcul 3.

Tabelul 4.1. Rezultate comparative între metoda propusă și cele din literatură.

M_y (kNm)	M_x (kNm)	N (kN)	
		Vivo&Rossati 1998	ASEP Metoda propusă
0.00	500	5750	5650
700	500	4790	4750
1030	500	2350	2510
0.00	240	6850	6750
840	240	5750	5670

4.2.3.4. Exemplul de calcul 4. Trasarea curbelor de interacțiune pentru o secțiune din beton armat inelară

Pentru secțiunea de formă inelară având caracteristicile geometrice și distribuția armăturilor ca în Fig. 4.16.a se cere să se determine diagrama de interacțiune $N-M$ pentru o valoare a unghiului $\alpha = 26.57^\circ$. Acest exemplu de calcul a fost propus de Rodrigues și Ochoa 1999. Modelele constitutive pentru beton și barele de

armatură sunt aceleași ca în exemplele de calcul anterioare cu următoarele caracteristici: $f'_c = 27.58$ Mpa, $f_y = 413.69$ Mpa, $\epsilon_0 = 0.002$, $\epsilon_u = 0.0038$, $\gamma = 0.15$, $f'_c = 0.85 f'_c$. Figura 4.16.b prezintă curba de interacțiune obținută cu programul ASEP.

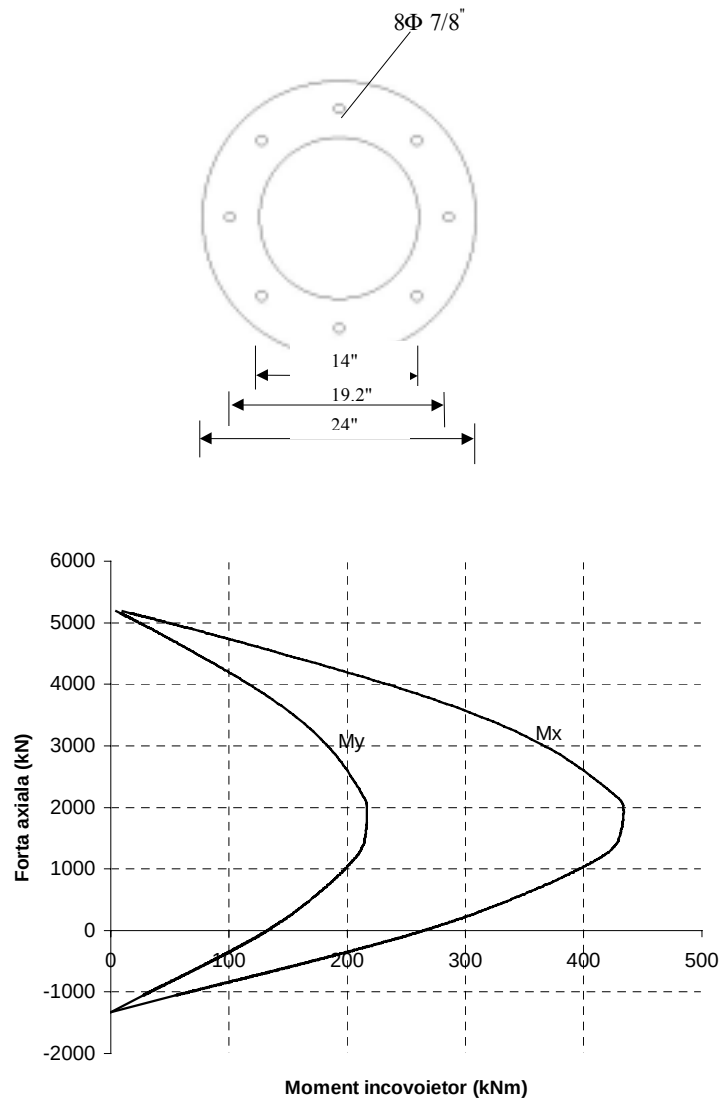
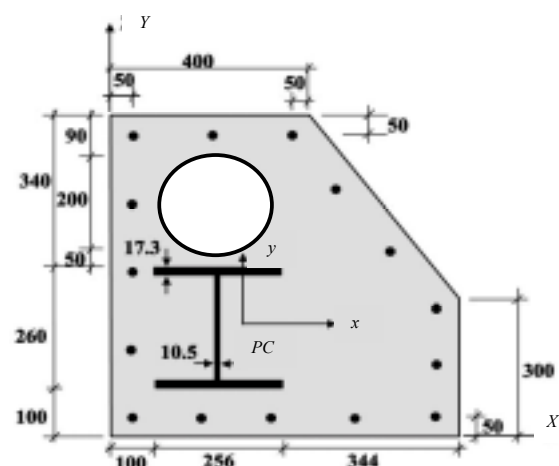


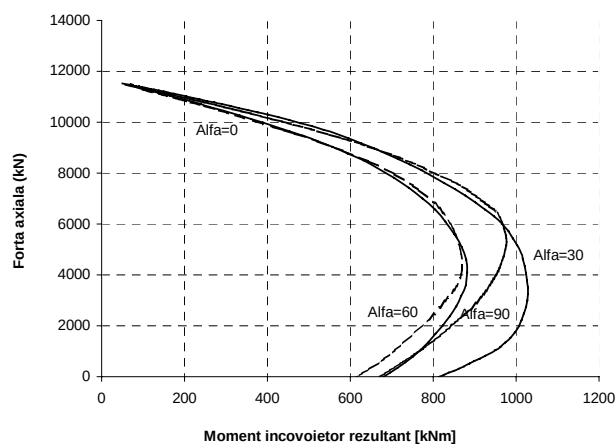
Fig. 4.16. Exemplul de calcul 4. (a) Caracteristicile secționale; (b) Diagramele de interacțiune.

4.2.3.5 Exemplul de calcul 5. Trasarea curbelor de interacțiune pentru o secțiune compozită (oțel-beton)

Secțiunea compozită oțel-beton din figura 4.17.a este constituită dintr-o matrice de beton, 15 bare de oțel de armatură de diametru 18mm și un profil I de oțel. În matricea de beton este practicat un gol cu diametrul de 200 mm. Caracteristicile geometrice ale secțiunii precum și dispunerea armăturilor, a profilului metalic și a golului sunt prezentate în Fig. 4.17.a.



(a) Caracteristicile secțiionale.



(b) Diagramele de interacțiune.

Fig. 4.17. Exemplul de calcul 5.

Acest exemplu a fost propus de Chen (Chen, S.F., s.al. 2001). Caracteristicile de rezistență ale betonului, oțelului structural și ale armăturilor sunt: $f_c=30\text{Mpa}$, $f_{st}=355\text{Mpa}$ and $f_s=460\text{Mpa}$. Aceste valori sunt reduse prin împărțirea la factorii de siguranță $\gamma_c=1.50$, $\gamma_{st}=1.10$ și $\gamma_s=1.15$. Curbele tensiune-deformație pentru betonul comprimat sunt cele utilizate în exemplele anterioare, o parabolă de gradul al II-lea pentru ramura ascendentă, respectiv o variație liniară pentru ramura descendentă cu deformația specifică limită $\epsilon_0=0.002$ și cea ultima $\epsilon_{cu}=0.0035$. Modulul de elasticitate pentru toate secțiunile de oțel este de 200GPa în timp ce valoarea maximă a deformației se consideră de $\epsilon_u=\pm 1\%$.

Figura 4.17.b reprezintă curbele de interacțiune pentru secțiunea compozită pentru diferite valori ale unghiului $\alpha=0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Momentele încovoietoare în acest exemplu sunt calculate față de axele x - y , fixate în centrul plastic al secțiunii.

4.2.3.6 Exemplul de calcul 6. Trasarea curbelor moment încovoietor-curbură pentru o secțiune din beton armat

Forma și caracteristicile geometrice precum și distribuția armăturilor pe înălțimea secțiunii de beton armat sunt prezentate în figura 4.18. Acest exemplu de calcul are drept scop trasarea curbelor moment încovoietor-curbură (M - N - Φ) pentru secțiunea din figură solicitată la încovoiere oblică cu efort axial și compararea rezultatelor obținute prin metoda propusă în această lucrare cu cele din literatura de specialitate internațională (Rodrigues&Ochoa, 1999).

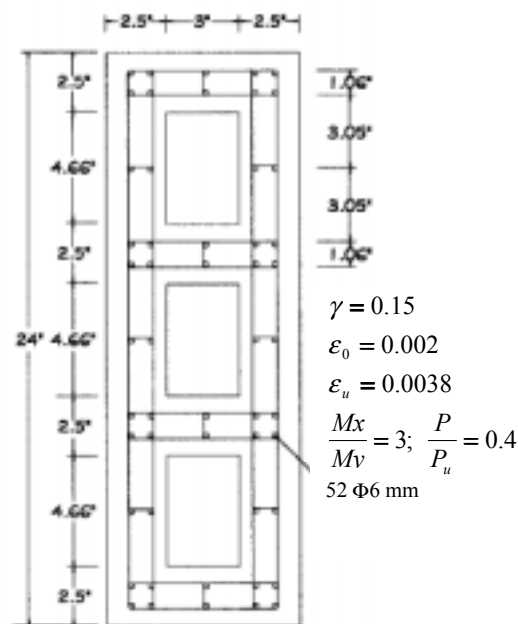


Fig. 4.18. Caracteristicile geometrice și dispunerea armăturilor.

Modelele constitutive pentru beton și barele de armătură sunt aceleași ca în exemplele de calcul anterioare cu următoarele caracteristici de rezistență: $f'_c = 34.47$ Mpa, $f_y = 421.22$ Mpa, $\epsilon_0 = 0.002$, $\epsilon_u = 0.004$, $\gamma = 0.15$, $f''_c = f'_c$. Modulul de elasticitate longitudinal al barelor de armătură fiind $E_a = 210267$ Mpa. Secțiunea este solicitată la încovoiere oblică cu $\frac{M_y}{M_x} = \tan \alpha = 1/3$ și efort axial de compresiune $P = 0.4P_u$, unde P_u reprezintă valoarea efortului axial capabil de compresiune al secțiunii în absența momentelor încovoietoare.

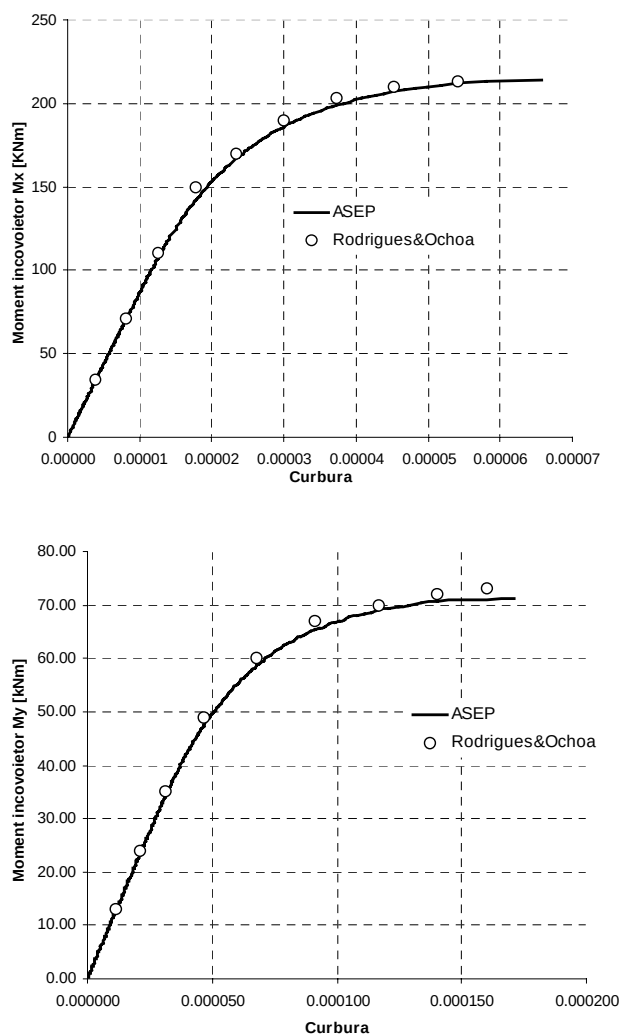


Fig. 4.19. Curbele M-N- Φ .

În figura 4.19 sunt prezentate curbele $M-N-\Phi$ obținute cu programul *ASEP* și cele obținute de Rodrigues și Ochoa. Se poate constata o foarte bună concordanță între rezultatele obținute. În figura 4.20 este prezentată starea de plastificare a secțiunii corespunzătoare valorii deformației specifice ultime, $\epsilon_u=0.004$ în fibra de beton comprimat.

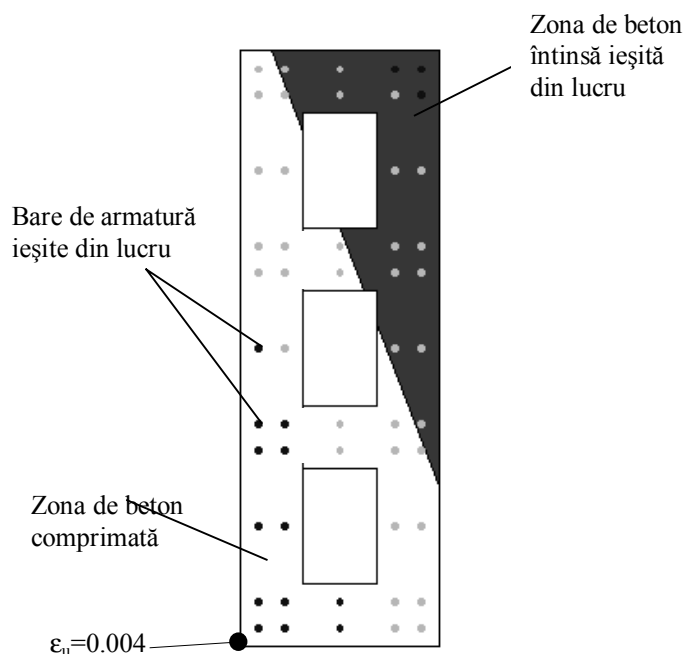


Fig. 4.20. Secțiunea intrată în domeniul elasto-plastic (intrarea în curgere a betonului din zona întinsă, armături intrate în curgere).

4.3.RELAȚII ANALITICE ȘI CVAȘIANALITICE PENTRU MODELAREA CURBELOR CARACTERISTICE ALE SECȚIUNILOR METALICE

Formularea într-o expresie analitică a relațiilor moment încovoietor-efort axial-curbură ($M-N-\Phi$) care să acopere întreg domeniul de variație a eforturilor și care să țină seama de caracteristicile geometrice și fizice ale secțiunilor metalice este un proces dificil dar nu imposibil de realizat. Stabilirea unor legi adecvate moment încovoietor-efort axial-curbură face obiectul a numeroase studii în literatura de specialitate, fiind propuse în acest sens diferite relații pe baza confruntării cu rezultate obținute experimental precum și printr-o analiză complexă la nivel de

fibră a secțiunii pe baza unor programe specializate (Ramberg-Osgood, 1945; Chen, 1971; Chen & Atsuta 1976; Chen & Sohal 1988; Orbison. ș.al, 1982; Sanz-Picon, 1992; Attalla ș.al., 1995).

4.3.1 Relații moment încovoietor-curbură de tip Ramberg-Osgood

Una dintre cele mai populare și mai utilizate expresii analitice care modelează aproximativ relația moment-curbură în secțiune este cea propusă de Ramberg și Osgood (Ramberg & Osgood, 1945). Inițial această propunere s-a referit la legile de variație a tensiunilor în funcție de deformații, fiind generalizată apoi pentru eforturi, relația care exprimă variația curburii Φ în funcție de momentul încovoietor M fiind:

$$\Phi = \frac{M}{E \cdot I} \cdot \left(1 + a \cdot \left| \frac{M}{M_r} \right|^{n-1} \right) \quad (4.39)$$

unde a și n sunt parametri care definesc forma curbei în funcție de caracteristicile materialului, E este modulul de elasticitate al materialului, I momentul de inerție al secțiunii, iar M_r este un moment încovoietor de referință (de exemplu valoarea momentului plastic al secțiunii).

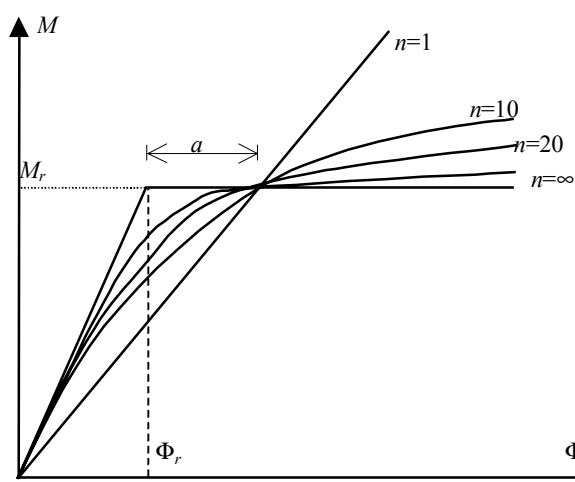


Fig. 4.21. Curbe moment-curbură de tip Ramberg-Osgood.

Avantajul expresiei (4.39) constă în faptul că, dând anumite valori lui a și n , se obțin legi diferite, ca în reprezentarea din figura 4.21, începând cu comportarea perfect elastică pentru $n=1$ și încheind cu schematizarea elastic-perfect plastic pentru $n=\infty$, toate curbele trecând printr-un punct de coordonate $(\Phi_r + a, M_r)$ unde cu Φ_r s-a notat curbura corespunzătoare momentului de referință M_r . Se pot utiliza și alte forme ale curbei Ramberg-Osgood, cum ar fi spre exemplu:

$$\frac{x}{x_y} = \frac{q}{q_y} \cdot \left(1 + \left| \frac{q}{q_y} \right|^{n-1} \right) \quad (4.40)$$

unde x reprezintă deplasarea sau curbura, q reprezintă forță sau moment, x_y și q_y elementele de comparație cu aceeași semnificație ca și x și q . Efectul forței axiale asupra relației moment-curbură 4.39 este introdus în mod aproximativ prin corectarea momentului de referință (plastic), în funcție de valoarea forței axiale, pe baza unei relații de interacțiune N_p - M_p ce stabilește curba de plasticizare a secțiunii. Ecuațiile (4.39) și (4.40) definesc relația moment-curbură în cazul unor încărcări statice monoton crescătoare, momentul încovoietor M crește sau descrește de la valoarea zero (Fig. 4.21). Jennings și Majid au extins aceste relații și la cazul încărcărilor ciclice alternante, astfel încât curba moment-curbură este definită prin două relații: prima, corespunzătoare unei singure încărcări, ramura principală a curbei, având ecuația (4.39), și a doua corespunzătoare unui proces de încărcare-descărcare, ramura secundară, având ecuația:

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{M - M_0}{E \cdot I} \cdot \left(1 + a \cdot \left| \frac{M - M_0}{2 \cdot M_r} \right|^{n-1} \right) \quad (4.41)$$

unde cu M_0 și Φ_0 s-a notat momentul încovoietor respectiv curbura corespunzător punctului de descărcare/reîncărcare (Fig. 4.22).

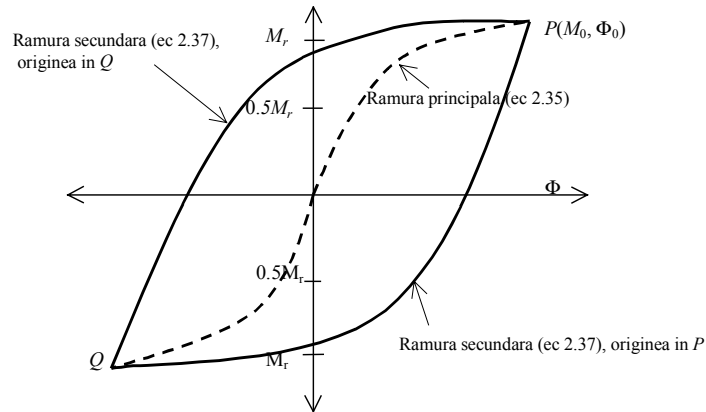


Fig. 4.22. Curbe moment-curbură de tip Ramberg-Osgood pentru încărcări alternante.

Având în vedere faptul ca efectul forței axiale asupra relațiilor moment-curbură (4.39-4.41) este luat doar parțial în considerare, prin corectarea momentului plastic al secțiunii, și că în relațiile (4.39-4.41) nu se face o referire explicită asupra efectului tensiunilor reziduale, în literatura de specialitate sunt propuse relații, mai exacte, moment încovoietor-curbură parametrice în forța axială, cu considerarea expresă a tensiunilor reziduale. Două dintre aceste propuneri sunt prezentate în continuare.

4.3.2 Relații analitice directe $M-N-\Phi$

W.F. Chen a stabilit în cazul profilelor I și al chesoanelor, ecuații analitice pentru curba moment încovoietor-curbură trizonală (secțiune elastică, plasticizată primar, apoi și secundar) în funcție de forța axială. În acest context se vorbește de plasticizare primară, dacă ea apare numai de partea comprimată a secțiunii transversale, și de plasticizare secundară, dacă ea apare și de partea întinsă din încovoiere (fig. 4.23).

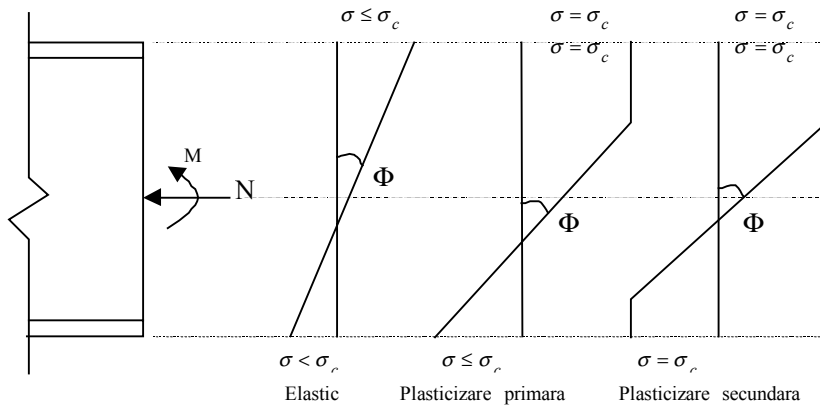


Fig. 4.23. Dezvoltarea zonelor plastice în secțiunea transversală

În (Chen & Atsuta, 1976) asemenea ecuații se găsesc pe cale deductivă, definind analitic zonele de curgere din secțiunea transversală, conform figurii 4.23. Expresiile generale matematice pentru fiecare din aceste domenii sunt date în continuare:

$$m = \begin{cases} a \cdot \phi, & 0 \leq \phi \leq \phi_1 \\ b - \frac{c}{\sqrt{\phi}}, & \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2 \\ m_{pc} - \frac{f}{\phi^2}, & \phi \geq \phi_2 \end{cases} \quad (4.42)$$

unde a , b , c și f sunt constante ale curbei de aproximare, iar m și ϕ reprezintă momentul încovoietor respectiv curbura în formă adimensională ($m = \frac{M}{M_y}$,

$\phi = \frac{\Phi}{\Phi_y}$), în care M_y reprezintă momentul de inițiere a curgerii în fibra cea mai

solicitată $M_y = W_e \cdot \sigma_c$, iar Φ_y curbura asociată acestui moment, $\Phi_y = \frac{M_y}{EI}$.

Constantele a , b , c și f sunt determinate în funcție de parametrii m_1 , m_2 , m_{pc} , ϕ_1 și ϕ_2 pe baza condițiilor de continuitate a zonelor de plasticizare a curbei $M-N-\Phi$ în cele două puncte corespunzătoare inițierii plasticizării primare respectiv secundare. Pentru punctul de inițiere a plasticizării primare condiția de continuitate se scrie:

$$m_1 = a \cdot \phi_1 = b - \frac{c}{\sqrt{\phi_1}} \quad (4.43)$$

iar pentru punctul de inițiere a plasticizării secundare condiția este:

$$m_2 = b - \frac{c}{\sqrt{\phi_2}} = m_{pc} - \frac{f}{\phi_2^2} \quad (4.44)$$

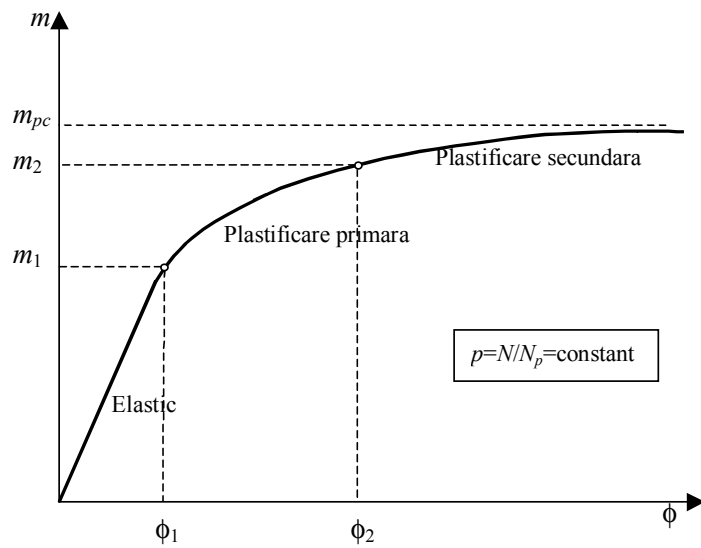


Fig. 4.24. Definirea curbelor trizonale moment încovoiator-curbură parametrice în forță axială

Rezolvând ecuațiile (4.43) și (4.44) rezultă următoarele expresii pentru constantele a , b , c , și f :

$$a = \frac{m_1}{\phi_1}; b = \frac{m_2 \cdot \sqrt{\phi_2} - m_1 \cdot \sqrt{\phi_1}}{\sqrt{\phi_2} - \sqrt{\phi_1}}; c = \frac{m_2 - m_1}{\frac{1}{\sqrt{\phi_1}} - \frac{1}{\sqrt{\phi_2}}}; f = (m_{pc} - m_2) \cdot \phi_2^2 \quad (4.45)$$

Tabelul 4.2. Expresii aproximative pentru m_1 , m_2 , m_{pe} , ϕ_1 și ϕ_2 , secțiuni I (Chen și Atsuta, 1976)

<u>Încovoiere după axa de inerție maximă</u>	
<u>Fără tensiuni reziduale</u>	
Pentru orice $p = \frac{N}{N_p}$	$m_1 = 1 - p$ $\phi_1 = 1 - p$
Pentru $0 \leq p \leq 0,225$	Pentru $0,225 \leq p \leq 1$
$m_{pe} = 1,11 - 2,64 \cdot p^2$	$m_{pe} = 1,238 - 1,143 \cdot p - 0,095 \cdot p^2$
$m_2 = 1 + 0,778 \cdot p - 4,78 \cdot p^2$	$m_2 = 1,20 \cdot (1 - p)$
$\phi_2 = \frac{1}{1 - 3,70 \cdot p + 8,40 \cdot p^2}$	$\phi_2 = 2,20 \cdot (1 - p)$
<u>Cu tensiuni reziduale, $\sigma_{re} = 0,3 \cdot \sigma_k$</u>	
Pentru $0 \leq p \leq 0,8$	Pentru $0,8 \leq p \leq 1$
$m_1 = 0,9 - p$	$m_2 = -1,1 + 3,1 \cdot p - 2 \cdot p^2$
$\phi_1 = 0,9 - p$	$\phi_2 = 3,3 - 8 \cdot p + 5 \cdot p^2$
Pentru $0 \leq p \leq 0,225$	Pentru $0,225 \leq p \leq 1$
$m_{pe} = 1,11 - 2,64 \cdot p^2$	$m_{pe} = 1,238 - 1,143 \cdot p - 0,095 \cdot p^2$
$m_2 = 0,9 + 1,94 \cdot p - 9,4 \cdot p^2$	$m_2 = 1,1 \cdot (1 - p)$
$\phi_2 = \frac{1}{1,11 - 7,35 \cdot p + 29,2 \cdot p^2}$	$\phi_2 = 1,3 - p$
<u>Încovoiere după axa de inerție minimă</u>	
<u>Fără tensiuni reziduale</u>	
Pentru orice $p = \frac{N}{N_p}$	$m_1 = 1 - p$ $\phi_1 = 1 - p$
Pentru $0 \leq p \leq 0,4$	Pentru $0,4 \leq p \leq 1$
$m_2 = 1 + 1,5 \cdot p - 2,5 \cdot p^2$	$m_2 = 0,85 + 2,03 \cdot p - 2,88 \cdot p^2$
$\phi_2 = \frac{1}{1 - 1,57 \cdot p + 0,725 \cdot p^2}$	$\phi_2 = \frac{1}{0,368 + 0,645 \cdot p - 0,862 \cdot p^2}$
Pentru $0 \leq p \leq 0,252$	Pentru $0,252 \leq p \leq 1$
$m_{pe} = 1,51 - (1 - 0,185 \cdot p^2)$	$m_{pe} = 2,58 \cdot (0,52 + p) \cdot (1 - p)$
<u>Cu tensiuni reziduale, $\sigma_{re} = 0,3 \cdot \sigma_k$</u>	
Pentru $0 \leq p \leq 0,4$	Pentru $0,4 \leq p \leq 1$
$m_1 = 0,9 - p$	$m_2 = 0,567 + 0,1 \cdot p - 0,667 \cdot p^2$
$\phi_1 = 0,9 - p$	$\phi_2 = 0,5$
$m_2 = 0,9 + p - 2,5 \cdot p^2$	$m_2 = 1 + 0,25 \cdot p - 1,25 \cdot p^2$
$\phi_2 = \frac{1}{1,11 - 2,11 \cdot p + 2,81 \cdot p^2}$	$\phi_2 = \frac{1}{1,3 - 2,45 \cdot p + 2,45 \cdot p^2}$
Pentru $0 \leq p \leq 0,252$	Pentru $0,252 \leq p \leq 1$
$m_{pe} = 1,51 - 0,28 \cdot p^2$	$m_{pe} = 2,58 \cdot (0,52 + p) \cdot (1 - p)$

În tabelul 4.2 sunt date expresiile matematice pentru parametrii m_1 , m_2 , m_{pc} , ϕ_1 și ϕ_2 pentru secțiuni de tip I, pentru cele două axe de inerție, considerând atât cazul când efectul tensiunilor reziduale este luat în considerare cât și cazul în care acest efect este neglijat. De menționat faptul că distribuția tensiunilor reziduale în secțiune avută în vedere la stabilirea acestor valori a fost cea care corespunde cu modelul prevăzut actualmente în codul american AISC-LRFD. Se observă ca acești parametri sunt practic independenți de caracteristicile geometrice ale secțiunii. Expresii similare cu cele prezentate în tabelul 4.2. s-au obținut pentru modelarea curbelor $M-N-\Phi$ în cazul secțiunilor de formă dreptunghiulară și circulară (Chen și Atsuta, 1976; Chen și Han, 1985).

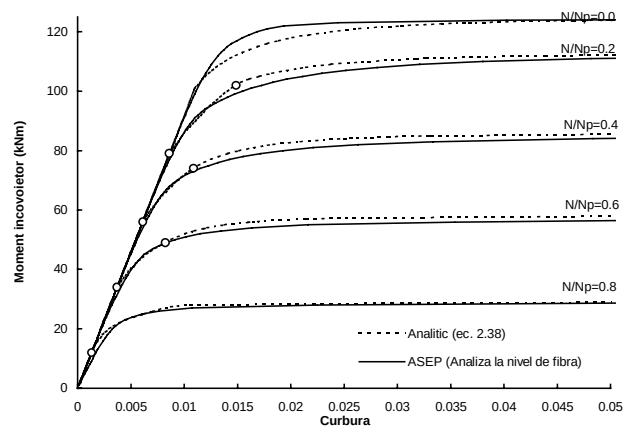


Fig. 4.25. Curbele $M-N-\Phi$ pentru secțiunea W8x31 (încovoiere după axa de inerție maximă)

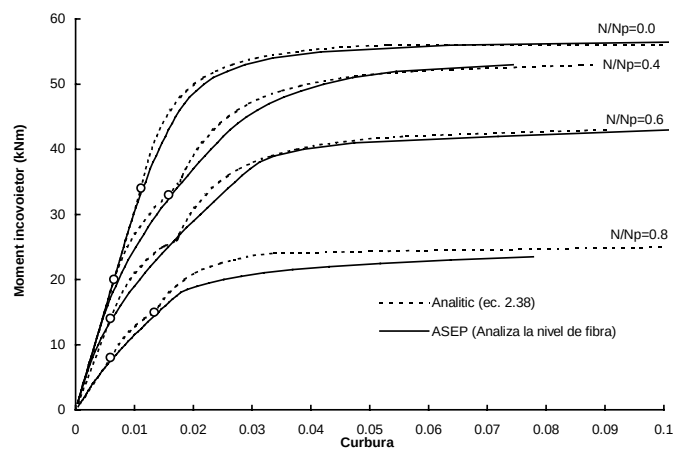


Fig. 4.26. Curbele $M-N-\Phi$ pentru secțiunea W8x31 (încovoiere după axa de inerție minimă)

În figurile 4.25-4.26 sunt prezentate comparativ curbele moment încovoietor-curbură, parametrice în forță axială, pentru o secțiune W8x31, obținute pe baza acestor expresii aproximative și printr-o analiză a secțiunii la nivel de fibră pe baza programului *ASEP*. Se observă o aproximare destul de bună a curbelor “exacte” furnizate de program, cu cele aproximative date de relațiile (4.42).

4.3.3 Relații analitice indirecte (cvasianalitice) $M-N-\Phi$ și $N-M-\epsilon$

În ultimul timp, în literatura de specialitate, sunt propuse relații cvasianalitice pentru reprezentarea cât mai fidelă a curbelor caracteristice ale secțiunilor (Sanz-Picon, 1992; Attalla ș.al., 1995). Dacă în cazul relațiilor analitice se încercă aproximarea prin interpolare a curbelor $M-N-\Phi$ determinate prin analize complexe sau experimental, în cazul relațiilor cvasianalitice se propun relații parametrice pentru aproximarea tangentei la aceste curbe. Parametrii de formă a acestor relații sunt determinați prin calibrare, pe baza rezultatelor obținute printr-o analiză la nivel de fibră a secțiunilor (Sanz-Picon, 1992). Aceste relații se dovedesc mult mai eficiente, sub aspectul exactității, în comparație cu cele analitice, dar impun efectuarea unor calcule numerice suplimentare, pentru obținerea curbelor caracteristice. În lucrarea (Attalla, ș.al., 1992) sunt stabilite relații cvasianalitice pentru curbele moment încovoietor-curbură, parametrice în forța axială de compresiune N , $M-N-\Phi$, precum și pentru curbele efort axial-deformație axială, în funcție de momentul încovoietor M , $N-M-\epsilon$, în cazul secțiunilor metalice de tip I, considerând dezvoltarea graduală a zonelor plastice în secțiune.

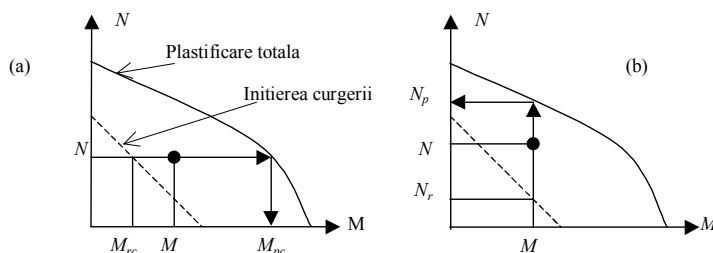


Fig. 4.27. Determinarea eforturilor secționale plastice corectate: (a) momentul încovoietor; (b) efortul axial

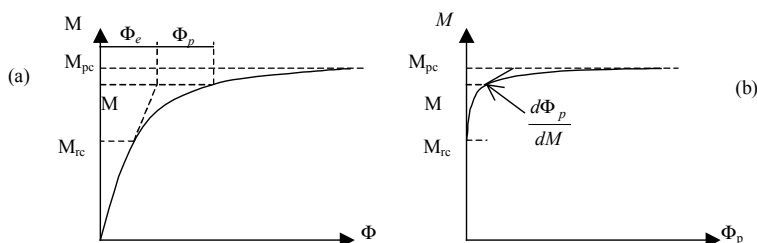


Fig. 4.28. Determinarea curburii totale Φ : (a) curbura totală; (b) curbura pseudo-plastică

Delimitarea zonelor elastice și elasto-plastice se face pe baza curbelor de interacțiune $N-M$ corespunzătoare inițierii curgerii respectiv plastificării totale (fig.4.27).

Se consideră că sub o anumită stare de încărcare deformațiile totale se compun din deformații elastice și deformații pseudo-plastice și prin urmare curbura totală Φ și deformația axială totală ε au următoarele expresii generale (fig.4.28):

$$\begin{aligned}\Phi &= \Phi_e + \Phi_p \\ \varepsilon &= \varepsilon_e + \varepsilon_p\end{aligned}\quad (4.46)$$

unde indicele “e” se referă la componentele elastice iar indicele “p” se referă la componentele pseudo-plastice. Curbura elastică, Φ_e , corespunzătoare unui moment încovoietor M este independentă de efortul axial, având următoarea expresie:

$$\Phi_e = \frac{M}{E \cdot I} \quad (4.47)$$

unde cu produsul $E \cdot I$ s-a notat modulul de rigiditate la încovoiere a secțiunii (E -modulul de elasticitate, I momentul de inerție). Pentru curbura pseudo-plastică, Φ_p , este propusă următoarea expresie diferențială:

$$\frac{d\Phi_p}{dM} = \frac{c}{M_{pc} - M_{rc}} \cdot \left(\frac{M - M_{rc}}{M_{pc} - M} \right)^n \quad (4.48)$$

unde cu M_{rc} și M_{pc} s-au notat momentele încovoietoare corespunzătoare inițierii curgerii respectiv plastificării totale, corespunzătoare unui anumit efort axial N . Parametrii c și n sunt determinați prin calibrare și sunt în funcție de efortul axial N și de direcția de încovoiere (încovoiere după axa de inerție maximă respectiv minimă). Momentul încovoietor corespunzător inițierii curgerii în secțiune, M_{rc} , dependent de valoarea efortului axial N și de valoarea maximă a tensiunii reziduale de compresiune din secțiune, σ_r , are următoarea expresie:

$$M_{rc} = \left(\sigma_c - \sigma_r - \frac{N}{A} \right) \cdot W_e \quad (4.49)$$

unde A reprezintă aria secțiunii, iar W_e reprezintă modulul de rezistență elastic al secțiunii. M_{pc} este determinat pe baza relațiilor de interacțiune N_p-M_p , corespunzătoare plastificării întregii secțiuni. Valorile și distribuția tensiunilor reziduale în secțiune avute în vedere la stabilirea parametrilor c și n sunt cele corespunzătoare standardului american AISC-LRFD.

Astfel pe baza relațiilor (4.47)-(4.48) pentru curbura totală se obține următoarea expresie:

$$\Phi(M) = \frac{M}{EI} + \frac{c}{M_{pc} - M_{rc}} \cdot \int_{M_{rc}}^M \left(\frac{m - M_{rc}}{M_{pc} - m} \right)^n \cdot dm \quad (4.50)$$

în care m reprezintă variabila de integrare.

În mod similar se obține deformația axială totală, ε , ca suma dintre deformația axială elastică, ε_e , și deformația axială pseudo-plastică, ε_p :

$$\varepsilon_e = \frac{N}{E \cdot A}$$

$$\frac{d\varepsilon_p}{dN} = \frac{c_n}{N_{pc} - N_r} \left(\frac{N - N_r}{N_{pc} - N} \right)^{n_p} \quad (4.51)$$

$$\varepsilon(N) = \frac{N}{E \cdot A} + \frac{c_n}{N_{pc} - N_r} \int_{N_r}^N \left(\frac{n - N_r}{N_{pc} - n} \right)^{n_p} \cdot dn$$

unde N_r și N_{pc} reprezintă eforturile axiale corespunzătoare inițierii a curgerii respectiv plastificării totale, pentru o valoare dată a momentului încovoietor M . Parametrii c_n și n_p din ecuația (4.51) sunt determinați prin calibrare în funcție de valoarea momentului încovoietor M , având valori diferite corespunzătoare fiecărei direcții de încovoiere. Efortul axial de inițiere a curgerii, corespunzător unui moment încovoietor M se determină pe baza următoarei relații:

$$N_r = \left(\sigma_c - \sigma_r - \frac{M}{W_e} \right) \cdot A \quad (4.52)$$

iar efortul axial de plastificare totală a secțiunii, N_p , corespunzător momentului încovoietor M se determină pe baza relațiilor de interacțiune N_p - M_p .

Tabelul 4.3. Expresiile analitice ale parametrilor c și n .

Parametrii	Expresii
	Încovoiere după axa de inerție maximă 
c_x	$\frac{M_{px}}{EI_x} \cdot \left(0,15 + 2,33 \cdot \bar{n} - 7,0 \cdot \bar{n}^2 + 5,47 \cdot \bar{n}^3 \right)$
n_x	1,5
c_{0x}	$0,15 \times 10^{-3}$
n_{px}	$1,9 - 1,5 \times \left 0,6 - \bar{m} \right $
	Încovoiere după axa de inerție minimă 
c_y	$\frac{M_{py}}{EI_y} \cdot \left(0,34 + 2,65 \cdot \bar{n} - 0,74 \cdot \bar{n}^2 + 1,74 \cdot \bar{n}^3 \right)$
n_y	$1,44 - 2,3 \cdot \bar{p} + 1,65 \cdot \bar{n}^2$
c_{0y}	$\left(0,2 + 0,8 \cdot \bar{m} \right) \times 10^{-3}$
n_{py}	$1,1 - \left 0,3 - \bar{m} \right $

Parametrii care intervin în relațiile (4.50-4.51) sunt determinați prin calibrare pe baza rezultatelor unei analize elasto-plastice a secțiunii la nivel de fibră, rezultând valori diferite corespunzătoare fiecărei direcții de încovoiere, pentru diferite valori ale efortului axial N și ale momentului încovoietor M . Valorile preliminare ale acestor parametri sunt obținute utilizând metoda celor mai mici pătrate. În tabelul 4.3. sunt date valorile acestor parametri, corespunzători fiecărei axe principale de inerție a secțiunii, în funcție de eforturile secționale sub forma

adimensionalizată $\bar{m} = \frac{M}{M_p}$ și $\bar{n} = \frac{N}{N_p}$ (M_p reprezintă momentul încovoietor

plastic în absența efortului axial, iar N_p reprezintă efortul axial plastic în absența momentului încovoietor). Pentru determinarea curbelor de interacțiune N_p - M_p necesare determinării eforturilor M_{pc} și N_{pc} corespunzătoare plastificării totale a secțiunii este propusă o metoda cvasianalitică sub forma unei ecuații polinomiale de gradul șase. Introducând pentru eforturile secționale N , M_x și M_y mărimile adimensionalizate $\bar{n} = \frac{N}{N_p}$, $\bar{m} = \sqrt{\bar{m}_x^2 + \bar{m}_y^2}$ în care $\bar{m}_x = \frac{M_x}{M_{px}}$ și $\bar{m}_y = \frac{M_y}{M_{py}}$

forma ecuației polinomiale de determinare a suprafeței de interacțiune N_p - M_p este:

$$a_1 \cdot \bar{n}^6 + a_2 \cdot \bar{m}^6 + a_3 \cdot \bar{n}^4 + a_4 \cdot \bar{m}^4 + a_5 \cdot \bar{n}^2 + a_6 \cdot \bar{m}^2 = 1 \quad (4.53)$$

în care coeficienții ecuației, a_i ($i = \overline{1,6}$), sunt determinați în funcție de raportul momentelor încovoietoare, $\theta = \arctg(\frac{M_y}{M_x})$, astfel:

$$a_i = b_{i1} \cdot \sin^2 \theta + b_{i2} \cdot \cos^2 \theta + b_{i3} \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta \quad (4.54)$$

În ecuația (4.54) constantele b_{ij} ($i = \overline{1,6}$; $j = \overline{1,3}$) sunt determinate prin calibrarea rezultatelor obținute pe baza ecuației (4.50) cu cele obținute pe baza unei analize la nivel de fibră a secțiunii W8x31, considerată a fi reprezentativă pentru majoritatea secțiunilor de tip I folosite în practică. Utilizând metoda celor mai mici pătrate, pentru calibrarea rezultatelor, s-au obținut următoarele valori pentru constantele b_{ij} :

$$[b_{ij}] = \begin{bmatrix} -2,26 & 0,19 & 2,32 \\ 0,09 & 0,54 & 1,82 \\ 3,44 & -1,40 & -5,3 \\ -0,73 & -1,64 & 1,81 \\ -0,18 & 2,21 & 2,95 \\ 1,64 & 2,10 & -2,52 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

În figura 4.29 se prezintă curbele de interacțiune N_p - M_p , după cele două axe principale de inerție ale secțiunii W8x31, obținute pe baza relațiilor (2.49-2.50) și cele obținute pe baza programului de analiză la nivel de fibră *ASEP* în care deformația limită ulzimă admisă s-a considerat $10 \cdot \epsilon_c$ (neglijarea reconsolidării). Se constată o foarte buna corelare a curbelor aproximative determinate de relațiile (4.53) cu cele “exacte” furnizate de programul *ASEP*. În figurile 4.29-4.30 sunt prezentate comparativ curbele de interacțiune N_p - M_p obținute pe baza relațiilor prevăzute în codurile de proiectare european, EC3, american, AISC-LRFD și australian, AS4100, după cele două axe de inerție ale secțiunii. Se constată o foarte bună corelare a curbelor aproximative determinate de relațiile de interacțiune prevăzute în EC3 cu cele “exacte” furnizate de programul *ASEP*. În figurile 4.31-

4.32 sunt prezentate comparativ curbele moment încovoietor-curbură parametrice în forța axială, după cele două axe de inerție ale secțiunii W8x31, obținute pe baza relației (4.50) cu cele “exacte” obținute cu programul *ASEP*, constatându-se o foarte bună corelare a acestora.

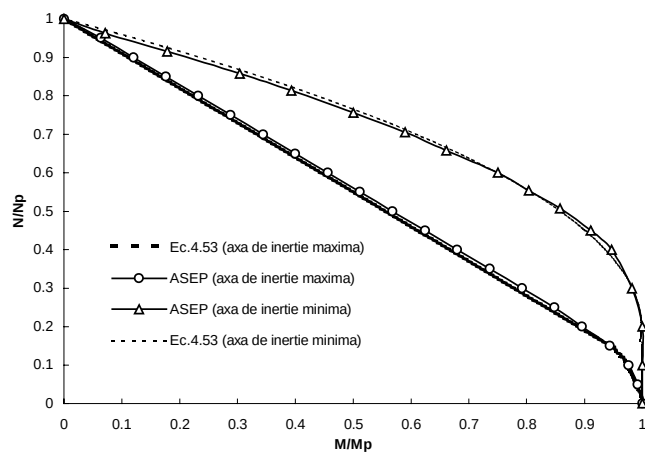


Fig. 4.29. Curbele de interacțiune N_p - M_p obținute pe cale analitică și numerică.

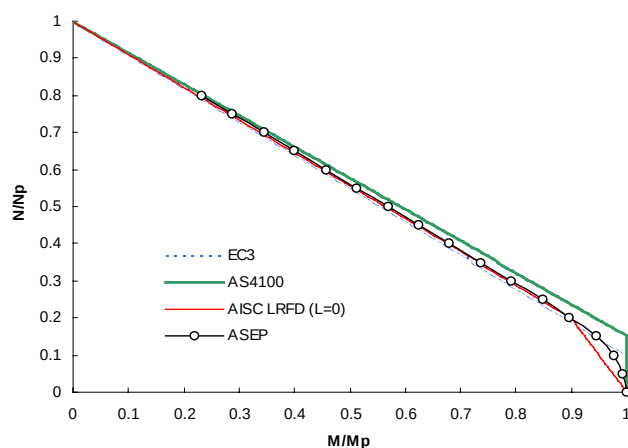


Fig. 4.30. Curbele de interacțiune N_p - M_p (planul de rigiditate minim) în diferite coduri de proiectare comparativ cu analiza "exactă" (*ASEP*).

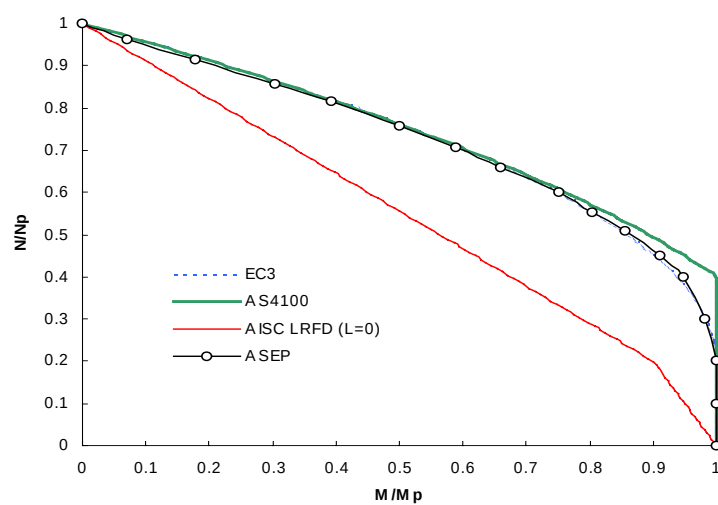


Fig. 4.31. Curbele de interacțiune N_p - M_p (planul de rigiditate maxim) în diferite coduri de proiectare comparativ cu analiza "exactă" (ASEP).

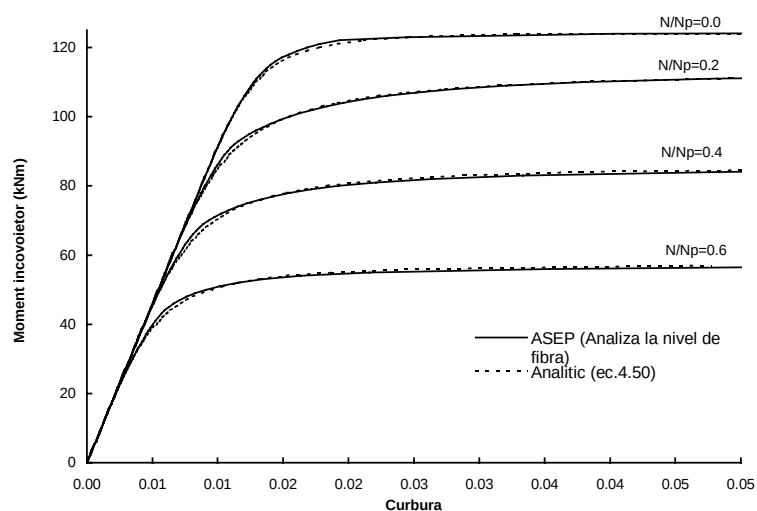


Fig. 4.31. Curbele M - N - Φ în planul de rigiditate maxim obținute analitic și numeric.

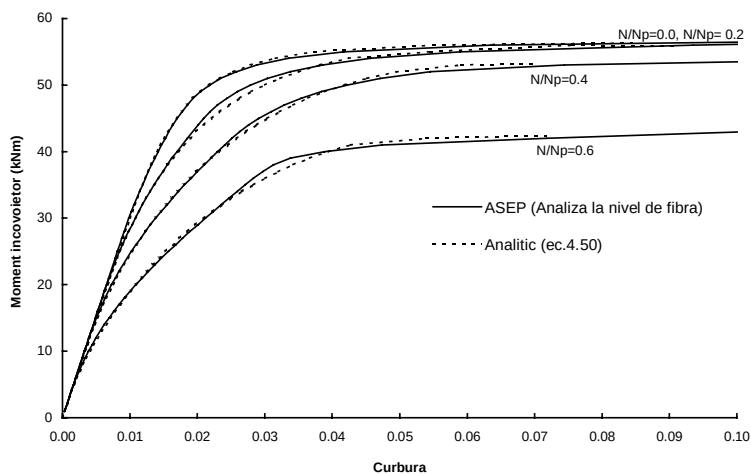


Fig. 4.32. Curbele $M-N-\Phi$ în planul de rigiditate minim obținute analitic și numeric.

În concluzie, se poate afirma că procedeele de determinare a curbelor $M-N-\Phi$, atât în varianta "exactă" cât și analitică aproximează adecvat comportarea elasto-plastică a secțiunilor metalice. De asemenea, procedeul original prezentat și programul *ASEP* realizat de autor, integrat programului de analiză structurală globală a structurilor se dovedește a reprezenta un instrument eficient în considerarea dezvoltării zonelor plastice în secțiunile din lungul barelor.