

5

CALCULUL NELINIAR AL STRUCTURILOR ÎN CADRE. APLICAȚIA NEFCAD

5.1. INTRODUCERE

Ca urmare a dezvoltărilor hard și soft ale calculatoarelor PC și ale stațiilor de lucru din ultimul deceniu, s-au produs modificări importante de orientare în domeniul calculului structurilor de rezistență. Astfel, schimbări profunde în modul de considerare a metodelor avansate de determinare a răspunsului neliniar al structurilor au avut loc, prin dezvoltarea a noi metode numerice ce reprezintă în calcul structurile schematizate precum și comportarea materialului oglindind cât mai fidel comportarea reală. Posibilitățile deosebite ale calculului automat au condus la reconsiderarea și rafinarea metodelor teoretice mai vechi de analiză și implementarea eficientă a acestora sub forma programelor de calculator în diferite limbaje moderne de programare. Trecerea la automatizarea calculului schimbă radical modul tradițional de proiectare, în sensul că cercetarea comportării structurilor în întreg domeniul elasto-plastic tinde să devină o tehnică de aplicare practică curentă pentru fundamentarea soluțiilor de proiectare. În această direcție metoda elementelor finite este una dintre cele mai frecvente metode utilizate pentru modelarea schematizată a structurilor și totodată pentru modelarea cât mai fidelă a majorității factorilor determinanți în răspunsul static al structurilor în cadre - neliniaritățile fizice și geometrice, imperfecțiunile mecanice și geometrice, comportarea neliniară a conexiunilor flexibile, etc.- o discretizare rafinată a elementelor structurale nu mai constituind un impediment legat de capacitatea hard și soft a calculatoarelor PC existente în mod curent în birourile de proiectare și cercetare.

Discretizarea rafinată a structurilor pe baza unor "elemente finite de fibră" face posibilă considerarea cu maximă acuratețe a majorității factorilor ce influențează răspunsul elasto-plastic al structurilor- dezvoltarea graduală a zonelor plastice în secțiune și în lungul barelor, imperfecțiunile mecanice și geometrice, neomogenitatea secțiunilor transversale- conferind acestor metode statutul de metode "exacte" de analiză. Este suficient să se menționeze în acest sens, referințele din literatura de specialitate cu privire la rezultatele foarte apropiate

furnizate de programe bazate pe metoda elementelor finite, precum COSMOS, ANSYS, DRAIN, etc. cu cele obținute pe cale experimentală, în studiul comportamentului static al structurilor în cadre metalice și din beton armat. Cu toate acestea, metodele din aceasta categorie oferite de teoria "elementelor finite de fibra" pentru analiza statică elasto-plastică de ordinul al II-lea a structurilor în cadre au un câmp restrâns de aplicabilitate în practica inginerescă, datorită dificultăților care survin pe de o parte în cadrul etapelor de pre-procesare și post-procesare a datelor și pe de altă parte datorită timpului de calculator foarte ridicat pe care îl presupun. Datorită gradului rafinat de discretizare a structurilor o asemenea metodă de analiză amplifică sensibil dimensiunile problemei fiind limitată la: (1) studierea în detaliu a comportării structurale; (2) verificarea acurateții unor metode simplificate; (3) compararea cu rezultate experimentale; (4) obținerea unor relații sau a unor abace pentru proiectarea curentă; și (5) aplicarea în cazul unor structuri speciale care necesită o analiză aprofundată.

Din acest motiv în ultimul timp, în literatura de specialitate se constată o nouă tendință în modul de formulare teoretică a aspectelor legate de determinarea răspunsului neliniar al structurilor în cadre metalice, propunându-se diferite metode care să satisfacă atât cerințele de eficiență practică cerute de inginerul proiectant cât și cele de rafinament analitic al metodelor "exacte" amintite mai sus (Chen&Toma, 1994). În principal aceste metode modelează neliniaritatea fizică punctual pe baza noțiunii de articulație plastică cu formare graduală și utilizarea conceptului de modul de elasticitate tangent, perfecționând astfel metoda articulațiilor plastice cu formare instantanee și simulând astfel comportarea reală, manifestată prin degradarea graduală și continuă a rigidității structurilor ca urmare a dezvoltării zonelor plastice în secțiunile din lungul barelor în urma creșterii progresive a nivelului de solicitare. Eficiența impusă metodelor din această categorie sub aspectul exactității - "diferența" dintre modelul exact și cel simplificat nu trebuie să difere cu mai mult de 5% -, și sub aspectul practic cerut de inginerii proiectanți - timp de execuție scăzut, simplitate în modul de discretizare a structurilor utilizând pe cât posibil modelul comportării liniare de discretizare, adică discretizarea barelor utilizând un singur element pe bară - conferă acestor metode statutul de metode avansate de analiză și proiectare în accepțiunea conceptului de *analiză avansată a structurilor*. Conform acestui concept, orice metodă de calcul care poate descrie în mod satisfăcător rezistența, rigiditatea și stabilitatea globală a structurii, elimină necesitatea verificării individuale a fiecărui element component al structurii. Este de menționat faptul că în ultimul timp normativele de calcul din întreaga lume, într-o formă sau alta, pretind considerarea comportării elasto-plastice a structurilor, a efectelor de ordinul al II-lea și a imperfecțiunilor geometrice și mecanice, ca și influența prinderilor semirigide ale barelor în noduri, în proiectarea structurilor (AS4100, EC3, AISC-LRFD).

Un model de calcul, elaborat de autor, care se înscrie în aceste direcții de cercetare, pentru determinarea răspunsului neliniar al cadrelor plane, cu considerarea zonelor de plastificare în lungul barelor, efectele de ordinul al II-lea, locale și globale ale neliniarității geometrice, imperfecțiunile geometrice și mecanice, ca și

comportarea neliniară moment rotire ($M - \theta$) a conexiunilor flexibile dintre bare este prezentat în continuare. Se prezintă un algoritm de calcul neliniar, care integrează cele trei efecte de neliniaritate fizică, geometrică și de comporare a conexiunilor, în baza căruia s-a realizat un program de calcul performant, pentru analiza statică neliniară a structurilor în cadre.

Adoptând un procedeu de calcul incremental-iterativ în analiza inelastică se ține seama de efectul plastificării materialului structurii, în cea mai evoluată formă, considerându-se variația continuă a rigidității structurii în raport cu dezvoltarea zonelor de plastificare în lungul barelor în funcție de nivelul de solicitare a acestora în doua variante: (1) în care se consideră relațiile constitutive neliniare $\sigma - \epsilon$ pentru modelarea neliniarității fizice la nivel de fibră și (2) cu considerarea relațiilor analitice sau cvasianalitice nelinare $M - N - \Phi$ (moment încovoietor-efort axial-curbură) și $N - M - \epsilon$ (efort axial-moment încovoietor-deformație axială) pentru modelarea comportării elasto-plastice la nivelul secțiunilor.

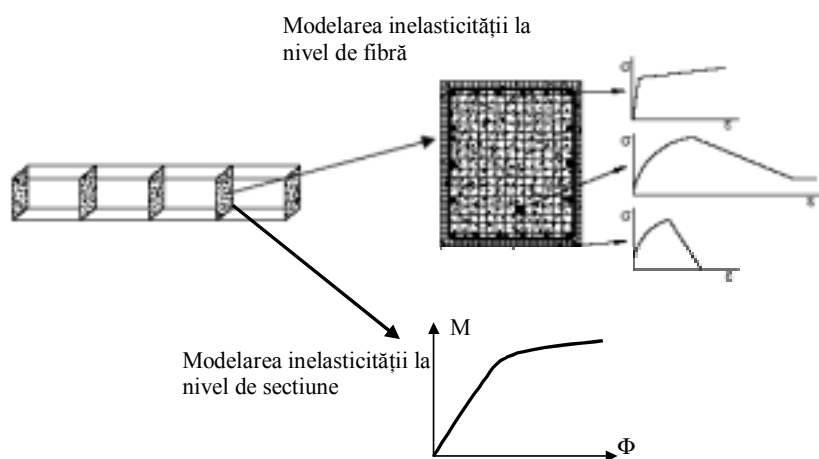


Fig. 5.1. Modelarea neliniarității de material în metoda de calcul propusă.

Efectul dezvoltării graduale a zonelor plastice în secțiunile din lungul barei precum și a imperfecțiunilor mecanice (tensiuni reziduale în cazul secțiunilor metalice) asupra rigidității de ansamblu a barelor și implicit a structurii este luat în considerare în mod direct în prima variantă în timp ce numai aproximativ în cea de-a doua prin intermediul curbelor caracteristice $M - N - \Phi$ și $N - M - \epsilon$ pe baza cărora se determină caracteristicile de rigiditate ale secțiunilor, dar cu o îmbunătățire (reducere) sensibilă a timpului de analiză.

Posibilitatea de a adopta diagrame diferențiate pentru diferite materiale, fără ca prin aceasta să se influențeze asupra caracterului unitar al metodei de calcul a structurii, care rămâne în esență același, permite analiza atât a structurilor în cadre metalice cât și a celor din beton armat sau mixte.

Analiza inelastică integrează opțional efectele neliniarității geometrice în cazul unor solicitări axiale importante, considerându-se în fiecare treaptă de încărcare rigiditățile corectate ale barelor comprimate (efectul local de ordinul al II-lea, $P-\delta$) ca și modificările configurației geometrice a structurii ca urmare a deplasărilor de nod și deformațiilor (variații ale lungimii) barelor (efectul global de ordinul al II-lea, $P-\Delta$).

Pentru luarea în considerare a efectelor asupra rigidității structurii a prinderilor semirigide ale riglelor cadrului în noduri se consideră opțional atât cazul comportării liniare a acestora (rigiditatea prinderii este constantă), cât și cazul comportării neliniare (rigiditatea prinderii variabilă în funcție de gradul de solicitare a acesteia). În acest ultim caz s-a adoptat o lege neliniară de comportare propusă în lucrările (Kishi&Chen, 1986; Liew, ș.al., 1993a,1993b) în urma unor cercetări experimentale pentru principalele tipuri de prinderi metalice.

Acțiunile exterioare aplicabile structurii prin această metodă biografică sunt forțe concentrate sau distribuite provenite dintr-un regim static sau cvasistatic. Ele se pot aplica în nodurile de discretizare sau în lungul barelor cadrului și pot avea caracter constant sau variabil în cadrul procesului de analiză. Încărcările variabile se aplică structurii prin incremente de încărcare egale sau neegale succesive (reducerea intensității incrementelor de încărcare se face automat pe baza unui algoritm iterativ de echilibrare a forțelor pe structură). Suma acestor incremente de încărcare determină intensitatea încărcării la pasul de încărcare respectiv. Incrementele de încărcare se pot defini astfel încât să modeleze forțe descrescătoare ca intensitate.

Amplificarea dimensiunilor problemei, ca urmare a necesității de a descrie noduri suplimentare pe bare pentru tratarea încărcărilor transversale, pe de o parte, și surprinderea plastificării secțiunilor din interiorul barei, pe de altă parte, caracteristică metodelor convenționale propuse în majoritatea publicațiilor din literatura de specialitate, este eliminată în această metodă. Aceasta se face prin utilizarea unui element de bară dreapta de cadru spațial cu noduri semirigide, termenii convenționali ai matricei de rigiditate corespunzători comportării liniare fiind corecți pe baza unor coeficienți de corecție ce țin seama de sursele de neliniaritate menționate mai sus iar forțele transversale pe bară sunt echivalate static în forțe generalizate echivalente la capetele barei a căror valoare este corectată de asemenea în funcție de variația modulului de rigiditate a barei și a nodurilor semirigide de la capetele ei. Deoarece atât coeficienții matricei de rigiditate a elementului de bară cât și cei ai vectorului forțelor echivalente la noduri sunt determinați în mod explicit, efortul computațional suplimentar necesar calculului numeric al coeficienților de corecție fiind minimal, rezultă o reducere semnificativă a complexității operațiilor necesare conducerii calculului în cadrul unei metode matriceale de analiză structurală în care deplasările generalizate ale nodurilor sunt necunoscutele problemei.

Din acest motiv metoda propusă nu se caracterizează doar prin eficiența mult sporită din punct de vedere a timpului de analiză și simplitate în pre și post procesarea datelor, ci și prin consecvența cu care se modelează comportarea liniară

și neliniara a structurilor în cadre. Această consecvență și comoditate în utilizarea aceluiasi model structural în analiza liniară și neliniara (un singur element pe bară utilizat pentru discretizare) va duce la încurajarea inginerului proiectant în adoptarea acestui model de analiză/proiectare a structurilor în cadre.

Soluția analizei statice neliniare se obține printr-un calcul incremental-iterativ, întrucât condițiile de echilibru și rigiditatea barelor sunt legate de deformarea structurii, care inițial este necunoscută. Deformarea progresivă a structurii până la o poziție finală stabilită este obținută în pași, calculând pentru fiecare pas rigiditatea structurii funcție de deplasările și eforturile calculate în pasul anterior ("updated Lagrangian"). Pentru determinarea stării de solicitare și de deformare a structurii, în domeniul pre și post critic de comportare, sub acțiunea unui sistem oarecare de forțe statice, ținându-se seama de efectele neliniarității materiale, geometrice și a prinderilor flexibile ale barelor în noduri se aplică un procedeu incremental-iterativ ce face parte din categoria metodelor pașilor controlați de lungimea de arc ("arc length methods"). Majoritatea procedeelor propuse în literatura de specialitate pentru rezolvarea sistemelor ecuațiilor de condiție neliniare, consideră forțele aplicate numai în nodurile structurii și caracterizate de un factor de proporționalitate, și prin urmare nu pot fi aplicate în acest caz, autorul propunând un nou procedeu. Procedeu reprezintă o adaptare a metodei Crisfield ținând seama de particularitățile metodei de analiză propuse, ce presupune transferul forțelor din lungul barelor în forțe echivalente la noduri, rezultând astfel forțe nodale variabile, ca urmare a degradării rigidității barelor, în timpul procesului de calcul.

Exemplele de calcul numerice prezentate, pe parcursul lucrării, rezultatele comparative obținute, confirmă performanțele modelului propus și îl clasifică drept o metodă de analiza statică avansată pentru structurile în cadre plane și spațiale metalice și din beton armat.

5.2. FACTORI DETERMINANȚI ÎN RĂSPUNSUL NELINIAR AL CADRELOR. IPOTEZELE DE CALCUL ALE METODEI

Efectele principale de care trebuie să se țină seama în evaluarea răspunsului static neliniar al structurilor în cadre pot fi împărțite în trei categorii și anume: efecte geometrice, efecte materiale și efecte de încărcare.

Prima categorie, a efectelor geometrice, cuprinde:

1. Efectul forțelor axiale de compresiune/întindere puternice asupra rigidității la încovoiere a barelor (efectul $P-\delta$).
2. Efectul modificării configurației geometrice a nodurilor structurii, cunoscut sub denumirea de efectul $P-\Delta$.
3. Modificarea lungimii barelor ca urmare a deformațiilor axiale și a efectului de "bowing" (scurtarea barelor ca urmare a deformării din încovoiere).
4. Efectul rotirii de corp rigid.
5. Efectul imperfecțiunilor geometrice inițiale (locale și globale), distorsionarea secțiunilor transversale, îmbinări excentrice.

6. Efectul îmbinărilor semirigide ale barelor în noduri.
7. Efectul nesimetriei secțiunilor transversale.
8. Efectul deformațiilor din forțe tăietoare.
9. Efectul flambajului local și a altor distorsiuni locale.

A doua categorie, a efectelor materiale, cuprinde:

1. Efectul relațiilor constitutive neliniare tensiune-deformație.
2. Efectul tensiunilor reziduale și a imperfecțiunilor mecanice.
3. Efectul plastificării distribuite în secțiuni și în lungul barelor (zone plastice).
4. Efectul comportării neliniare a conexiunilor semirigide.
5. Efectul reconsolidării materialului.
6. Efectul descărcărilor elastice.

A treia categorie, a efectelor datorate modului de aplicare a încărcărilor, cuprinde:

1. Efectul încărcărilor neproportionale.
2. Efectul încărcărilor variabile și repetate.

Toți acești factori prezentați influențează rigiditatea de ansamblu a structurilor în cadre, în funcție de conformarea geometrică și de rigiditate a elementelor constitutive, de nivelul de solicitare existent la un moment dat, contribuind într-o măsură mai mare sau mai mică la răspunsul global al structurilor în cadre. De menționat faptul că printr-o conformare constructivă eficientă contribuția anumitor factori la răspunsul nelinier al structurilor în cadre poate fi neglijată, simplificând în acest fel modelul matematic de calcul.

Modelul matematic propus, încearcă să surprindă cu un anumit grad de aproximare, majoritatea factorilor menționați anterior, în limitele următoarelor ipoteze simplificatoare care au acoperire în practica curentă inginerescă:

1. Barele structurii sunt drepte, prismatice, cu secțiune constantă sau variabilă în lungul ei, nedistorsionate. (În cazul structurilor din beton armat se permite variația secțiunii transversale a armăturii de-a lungul barei, utilizatorul nefiind obligat a introduce noduri suplimentare interemediare în dreptul secțiunilor respective.)
2. Pentru comportarea secțiunii transversale se acceptă ipoteza "secțiunii plane" (Bernoulli). Deformațiile de lunecare sunt presupuse a fi suficient de mici fiind neglijate în analiza capacității portante a secțiunilor, ținându-se cont de acestea doar în comportarea de ansamblu a structurii.
3. Efectul flambajului local și lateral nu este luat în considerare, toate barele sunt considerate a fi compacte și rigidizate adecvat pentru a putea împiedica deformațiile în afara planului.
4. Deplasările nodurilor structurii și ale elementelor pot fi mici sau mari, dar deformațiile elementelor și ale secțiunilor se consideră mici. Rotirea de corp rigid în cadrul unui increment de încărcare (ciclu de calcul) trebuie să fie mică.
5. Modelul utilizat pentru considerarea neliniarității fizice este cel al

- plastificării distribuite.
6. Nodurile structurii plane au trei grade de libertate (două translații și o rotație) respectiv șase grade de libertate în cazul structurilor spațiale (trei translații și trei rotații).
 7. Nodurile sunt considerate punctuale, iar conexiunile semirigide sunt modelate prin intermediul unor legături elastice neliniare, atașate capetelor barei, permițând numai rotiri.
 8. Încărcările sunt conservative. În cazul încărcărilor laterale distribuite în lungul barelor vectorul forțelor nodale este obținut prin echivalarea statică a acestor încărcări în forțe generalizate echivalente la capetele barei, calculate pe baza lungimii inițiale a barei, neglijând modificarea lungimilor barelor la calculul acestora, în timpul procesului de calcul. Oricum această constrângere poate fi ușor eliminată reactualizând la fiecare pas vectorul forțelor echivalente la noduri considerând și efectul modificării lungimii barei, calculând de fiecare dată acest vector pe baza noii lungimi a barei determinate la precedentul pas al analizei.

Accepțiunea barelor prismatice și a rotirilor de corp rigid mici ale barelor este rezonabilă pentru majoritatea structurilor în cadre. Cu toate că structurile în cadre pot avea deplasări ale nodurilor mari, în apropierea producerii colapsului, rotația axei longitudinale ale barelor rămâne mica (rotire de corp rigid mică) întrucât barele cu secțiuni transversale compacte au o rigiditate la încovoiere mare. Teoria deformațiilor mari este utilizată în modelarea completă a comportării în domeniul post critic ale structurilor și ale elementelor acestora. Cu toate acestea, pentru majoritatea tipurilor de structuri, deformațiile mari ale secțiunilor apar doar într-un domeniu de comportare post critic accentuat, neconstituind un domeniu de interes practic pentru proiectarea inginerescă.

Comportarea elasto-plastică a barelor structurii se consideră în cel mai evoluat mod, și anume cel al plastificării distribuite. Pentru precizarea caracteristicilor fizice ale elementului, în acest caz este necesară furnizarea unor date suplimentare referitoare la curba caracteristică a materialului la o solicitare exotrică dată. Așa cum se va arata în continuare această curba va fi definită aproximativ astfel: (1) la nivel de fibră - efort unitar-deformație specifică, și (2) la nivel de secțiune - forța axială-moment încovoietor-deformație axială, moment încovoietor- efort axial-curbură. Atât într-un caz cât și în celălalt efectul deformațiilor de lunecare este neglijat. Astfel în primul caz condiția de plastificare pentru orice punct al secțiunii este dată de relația $\sigma = \sigma_c$ (tensiuni/ deformații uniaxiale) în timp ce în al doilea caz este neglijat efectul forței tăietoare asupra capacității portante a secțiunilor. Efectul deformațiilor de lunecare produse de forțele tăietoare asupra rigidității de ansamblu a elementelor structurii este luat în considerare.

În mod obișnuit se admite că toate forțele variază în funcție de un singur parametru, ceea ce nu este totdeauna conform cu realitatea. În realitate, încărcarea structurii are loc în alt mod. Într-o primă etapă există numai greutatea proprie a structurii și a celorlalte elemente de construcție, după care intervin sarcinile utile, acțiunea cutremurului sau a vântului. Trebuie să se țină seama de această

succesiune de aplicare a forțelor într-o analiză neliniară, întrucât suprapunerea efectelor nu mai poate fi admisă în acest caz. Astfel, în cazul acțiunii seismice forțele orizontale variaza repede alternind ca sens, în timp ce forțele gravitaționale rămân constante. Algoritmul de analiză propus, tratează forțele neproportionale, ca făcând parte din diferite secvențe de încărcare aplicate în mod succesiv. Încărcările verticale și orizontale aplicate proporțional asupra structurilor în cadre reduc rezistența acestora, spre deosebire de cazul aplicării neproportionale ale încărcărilor, în cazul în care încărcările verticale sunt aplicate prima dată (constituie prima secvență de încărcare) urmate de aplicarea forțelor orizontale (a doua secvență de încărcare). Aceasta se datorează descărcărilor elastice ce au loc în conexiunile semirigide și în secțiunile din lungul elementelor intrate în domeniul elasto-plastic, în cazul aplicării neproportionale a încărcărilor. Luarea în considerare a descărcărilor elastice ale fibrelor/secțiunilor corespunzător celor două moduri de considerare a neliniarității fizice, propuse în aceasta metodă, amplifică dimensiunile problemei din punct de vedere numeric, deoarece trebuiesc memorate informații suplimentare pentru fiecare fibră/secțiune privitor la istoria deformațiilor/eforturilor în timpul procesului de încărcare. Din acest motiv în programul de calcul realizat descărcările elastice din fibrele/secțiunile din lungul elementelor nu sunt luate în considerare, deși considerarea acestui efect poate fi ușor modelată și programată. Rezultatele analitice obținute pe baza acestei simplificări, în cazul încărcărilor aplicate static, sunt în general conservative și deseori sunt neglijate în analiza statică neliniară a structurilor.

5.3. ASPECTE PRELIMINARE ALE METODEI

În condițiile calculului automatizat, cerința esențială constă în uniformitatea de tratare, care să conducă la un algoritm simplu, de aplicare generală, cu excluderea luării în considerare a particularităților structurii. Se impune deci unificarea situației pentru toate structurile în cadre cu noduri rigide, articulate, semirigide, stabilind un mod unitar de tratare a efectelor determinante în răspunsul neliniar al structurilor.

O posibilitate de abordare unitară a calculului neliniar, prin integrarea majorității factorilor determinanți în răspunsul neliniar prezentați la punctul 5.2, constă în *multiplicarea cu anumiți coeficienți de corecție*, a elementelor inițiale ale matricelor constitutive corespunzătoare calculului liniar elastic de ordinul I.

Datorită dificultăților de integrare analitică a ecuației diferențiale a fibrei medii deformată, care în cazul luării în considerare a plastificării distribuite în lungul barei rezultă cu coeficienți variabili, considerarea simultană printr-un coeficient comun de corecție a efectelor geometrice și materiale este practic imposibil de realizat. Din acest motiv este propusă o metodă care "decuplează" pentru început efectele geometrice și materiale determinând coeficienți de corecție separați pentru fiecare din aceste două efecte. Integrarea efectului de comportare liniară/neliniară a conexiunilor semi-rigide se face utilizând un element hibrid constituit din bara fără conexiuni căreia îi este atașat un sistem de legături punctuale flexibile la capetele

barei. În acest mod efectul complex al neliniarității materiale, geometrice locale și cel al comportării neliniare al conexiunilor semirigide este surprins în cadrul matricei de rigiditate a elementelor de bară precum și a vectorului forțelor nodale echivalente în cazul unor încărcări ce acționează în lungul elementului. În mod similar vectorul forțelor echivalente la noduri va fi corectat în funcție de aceste efecte.

Efectul global al neliniarității geometrice este luat în calcul prin considerarea explicită a modificării configurației geometrice ale nodurilor și barelor structurii, prin corectarea succesivă a matricei de rotație pe baza căreia se face trecerea de la sistemul de coordonate local la cel global structurii și exprimarea condițiilor de echilibru static în configurația deformată.

Aceste surse de neliniaritate de comportare contribuie la micșorarea treptată a rigidității structurii, pe măsura creșterii sarcinilor și vor fi introduse prin matricea globală de rigiditate, coeficienții acestei matrici micșorându-se în consecință. Epuizarea capacității portante corespunde momentului când rigiditatea structurii devine echivalentă cu zero și se poate datora fie dezvoltărilor accentuate a zonelor plastice în structură provocând apariția unui mecanism plastic de cedare, fie unei pierderi de stabilitate mai înainte de a se fi format acest mecanism. Atât într-un caz cât și în celălalt acest lucru este surprins prin studiul singularității matricei de rigiditate globală a structurii. Pe parcurs calculul urmărește și accentuarea deformabilității structurii a cărei limitare poate constitui de asemenea un criteriu pentru oprirea analizei, independent de cel anterior (studiul post critic de comportare).

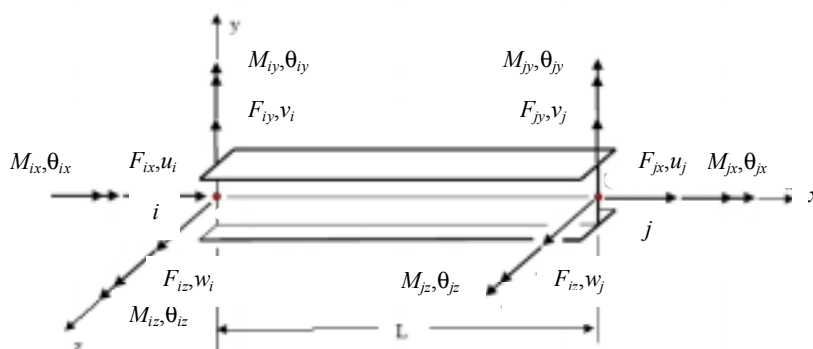


Figura 5.2. Tipul de element utilizat.

Tipul de element utilizat, raportat la sistemul de referință propriu, precum și setul fundamental al eforturilor și deplasărilor de capăt este prezentat în figura 5.2. Gradele de libertate sunt deplasările liniare după cele trei direcții și rotirile în cele două capete ale elementului, în total 12 grade de libertate.

Studiul comportării neliniare a structurii în ansamblu va fi efectuat prin etape succesive, pe parcursul cărora sarcinile cresc în trepte mici, pentru toate etapele.

Într-o anumită etapă intermediară se va considera în mod aproximativ că rigiditățile barelor rămân *constante*, și anume egale cu cele corespunzătoare configurației geometrice și a stării de eforturi obținute la sfârșitul etapei precedente. Ca urmare, pe parcursul aceleiași etape comportarea structurii devine *liniară*, existând proporționalitate între creșterile de deplasări și creșterile de sarcini din etapa respectivă. Se obține astfel o liniarizare pe etape a comportării structurii, în fiecare etapă în parte devenind posibilă aplicarea metodelor generale de rezolvare a structurilor din calculul static liniar.

5.4. MODELAREA ELASTO-PLASTICĂ A STRUCTURII

Analiza elasto-plastică a unei structuri ia în considerare în evaluarea rigidității acesteia, efectele material neliniare ale plastificării secțiunilor elementelor sale constitutive. În prezent se aplică, în principal, două moduri de modelare a comportării elasto-plastice a barelor ce alcătuiesc structura: primul bazat pe conceptul de articulație plastică, conduce la calculul plastic simplu, care determină factorul de cedare al structurii corespunzător stării limită de formare a mecanismului de cedare și al doilea, mai evoluat pe care îl vom numi calculul neliniar elasto-plastic, care consideră formarea zonelor de plastificare ale secțiunilor de-a lungul barelor, determinând scăderea graduală a rigidității structurii atunci când încărcările cresc și determină starea de cedare fie prin depășirea capacității portante, fie prin depășirea deformațiilor admise sub încărcările de exploatare sau prin pierderea stabilității.

O analiză rafinată a efectului neliniarității fizice asupra răspunsului structural global, presupune modelarea tuturor factorilor care cauzează acest efect la toate cele trei nivele de manifestare și anume: la nivel de fibră - relațiile constitutive σ - ϵ ; la nivel de secțiune - caracteristicile de rigiditate EI și EA ; la nivel de element - matricea de rigiditate a elementului. La toate cele trei nivele problema se pune în același mod și anume: determinarea forțelor (sau a tensiunilor) și a rigidităților pentru o stare de deformație prescrisă. Astfel la nivel de fibră pe baza stării de deformație și pe baza relațiilor constitutive se determină în fiecare fibră efortul unitar σ și modulul de elasticitate tangent E_t ; cunoscând modulii de elasticitate tangenți în toate fibrele secțiunii se pot determina în continuare la nivel de secțiune caracteristicile de rigiditate EI și EA ; pe baza caracteristicilor de rigiditate ale secțiunilor se poate determina răspunsul la nivelul elementului, materializat prin matricea de rigiditate și prin vectorul forțelor nodale echivalente. Esențial pentru parcurgerea acestor etape este modul de determinare a stării de deformație în lungul barei (elementului).

Spre deosebire de metoda elementelor finite expusa în capitolul 2, unde starea de deformație din interiorul barei este determinată pe baza câmpului de deplasări generat în funcție de deplasările nodurilor de la capetele elementelor finite (interpolarea deplasărilor), în metoda propusă, starea de deformație din interiorul barei este determinată printr-un proces iterativ de echilibrare a eforturilor

(exterioare și interioare) pe secțiune. Aceste eforturi sunt generate în lungul barei prin selectarea unor polinoame de interpolare ce satisfac condițiile de echilibru static ale elementelor (interpolarea eforturilor). Avantajul utilizării acestui procedeu constă în faptul că este unul exact și nu depinde de caracteristicile materiale la determinarea eforturilor din diferitele secțiuni din lungul barei (în absența efectelor neliniarității geometrice) spre deosebire de procedeul interpolării deplasărilor, adoptat în metoda elementelor finite care este doar unul aproximativ, fiind sensibil influențat de gradul de rafinament al discretizării barei în elemente finite. În consecință, în timp ce în metoda elementelor finite acuratețea rezultatelor poate fi îmbunătățită doar prin rafinarea discretizării conducând la amplificarea drastică a dimensiunilor problemei, în metoda propusă acuratețea rezultatelor poate fi îmbunătățită prin simpla creștere a numărului de puncte de integrare numerică din lungul barei, dimensiunile problemei rămânând neschimbate. Mai mult, acest procedeu face posibilă utilizarea unui singur element în discretizarea barelor și evitarea modelării inelasticității la nivel de fibră, prin utilizarea relațiilor analitice directe de determinare a caracteristicilor de rigiditate secționale, cu efecte benefice asupra timpului de analiză.

În metoda propusă, comportarea elasto-plastică a barelor structurii se consideră în cel mai evoluat mod, și anume cel al plastificării distribuite. Aceasta poate fi făcută prin adoptarea unor relații constitutive neliniare efort unitar-deformație specifică, σ - ϵ , și modelarea inelasticității la nivel de fibră respectiv prin adoptarea unor relații neliniare aproximative M - N - Φ (moment încovoietor- efort axial-curbură), N - M - ϵ (efort axial - moment încovoietor-deformație axială), și modelarea inelasticității la nivel de secțiune. Pentru determinarea răspunsului la nivel de element (determinarea matricei de rigiditate a elementului de bară, vectorul forțelor nodale echivalente) atât în primul caz cât și în al doilea, caracteristicile de rigiditate la încovoiere, EI și axiale EA , ale secțiunilor transversale trebuie evaluate. Dacă în domeniul elastic de comportare aceste caracteristici sunt mărimi constante, reprezentând produsul dintre modulul de elasticitate longitudinal E și caracteristicile geometrice ale secțiunilor, I -moment de inerție, A - aria secțiunii transversale, în domeniul elasto-plastic de comportare aceste caracteristici au un caracter variabil fiind influențate de strarea de tensiune și deformație din interiorul secțiunii, corespunzătoare unui anumit nivel de solicitare exterioară. Aproximațiile care se fac în modul de determinare a acestor caracteristici contribuie în mod hotărâtor asupra răspunsului neliniar al structurilor în ansamblu. O evaluare cât mai exactă a acestora, care să includă în calcul (1) imperfecțiunile de material, (2) variația limitei de curgere pe secțiunea transversală, (3) forma geometrică a secțiunilor transversale, (4) dezvoltarea simetrică/nesimetrică a zonelor plastice, (5) descărcarea elastică a unor fibre, apropie, în mare măsură, modelul teoretic utilizat la modelarea numerică a comportării neliniare, de cel real.

Modulii de rigiditate ale fiecărei bare (EI , EA), ca părți componente ale matricei de rigiditate a structurii, variază în două sensuri: o variație în aceeași secțiune odată cu modificarea solicitărilor exterioare (momentului încovoietor și a efortului axial) așa cum s-a arătat mai sus și o variație de la o secțiune la alta în

lungul barelor, pentru un anumit nivel de solicitare. În scopul determinării matricei de rigiditate a elementului de bară și a vectorului forțelor nodale pentru un anumit nivel al încărcărilor exterioare va trebui să se țină seama de variația acestor caracteristici de rigiditate de la o secțiune la alta, introducându-se coeficienți de corecție similari cu cei determinați în statica liniară pentru introducerea efectului variației de secțiune în lungul barelor. Astfel răspunsul neliniar la nivel de element se determină prin sumarea ponderată a răspunsului unui număr discret de secțiuni transversale. Aceste secțiuni transversale reprezintă puncte de control ale stării de plastificare în lungul elementului, a căror localizare în lungimea elementului depinde de schema de integrare numerică adoptată. La alegerea tipului metodei de integrare numerică trebuie ținut cont de faptul că, prin utilizarea unui singur element pentru discretizarea barelor, punctele de control trebuie dispuse cu precădere în secțiunile în care dezvoltarea zonelor plastice sunt preponderente în comparație cu restul secțiunilor din lungul barei. Astfel utilizarea metodei Gauss-Legendre, care este frecvent utilizată în metoda elementelor finite nu este eficientă în acest caz, întrucât punctele de integrare numerică a acestei metode nu sunt luate la nodurile de capăt ale barei, unde plastificările sunt importante. Pe de altă parte utilizarea unei metode în care nodurile sunt alese anticipat (metoda Simpson) care consideră puncte de integrare în acele secțiuni, nu este eficientă sub aspectul numărului mare de puncte de integrare cerut. O metoda de integrare numerică deosebit de eficientă, pe care o propunem în acest caz, o reprezintă metoda Gauss-Lobatto, întrucât spre deosebire de celelalte metode de integrare numerică ea este eficientă atât prin prisma numărului de puncte cât și ca urmare a faptului că această metodă consideră puncte de integrare și la capetele intervalului de integrare (capetele barei) (Fig. 5.3).

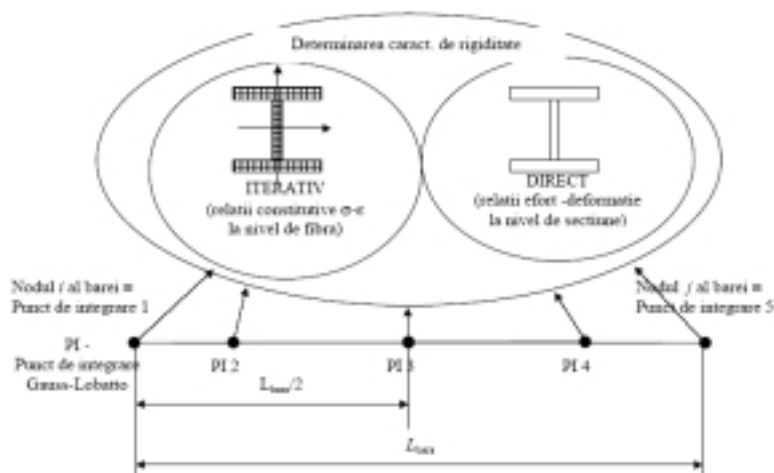


Fig. 5.3. Modelarea elasto-plastică a barelor structurii în modelul de calcul propus.

5.4.1 Modelarea la nivel de fibră și la nivel de secțiune

Răspunsul neliniar al structurilor datorat comportării elasto-pastice a materialului este în mod esențial influențat de modul de evaluare a caracteristicilor de rigiditate secționale ale barelor componente ale structurii. Rafinamentul în ceea ce privește determinarea acestor caracteristici globale ale secțiunilor, se reflectă în mod direct în comportarea de ansamblu a întregii structuri, clasificând metodele globale de analiză în metode simplificate și metode avansate. Considerarea unei reduceri bruște de rigiditate la încovoiere, de la valoarea inițială corespunzătoare comportării perfect elastice $EI=EI_0$ la valoarea zero corespunzătoare plastificării integrale a secțiunii, specifică metodei articulațiilor plastice punctuale cu formare instantanee se dovedește a reprezenta un model care, deseori se îndepărtează sensibil de comportarea reală chiar pentru structuri metalice (ca urmare a existenței tensiunilor reziduale), dar cu deosebire la structuri din alte materiale cum sunt cele din beton armat, sau mixte oțel-beton.

Aplicarea metodei deplasărilor în formulare matriceală, la determinarea răspunsului neliniar al structurilor în cadre, așa cum va fi descrisă în continuare, necesită cunoașterea configurației de rigiditate instantanee (tangenta) a tuturor barelor adică, stabilirea valorilor modulilor de rigiditate EI și EA care intervin în relațiile constitutive dintre forțe și deplasări, pe parcursul pașilor de calcul, pornind de la valoarea inițială corespunzătoare comportării perfect elastice, trecând prin cea intermediară corespunzătoare plastificării parțiale, și până la cea corespunzătoare plastificării integrale a secțiunilor.

În această lucrare sunt propuse două moduri de evaluare a acestor caracteristici de rigiditate: primul, bazat pe modelarea inelasticității la nivel de fibră, și folosirea relațiilor constitutive neliniare σ - ϵ ale materialului, și cel de-al doilea, care determină aproximativ aceste caracteristici, la nivel de secțiune, pe baza relațiilor neliniare analitice aproximative M - N - Φ și N - M - ϵ , determinate prin calibrare cu rezultatele furnizate de analiza numerică la nivel de fibră.

În funcție de stadiul de solicitare exterioară, primul procedeu determină rigiditatea la încovoiere EI și cea axială EA a secțiunilor transversale, modelând explicit efectul dezvoltării graduale a zonelor plastice ca urmare a intrării în curgere a diferitelor fibre ale secțiunii, efectul tensiunilor reziduale, forma secțiunilor etc., prin aplicarea unui procedeu iterativ de echilibrare a eforturilor (interioare și exterioare) pe secțiune, în timp ce, al doilea procedeu, face acest lucru numai aproximativ, dar cu efecte favorabile asupra timpului de execuție.

5.4.1.1 Analiza la nivel de fibră

În cazul modelării inelasticității la nivel de fibră, secțiunile transversale ale elementului de bară sunt acoperite de o rețea de puncte ortogonală, monitorizându-se în fiecare astfel de punct starea de tensiune și deformare în timpul procesului de calcul. Considerând secțiunea din figura 5.4 supusă acțiunii momentelor încovoietoare după cele două direcții principale M_y , M_z și a efortului axial N ,

deformația într-un punct oarecare (i,j) al rețelei se scrie:

$$\varepsilon_{ij} = u + \Phi_z \cdot y_{ij} + \Phi_y \cdot z_{ij} + \varepsilon_0 \quad (5.1)$$

în care cu u s-a notat deformația axială, Φ_y reprezintă curbura în planul normal la secțiune ce conține axa y - y , Φ_z curbura în planul normal la secțiune ce conține axa z - z a secțiunii, iar ε_0 reprezintă deformația specifică în punctul considerat în cazul secțiunii neîncărcate (deformația din tensiuni reziduale în cazul secțiunilor metalice).

Pe baza relațiilor constitutive neliniare σ - ε și prin monitorizarea stării de deformație la nivelul fiecărui punct al rețelei se pot determina caracteristicile de deformabilitate și de rigiditate ale secțiunilor ținând seama de: nivelul solicitărilor exterioare, caracterul acestora (întindere sau compresiune), dezvoltările simetrice sau nesimetrice ale zonelor plastice în secțiune, efectul tensiunilor reziduale, descărcările elastice ale unor fibre, efectul de reconsolidare a materialului, caracteristicile geometrice ale secțiunii (forma secțiunii).

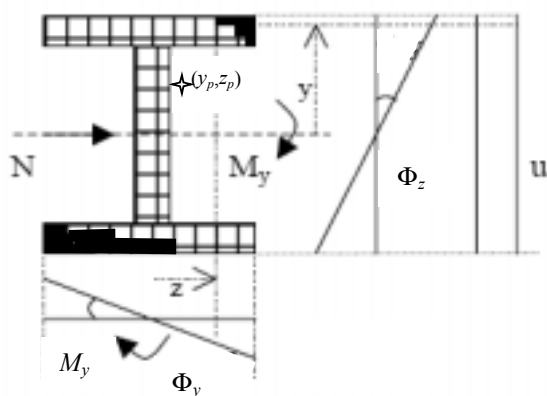


Fig. 5.4. Analiza la nivel de fibră a secțiunilor.

Caracteristicile de deformabilitate ale secțiunii sunt determinate printr-un proces iterativ de echilibrare a eforturilor exterioare și interioare, având la bază metoda iterativă descrisă în capitolul 4. Deformațiile de alunecare s-au presupus suficient de mici pentru a le neglija în comportarea elasto-plastică de ansamblu a secțiunii. Exprimind condițiile de echivalență statică dintre eforturile exterioare și cele interioare se obține următorul sistem de ecuații neliniare cu necunoscutele u , Φ_y și Φ_z :

$$\begin{aligned}
f_N(u, \Phi_y, \Phi_z) &\equiv \sum_i \int_{\Omega_i} \sigma(\varepsilon) \cdot d\Omega_i - N = 0 \\
f_{M_y}(u, \Phi_y, \Phi_z) &\equiv \sum_i \int_{\Omega_i} \sigma(\varepsilon) \cdot y \cdot d\Omega_i - M_y = 0 \\
f_{M_z}(u, \Phi_y, \Phi_z) &\equiv \sum_i \int_{\Omega_i} \sigma(\varepsilon) \cdot z \cdot d\Omega_i - M_z = 0
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Rezolvând numeric acest sistem de ecuații, aplicând metoda Newton-Raphson, predicția parametrilor u , Φ_y și Φ_z ce definesc starea de deformabilitate a secțiunii, în scopul realizării echilibrului, este dată de următoarea relație de recurență:

$$\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k + (\mathbf{J}^k)^{-1} \cdot \mathbf{S}^k \tag{5.3}$$

unde:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^k &= [u^k, \Phi_y^k, \Phi_z^k]^T, \\
\mathbf{r}^{k+1} &= [u^{k+1}, \Phi_y^{k+1}, \Phi_z^{k+1}]^T, \\
\mathbf{S}^k &= [N - f_N(\mathbf{r}^k), M_y - f_{M_y}(\mathbf{r}^k), M_z - f_{M_z}(\mathbf{r}^k)],
\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\mathbf{J}^k = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_N^k}{\partial u} & \frac{\partial f_N^k}{\partial \Phi_y} & \frac{\partial f_N^k}{\partial \Phi_z} \\ \frac{\partial f_{M_y}^k}{\partial u} & \frac{\partial f_{M_y}^k}{\partial \Phi_y} & \frac{\partial f_{M_y}^k}{\partial \Phi_z} \\ \frac{\partial f_{M_z}^k}{\partial u} & \frac{\partial f_{M_z}^k}{\partial \Phi_y} & \frac{\partial f_{M_z}^k}{\partial \Phi_z} \end{bmatrix}_{(u^k, \Phi_y^k, \Phi_z^k)} \tag{5.5}$$

Detalii cu privire la sistematizarea relațiilor de mai sus în funcție de un număr restrâns de date, precum și cu privire la algoritmul de analiză elasto-plastică a secțiunilor metalice și din beton armat sau mixte, solicitate la compresiune cu încovoiere biaxială au fost expuse în cadrul capitolului 4. Integrarea suprafeței de eforturi în secțiune se efectuează printr-unul din procedeele de integrare numerică cunoscute Simpson, Gauss sau aplicând metoda de integrare pe contur descrisă în capitolul 4, astfel încât definirea prin puncte a diagramelor caracteristice σ - ε nu crează dificultăți analizei. Aplicarea metodei de integrare bazată pe teorema Green de transformare a integralelor de suprafață în sumă de integrale perimetrice conduce la un timp de calcul semnificativ mai mic comparativ cu metodele numerice de integrare Simpson sau Green care presupun definirea unei rețele de puncte de integrare pe suprafața secțiunii conducând de asemenea la dificultăți de discretizare în cazul secțiunilor cu forme complexe. Memorarea și reactualizarea stării de deformare în dreptul fiecărui punct al rețelei se justifică doar în cazul în care se dorește luarea în considerare a descărcărilor elastice, ca urmare a unor

încărcări aplicate neproportional sau ca urmare a unei redistribuții neliniare de eforturi.

Având determinată starea de deformare a secțiunii, corespunzătoare echilibrului, caracteristicile de rigiditate ale secțiunilor, rigiditatea la încovoiere față de principalele direcții de încovoiere, și rigiditatea axială, sunt determinate în continuare prin integrarea numerică a tensiunilor pe întreaga secțiune. Astfel în cazul unei secțiuni solicitată la încovoiere uniaxială față de axa z a secțiunii, rigiditatea tangentă la încovoiere pe direcția de acțiune a momentului încovoiator se determină plecând de la relația incrementală constitutivă efort-deformație scrisă la nivelul secțiunii și impunerea condiției de efort axial constant. Astfel, considerând următoarea expresie pentru matricea de rigide tangente a secțiunii (v. și cap.4):

$$\mathbf{k}_{st} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

unde coeficienții t_{ij} , $i,j=1,2$, sunt evaluați considerând starea de deformare a secțiunii rezultată în urma procedurii de echilibrare (5.3) și care au următoarele expresii:

$$\begin{aligned} t_{11} &= \iint E_t dA = EA_t \\ t_{12} &= t_{21} = \iint E_t y dA = ES_t \\ t_{22} &= \iint E_t y^2 dA = EI_t \end{aligned} \quad (5.7)$$

Variația deformațiilor incrementale este relaționată de variația eforturilor prin următoarea relație constitutivă:

$$\mathbf{f}_{st} \Delta \mathbf{e} = \Delta \mathbf{r} \quad (5.8)$$

unde matricea de flexibilitate tangentă a secțiunii se obține prin inversarea matricii tangente $\mathbf{f}_{st} = \mathbf{k}_{st}^{-1}$, vectorul eforturilor incrementale este $\Delta \mathbf{e} = (\Delta N \quad \Delta M_z)^T$ iar vectorul deformațiilor incrementale este $\Delta \mathbf{r} = (\Delta u \quad \Delta \Phi_z)^T$. Definind rigiditatea la încovoiere tangentă a secțiunii ca raportul dintre variația efortului de încovoiere raportată la variația curburii sub efort axial constant, $\Delta N=0$:

$$EI_{st} = \frac{\Delta M_z}{\Delta \Phi_z}, \Delta N=0 \quad (5.9)$$

sistemul de ecuații (5.8) se rezolvă împreună cu condiția restrictivă $\Delta N=0$. Cu această restricție singura necunoscută a sistemului (5.8) este ΔM_z :

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{T} \Delta \hat{\mathbf{e}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\Delta M_z] \quad (5.10)$$

Înlocuind relația (5.10) în sistemul (5.8), multiplicând ambii membrii cu vectorul $\mathbf{T}^T$ și izolând vectorul necunoscutelor reduse $\Delta \hat{\mathbf{e}}$ obținem:

$$\Delta \hat{\mathbf{e}} = (\mathbf{T}^T \mathbf{f}_{st} \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \Delta \mathbf{r} \quad (5.11)$$

Revenind apoi la necunoscutele inițiale prin multiplicarea ambilor membrii ai

relației de mai sus cu vectorul $\mathbf{T}$ obținem în final:

$$\Delta \mathbf{e} = \mathbf{T} \left(\mathbf{T}^T \mathbf{f}_{st} \mathbf{T} \right)^{-1} \mathbf{T}^T \Delta \mathbf{r} \quad (5.12)$$

Explicit relația (5.12) rezultă de forma:

$$\begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t_{22} - \frac{t_{12}^2}{t_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta \Phi_z \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

din care rigiditatea tangentă a secțiunii la încovoiere rezultă:

$$EI_{st} = \frac{\Delta M_z}{\Delta \Phi_z} = t_{22} - \frac{t_{12}^2}{t_{11}} \quad (5.14)$$

sau ținând seama de relațiile (5.7):

$$EI_{st} = \iint E_t y^2 dA - \frac{\iint E_t y dA}{\iint E_t dA} \cdot \iint E_t y dA = EI_t - \frac{ES_t}{EA} ES_t = EI_t - y_p ES_t \quad (5.15)$$

Analizând relația (5.15) se observă ca modulul de rigiditate la încovoiere tangent, a unei secțiuni solicitată la încovoiere simplă cu efort axial, intrată în domeniul elasto-plastic de comportare, poate fi evaluat cu relația:

$$EI_{st} = \iint E_t (y - y_p)^2 dA \quad (5.16)$$

unde y_p reprezintă coordonata noului centru plastic al secțiunii față de sistemul de axe principal al secțiunii:

$$y_p = \frac{\iint E_t y dA}{\iint E_t dA} = \frac{ES_t}{EA_t} \quad (5.17)$$

Urmând un raționament similar, în cazul secțiunilor solicate la încovoiere biaxială cu efort axial, rigiditățile la încovoiere după direcțiile principale de acțiune ale momentelor încovoietoare se calculează după următoarele relații:

$$\begin{aligned} EI_{yt}^s &= \iint E_t (z - z_p) dA = EI_{yt} - z_p ES_{yt} \\ EI_{zt}^s &= \iint E_t (y - y_p) dA = EI_{zt} - y_p ES_{zt} \end{aligned} \quad (5.18)$$

unde y_p și z_p reprezintă coordonatele centrului plastic al secțiunii analizate (Fig. 5.4), iar EI_{yt} , EI_{zt} , ES_{yt} , ES_{zt} reprezintă modulul de rigiditate la încovoiere repectiv statici față de sistemul de axe principal al secțiunii (y, z):

$$EI_{yt} = \iint E_t z^2 dA; \quad EI_{zt} = \iint E_t y^2 dA; \quad ES_{yt} = \iint E_t z dA; \quad ES_{zt} = \iint E_t y dA \quad (5.19)$$

Astfel, în calculul practic, având determinate elementele matricei de rigiditate tangentă a secțiunii, corespunzătoare deformațiilor de echilibru între eforturile exterioare și cele interioare pe secțiune, rigiditățile pe direcțiile principale de încovoiere se calculează simplu prin aplicarea relațiilor (5.18), fără necesitatea efectuării unui nou calcul iterativ sau a integrărilor tensiunilor pe secțiune. Rigiditatea axială a secțiunii se determină simplu în baza următoarei relații:

$$EA_t^s = \iint E_t dA \quad (5.20)$$

5.4.1.2 Analiza la nivel de secțiune

În acest caz modelarea neliniarității fizice este definită global la nivelul secțiunii, pe baza relațiilor analitice neliniare de aproximare a curbelor moment încovoietor-curbură parametrice în forță axială ($M-N-\Phi$), și efort axial-deformație axială parametrice în moment încovoietor ($N-M-\varepsilon$). Aceste curbe depind de: curbele caracteristice $\sigma-\varepsilon$ ale materialelor constitutive, forma secțiunii transversale, tensiuni reziduale în cazul secțiunilor metalice, dispunerea barelor de armătură în cazul secțiunilor de beton armat etc, și o aproximare analitică a acestora este în general dificil de realizat, dar nu imposibil. O dovadă în acest sens s-a prezentat în cadrul capitolului 4, unde mai multe propuneri din literatura de specialitate, pentru aproximarea curbelor $N-M-\Phi$ și $M-N-\varepsilon$ în cazul secțiunilor metalice dublu T au fost prezentate.

Avantajul utilizării unor astfel de relații pentru evaluarea rigidității de încovoiere și a rigidității axiale a secțiunilor constă în timpul de calculator foarte mic necesar acestor evaluări, spre deosebire de procedeul precedent, care utilizând un algoritm iterativ conduce la un efort computațional foarte ridicat.

La nivelul secțiunii neliniaritatea fizică este caracterizată prin relația neliniară între eforturi și deformații:

$$\begin{aligned} M &= f_1(N, \Phi) \\ N &= f_2(M, \varepsilon) \end{aligned} \quad (5.21)$$

ce poate fi scrisă convențional sub forma liniarizată (Fig. 5.5.a):

$$\begin{aligned} M &= EI_{\text{secant}} \cdot \Phi, \quad N = \text{const.} \\ N &= EA_{\text{secant}} \cdot \varepsilon, \quad M = \text{const.} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Pe lângă această reprezentare finită se poate utiliza și o reprezentare diferențială, ce stabilește o legătură liniară între variațiile eforturilor și a deformațiilor corespunzătoare (fig. 5.5.b):

$$\begin{aligned} dM &= EI_{\text{tangent}} \cdot d\Phi \\ dN &= EA_{\text{tangent}} \cdot d\varepsilon \end{aligned} \quad (5.23)$$

Spre deosebire de cazul fizic liniar (elastic), modulii de rigiditate la încovoiere EI_{tangent} , EI_{secant} și modulii de rigiditate axiali EA_{tangent} , EA_{secant} depind de nivelul de solicitare exterioară a secțiunii și reprezintă rigiditatea tangentă, respectiv secantă a secțiunii. În figura 5.5.c se prezintă variația modulului de rigiditate la încovoiere în varianta tangentă respectiv secantă, ca urmare a creșterii, sub efort axial constant, a momentului încovoietor M , $EI_{0(N)}$ reprezentând modulul de rigiditate la încovoiere inițial, corespunzător secțiunii încărcate doar cu efort axial N . În cazul $N=0$ acest modul de rigiditate la încovoiere coincide cu modulul de

rigiditate elastic al secțiunii EI_0 .

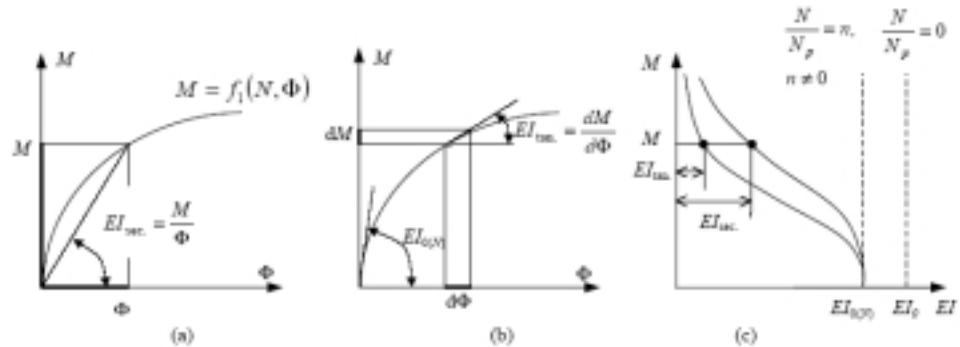


Fig. 5.5. Caracteristicile de rigiditate la încovoiere a secțiunilor în varianta secantă și tangentă.

Pentru exemplificare, în continuare se vor deduce aceste caracteristici în cazul unor expresii analitice ce se pretează la modelarea comportării elasto-plastice a secțiunilor metalice.

(a) Diagrama caracteristică de tip Ramberg-Osgood

Una din schematizarile utilizate deseori pentru modelarea neliniară aproximativă a curbelor neliniare efort-deformație este cea dată de Ramberg și Osgood (Ramberg & Osgood, 1943). Ecuația acestei curbe depinde de doi parametri arbitrari, care pot fi astfel aleși încât să se aproximeze cât mai corect diagrama efort-deformație a barelor din diferite materiale cu proprietăți neliniare (oțel, aluminiu, beton armat etc), anume:

$$\frac{x}{x_0} = \left(1 + a \cdot \left| \frac{y}{y_0} \right|^{n-1} \right) \cdot \frac{y}{y_0}, \quad (5.24)$$

unde y_0 reprezintă o valoare de referință a efortului - pentru secțiuni din oțel se alege de obicei mărimea efortului plastic (moment încovoiitor, efort axial) - iar x_0 este deformația (curbura, deformație axială) corespunzătoare efortului de referință

y_0 , admițând că secțiunea se comportă elastic și liniar ($x_0 = \frac{y_0}{R_0}$), R_0 reprezintă

rigiditatea inițială a secțiunii, la încovoiere, respectiv axială).

În figura 5.6.a este indicată alura curbelor moment încovoiitor-curbură respectiv efort axial-deformație axială, pentru diferite mărimi ale puterii n din relația (5.24), într-o formă adimensională; alegând în mod corespunzător valoarea parametrilor n și a , se obțin diferite curbe caracteristice, cuprinse între o

comportare a materialului perfect elastică și liniară ($n=1$ sau $a=0$) și o comportare ideal elasto-plastică a materialului ($n=\infty$). În forma adimensională, toate curbele pornesc din origine cu panta egală cu unitatea, cu excepția dreptei corespunzătoare lui $n=1$ care are panta $1/(1+a)$; de asemenea, toate curbele trec prin punctul de coordonate $(1, 1+a)$.

Procedeul de liniarizare pe etape a comportării structurii, adoptat în această lucrare pentru analiza globală a cadrelor, se bazează pe modificarea în trepte a modului tangent de rigiditate (de încovoiere respectiv axial) a secțiunilor transversale: $EI_t = \frac{dM}{d\Phi}$, $EA_t = \frac{dN}{d\varepsilon}$. Expresiile acestor moduli de rigiditate în funcție de mărimea efortului corespunzător se poate obține prin diferențierea relației (5.24), adaptând marimile eforturilor și ale deformațiilor, rezultând:

$$EI_t = \frac{dM}{d\Phi} = \frac{M}{\Phi_0} \cdot \frac{1}{1 + a \cdot n \cdot \left| \frac{M}{M_{pc}} \right|^{n-1}} = \frac{EI_0}{1 + a \cdot n \cdot \left| \frac{M}{M_{pc}} \right|^{n-1}} \quad (5.25)$$

$$EA_t = \frac{dN}{d\varepsilon} = \frac{N}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{1 + a \cdot n \cdot \left| \frac{N}{N_{pc}} \right|^{n-1}} = \frac{EA_0}{1 + a \cdot n \cdot \left| \frac{N}{N_{pc}} \right|^{n-1}} \quad (5.26)$$

unde M_{pc} , N_{pc} reprezintă momentul încovoiitor plastic respectiv efortul axial plastic corectat, determinați în funcție de curba de interacțiune plastică adoptată.

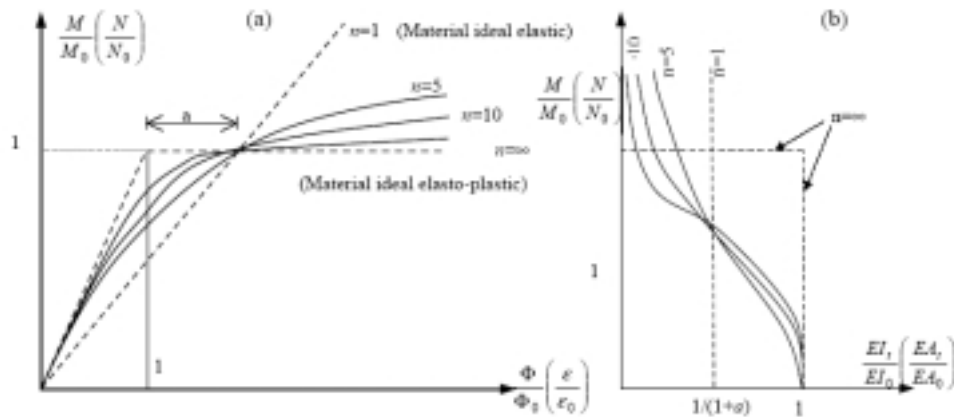


Fig. 5.6 Curbe caracteristice de tip Ramberg-Osgood.

În figura 5.6b sunt indicate câteva curbe EI_t-M respectiv EA_t-N pentru diferite valori ale parametrului de forma n .

b) *Diagrama caracteristică pentru modelarea secțiunilor metalice dublu T în cazul încovoierii uniaxiale.*

Efectul tensiunilor reziduale asupra dezvoltării graduale a zonelor plastice în secțiunile metalice și implicit asupra formeii curbelor caracteristice globale ($M-N-\Phi$, $N-M-\epsilon$) la nivelul secțiunilor este determinant, mai cu seamă în cazul unor eforturi axiale (de întindere sau de compresiune) importante, și o neglijare a acestora într-o analiză avansată nu este permisă. O posibilitate de surprindere a acestui efect la nivelul global de comportare elasto-plastică a secțiunilor o reprezintă relațiile analitice sau cvasianalitice de aproximare cât mai exactă a curbelor caracteristice globale determinate printr-o analiză exactă, la nivel de fibră. Prin acest procedeu de calibrare a curbelor, care are la bază în principal metoda celor mai mici pătrate pentru interpolarea funcțiilor definite discret, se pot determina expresii analitice sau cvasianalitice pentru definirea curbelor caracteristice de comportare a secțiunilor în domeniul elasto-plastic, care să țină seama de: efectul tensiunilor reziduale asupra dezvoltărilor graduale a zonelor plastice, forma secțiunilor, interacțiunea eforturilor secționale (moment încovoiător și efort axial).

În cadrul capitolului 4 a fost prezentată o propunere în acest sens, din literatura de specialitate (Attala s.al, 1995), pentru modelarea curbelor moment încovoiător-efort axial-curbură ($M-N-\Phi$) și a curbelor efort axial-moment încovoiător-deformație axială ($N-M-\epsilon$), în cazul secțiunilor metalice dublu T. Considerându-se că sub o anumită stare de încărcare (momentul încovoiător M și efortul axial N), deformațiile totale se compun din deformații elastice și deformații pseudo-plastice, au rezultat următoarele expresii pentru curbura totală respectiv deformația axială totală:

$$\Phi(M) = \frac{M}{EI_0} + \frac{c}{M_{pc} - M_{rc}} \cdot \int_{M_{rc}}^M \left(\frac{m - M_{rc}}{M_{pc} - m} \right)^n \cdot dm \quad (5.27)$$

$$\epsilon(N) = \frac{N}{EA_0} + \frac{c_n}{N_{pc} - N_r} \int_{N_r}^N \left(\frac{n - N_r}{N_{pc} - n} \right)^{n_p} \cdot dn \quad (5.28)$$

unde:

- M_{rc} reprezintă momentul încovoiător corespunzător inițierii curgerii, parametric în forța axială N .
- M_{pc} reprezintă momentul încovoiător corespunzător plastificării integrale a secțiunii în prezența forței axiale N .
- N_r reprezintă efortul axial corespunzător inițierii curgerii în secțiune, parametric în momentul încovoiător M .
- N_{pc} reprezintă efortul axial corespunzător plastificării integrale a secțiunii în prezența momentului încovoiător M .
- c, c_n, n, n_p sunt coeficienți rezultați în urma calibrării cu modelul de analiză la nivel de fibră.

Relațiile definitorii ale acestor parametri au fost prezentate în cadrul capitolului 4. Pentru evaluarea momentului încovoietor plastic corectat M_{pc} și a efortului axial plastic corectat N_{pc} se recurge la rezolvarea unei ecuații polinomiale de gradul șase a cărei coeficienți au fost determinați prin calibrare (Sanz-Picon, 1992). Deși, în principiu, rezolvarea numerică a acestei ecuații nu comportă dificultăți deosebite, dar îngreunează procesul computațional, și având în vedere faptul că diferențele dintre curba de interacțiune N_p - M_p (corespunzătoare plastificării integrale a secțiunilor) obținute pe baza ecuațiilor de interacțiune propuse de EC3 comparativ cu cea determinată prin rezolvarea ecuației polinomiale sunt nesemnificative, pentru calculul practic pot fi adoptate relațiile propuse de EC3 pentru calcularea eforturilor de plastificare totală a secțiunilor:

- pentru axa de inerție maximă:

$$\begin{aligned} \frac{N}{N_p} &\leq 0,2, \quad M_{pc} = M_p \\ \frac{N}{N_p} &> 0,2, \quad M_{pc} = 1,11 \cdot M_p \cdot \left(1 - \frac{N}{N_p}\right) \\ N_{pc} &= N_p \cdot \left(1 - 0,90 \cdot \frac{M}{M_p}\right) \end{aligned} \quad (5.29)$$

- pentru axa de inerție minimă

$$\begin{aligned} \frac{N}{N_p} &\leq 0,2, \quad M_{pc} = M_p \\ \frac{N}{N_p} &> 0,2, \quad M_{pc} = 1,56 \cdot M_p \cdot \left(1 - \frac{N}{N_p}\right) \cdot \left(0,6 + \frac{N}{N_p}\right) \\ N_{pc} &= 0,2 + 0,8 \cdot \sqrt{1 - \frac{M}{M_p}} \end{aligned} \quad (5.30)$$

unde: M_p reprezintă momentul încovoietor plastic în absența efortului axial, diferențiat după axa de inerție pentru care se face calculul, iar N_p reprezintă efortul axial plastic în absența momentului încovoietor.

Derivând relația (5.27) în raport cu momentul încovoietor M și relația (5.28) în raport cu efortul axial N ținând seama de relația evidentă:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(y) dy \right) = f(x) \quad (5.31)$$

rezultă:

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi(M)}{dM} &= \frac{d}{dM} \left(\frac{M}{EI_0} \right) + \frac{c}{M_{pc} - M_{rc}} \cdot \frac{d}{dM} \left(\int_{M_{rc}}^M \left(\frac{m - M_{rc}}{M_{pc} - m} \right)^n \cdot dm \right) = \\
&= \frac{1}{EI_0} + \frac{c}{M_{pc} - M_{rc}} \cdot \left(\frac{M - M_{rc}}{M_{pc} - M} \right)^n \\
\frac{d\varepsilon(N)}{dN} &= \frac{d}{dN} \left(\frac{N}{EA_0} \right) + \frac{c_n}{N_{pc} - N_r} \cdot \frac{d}{dN} \left(\int_{N_r}^N \left(\frac{n - N_r}{N_{pc} - n} \right)^{n_p} \cdot dn \right) = \\
&= \frac{1}{EA_0} + \frac{c_n}{N_{pc} - N_r} \cdot \left(\frac{N - N_r}{N_{pc} - N} \right)^{n_p}
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Astfel caracteristicile de rigiditate ale secțiunilor - modulul de rigiditate la încovoiere EI_t și modulul de rigiditate axial EA_t - pot fi obținute prin inversarea relațiilor (5.32) rezultând:

$$\begin{aligned}
EI_t &= EI_0, \quad M \leq M_{rc} \\
EI_t &= \frac{dM}{d\Phi} = \frac{EI_0}{1 + \frac{M_p \cdot k_N}{M_{pc} - M_{rc}} \cdot \left(\frac{M - M_{rc}}{M_{pc} - M} \right)^n}, \quad M > M_{rc}
\end{aligned} \tag{5.33}$$

$$\begin{aligned}
EA_t &= EA_0, \quad N \leq N_r \\
EA_t &= \frac{dN}{d\varepsilon} = \frac{EA_0}{1 + \frac{k_M}{N_{pc} - N_r} \cdot \left(\frac{N - N_r}{N_{pc} - N} \right)^{n_p}}, \quad N > N_r
\end{aligned} \tag{5.34}$$

unde:

- pentru axa de inerție maximă:

$$k_N = 0,15 + 2,33 \cdot \bar{n} - 7,0 \cdot \bar{n}^2 + 5,47 \cdot \bar{n}^3 \tag{5.35}$$

$$k_M = 0,15 \times 10^{-3} \cdot EA_0 \tag{5.36}$$

- pentru axa de inerție minimă:

$$k_N = 0,34 + 2,65 \cdot \bar{n} - 0,74 \cdot \bar{n}^2 + 1,74 \cdot \bar{n}^3 \tag{5.37}$$

$$k_M = (0,2 + 0,8 \cdot \bar{m}) \cdot 10^{-3} \cdot EA_0 \tag{5.38}$$

$$\bar{n} = \frac{N}{N_p}, \quad \bar{m} = \frac{M}{M_p} \tag{5.39}$$

Variația modulului de rigiditate la încovoiere EI_t pentru o secțiune metalică

W8x31 considerând ecuațiile analitice (5.33) și (5.34), corespunzătoare planului de rigiditate maxim, în comparație cu analiza la nivel de fibră realizată pe baza programului *ASEP* este prezentată în figura 5.7. Astfel în figura 5.7.a sunt prezentate comparativ, în forma adimensională, curbele $M/M_p - EI_t/EI_0$ parametrice în forța axială de compresiune, obținute pe baza relației analitice (5.33) și pe cale numerică în doua variante: cu considerarea efectului tensiunilor reziduale respectiv fără luarea în considerare a acestui efect. În cazul considerării tensiunilor reziduale s-a folosit distribuția prevăzută de codul american AISC-LRFD. În figura 5.7.b sunt prezentate curbele $M/M_p - EI_t/EI_0$ obținute pe baza relației analitice (5.25), considerând o valoare a efortului axial de compresiune $N/N_p=0.2$, pentru $a=1$ și diferite valori ale parametrului de formă n , comparativ cu cele obținute pe cale numerică.

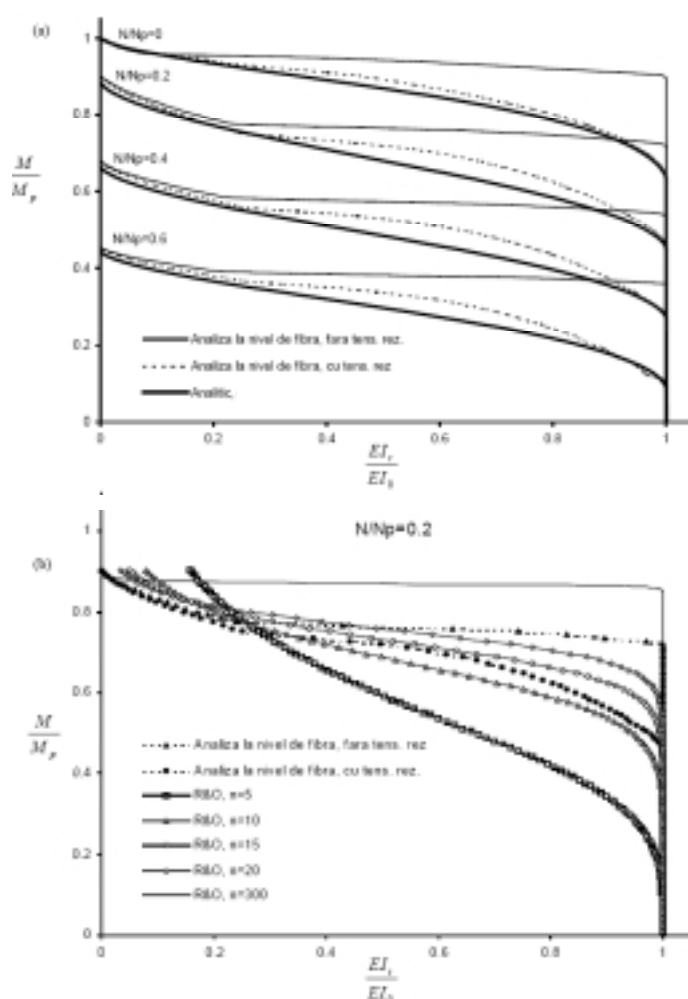


Fig.5.7. Rigiditatea la încovoiere a secțiunilor metalice.

c) *Diagrama caracteristică pentru modelarea secțiunilor metalice dublu T în cazul încovoierii bi-axiale.*

Principalul dezavantaj al relațiilor cvasi-analitice propuse în (Attala, ș.al., 1994) rezidă în faptul că ele pot fi aplicate doar în cazul încovoierii uni-axiale. În cazul stâlpilor structurilor în cadre spațiale solicitarea preponderentă este cea a încovoierii bi-axiale cu efort axial astfel că relațiile moment-curbură prezentate la punctul (b) nu mai sunt riguros valabile. În continuare se propune o altă modalitate de cuantificare a rigidității elasto-plastice la încovoiere a secțiunilor metalice. Relațiile propuse, modifică relațiile moment-curbură propuse de Al-Bermani (Al Bermani, 1990) prin considerarea unei variații neliniare a rigidității tangente. Relația care exprimă variația rigidității ca urmare a solicitărilor axiale și de încovoiere fiind dată de următoarele relații:

$$K_T = K_0 \left[1 - \left(\frac{M - M_1}{M_2 - M_1} \right)^\alpha (1 - p) \right], \quad M_1 \leq M \leq M_2 \quad (5.40)$$

$$K_T = pK_0, \quad M > M_2$$

Semnificația mărimilor din relațiile de mai sus este următoarea:

K_T - reprezintă rigiditatea tangentă la încovoiere (în planul de rigiditate maxim sau minim);

K_0 - reprezintă rigiditatea la încovoiere inițială;

M - reprezintă momentul încovoietor de solicitare corespunzător planului de rigiditate considerat;

M_1 - reprezintă momentul încovoietor de inițiere a curgerii;

M_2 - reprezintă momentul încovoietor corespunzător plastificării secțiunii;

p - reprezintă coeficientul de reconsolidare a materialului; pentru $p=0$ reconsolidarea materialului este neglijată;

α - reprezintă coeficientul ce definește forma curbei de variație neliniară a rigidității tangente; pentru $\alpha=1$ se regăsește curba lui Al-Bermani.

Coeficienții p și α sunt determinați prin calibrări numerice. Influența acțiunii concomitente a efortului axial și a momentelor încovoietoare precum și a efectului tensiunilor reziduale este luată în considerare în expresia momentelor încovoietoare de inițiere a curgerii, M_1 , respectiv în cel corespunzător plastificării integrale a secțiunii M_2 .

Spre exemplificare, considerând variația rigidității la încovoiere în planul de rigiditate maxim, și asumând suprafața de interacțiune plastică de ecuație cunoscută, expresia momentului de plastificare este determinată din rezolvarea ecuației $\Gamma(N, M_y, M_z)=0$, ce definește suprafața de interacțiune, în raport cu momentul încovoietor corespunzător direcției de soliciatate considerate, iar momentul încovoietor corespunzător inițierii curgerii este determinat în baza relației:

$$M_{li} = \left(\sigma_c - \sigma_r - \frac{N}{A} - \frac{M_j}{W_{elj}} \right) W_{eli} \quad (5.41)$$

unde indicii inferiori i și j reprezintă direcțiile de încovoiere corespunzătoare celor două planuri principale de încovoiere ale secțiunii, σ_c reprezintă valoarea tensiunii de curgere a materialului iar σ_r reprezintă valoarea maximă a tensiunii reziduale considerate pe secțiune, A aria secțiunii iar W_{el} modulul de rezistență elastic al secțiunii. Reprezentarea geometrică în spațiul moment-curbură este descrisă în figura 5.8.

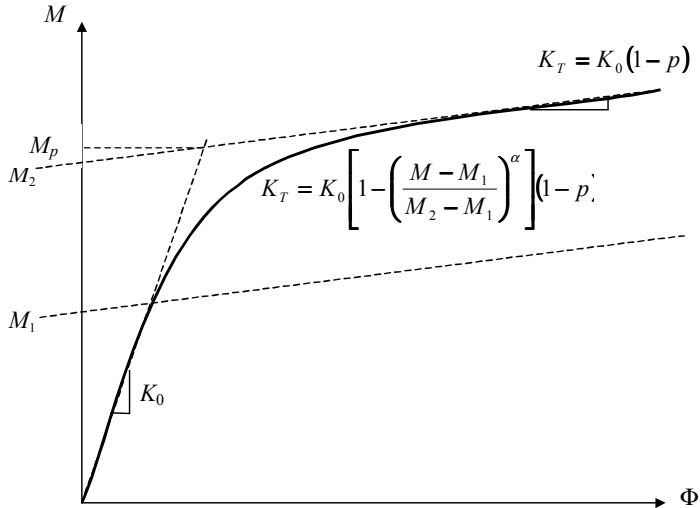


Fig. 5.8. Relația analitică propusă pentru determinarea caracteristicilor de rigiditate ale secțiunilor metalice.

5.4.2. Modelarea neliniarității fizice la nivel de element

5.4.2.1. Matricea de rigiditate tangentă a elementului de bară

Fie bara din figura 5.9 raportată la sistemul de referință propriu (local). Coordonatele locale sunt deplasările liniare și rotirile în cele două capete ale elementului de bară pe direcțiile sistemului de axe considerat.

Determinarea termenilor matricei de rigiditate tangentă (instantanee) a barei, cu caracteristici de rigiditate (EI_{ty} , EI_{tz} și EA_t) variabile de la secțiune la secțiune, funcție de solicitare, reprezintă o problemă similară celei întâlnite în calculul liniar la barele cu secțiune variabilă. Prin urmare, pe parcursul etapelor succesive ale calculului neliniar sunt aplicabile toate relațiile sistematizate deduse pentru calculul liniar al barelor cu secțiune variabilă. Prin introducerea variabilei adimensionale $\xi = x/L$, modulii de rigiditate la încovoiere EI_t și de rigiditate axial EA_t într-o secțiune curentă ξ a barei sunt exprimați astfel:

$$\begin{aligned}
EI_{ty}(\xi) &= EI_{0y} \cdot f_y(\xi) \\
EI_{tz}(\xi) &= EI_{0z} \cdot f_z(\xi) \\
EA_t(\xi) &= EA_0 \cdot f_x(\xi)
\end{aligned}
\tag{5.42}$$

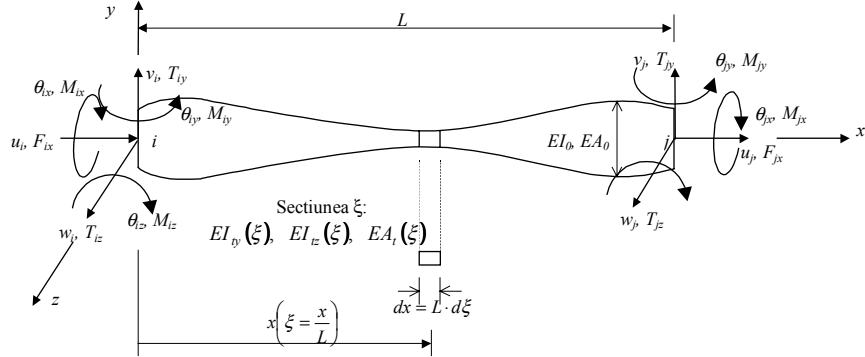


Fig. 5.9. Elementul de bară cu caracteristici de rigiditate secționale variabile în lungul ei.

unde funcțiile de corecție $f_{y(z)}$ și f_x , introduc efectul de degradare a rigidităților inițiale elastice EI_0 respectiv EA_0 ca urmare a creșterii nivelului de solicitare și a dezvoltărilor zonelor plastice în secțiune. Valorile acestor funcții sunt evaluate fie direct, pe baza curbelor caracteristice la nivel de secțiune, fie printr-un proces iterativ (la nivel de fibra) de echilibrare a eforturilor interioare și exterioare pe secțiune, luând valori în intervalul (0,1].

Matricea de rigiditate se va determina prin inversarea matricei de flexibilitate (Chiorean, 2001; Chiorean & Bârsan, 2005). Pentru exemplificarea modului în care se poate determina matricea de flexibilitate se consideră bara din figura 5.10 raportată la sistemul de coordonate de bază și încărcată cu forțele de capăt pe direcțiile gradelor de libertate reținute (M_{iy} , M_{iz} , M_{jy} , M_{jz} , M_{x} , N). În cazul aplicării unor forțe pe parcursul barei aceste forțe sunt transformate în forțe echivalente la nodurile de capăt ale barei, neintervenind în expresia matricei de rigiditate. Astfel, cu notațiile din figura 5.10., luând în considerare deformațiile axiale, de încovoiere și de alunecare respectiv torsiune, energia potențială de deformare se scrie:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{N^2}{EA_t(x)} dx + \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{\left(\frac{M_{jz} - M_{iz}}{L} x + M_{iz} \right)^2}{EI_{tz}(x)} dx + \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{\left(\frac{M_{jy} - M_{iy}}{L} x + M_{iy} \right)^2}{EI_{ty}(x)} dx + \\
&+ \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{\left(\frac{M_{jz} - M_{iz}}{L} \right)^2}{GA_z(x)} dx + \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{\left(\frac{M_{jy} - M_{iy}}{L} \right)^2}{GA_y(x)} dx + \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \frac{M_x^2}{GI_t(x)} dx
\end{aligned}
\tag{5.43}$$

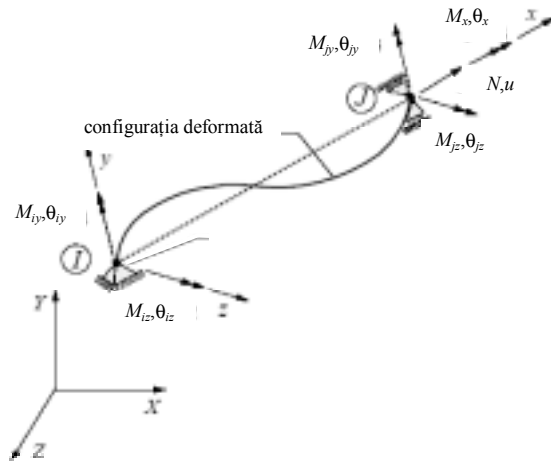


Fig. 5.10. Elementul de bară în sistemul coordonatelor de bază.

Deplasările produse de deformarea barei, la cele două capete ale barei, se pot determina aplicând a doua teoremă a lui Castigliano, rezultând:

$$\begin{bmatrix} u \\ \theta_{iy} \\ \theta_{jy} \\ \theta_{iz} \\ \theta_{jz} \\ \theta_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial N} \\ \frac{\partial U}{\partial M_{iy}} \\ \frac{\partial U}{\partial M_{jy}} \\ \frac{\partial U}{\partial M_{iz}} \\ \frac{\partial U}{\partial M_{jz}} \\ \frac{\partial U}{\partial M_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\int_0^L \frac{dx}{EA_t(x)} \right) \cdot N_i \\ \left(\int_0^L \frac{1-x}{EI_y(x)} dx + \int_0^L \frac{dx}{L^2 GA_y(x)} \right) \cdot M_{iy} + \left(\int_0^L \frac{x}{EI_y(x)} dx - \int_0^L \frac{dx}{L^2 GA_y(x)} \right) \cdot M_{jy} \\ \left(\int_0^L \frac{x}{EI_y(x)} dx - \int_0^L \frac{dx}{L^2 GA_y(x)} \right) \cdot M_{iy} + \left(\int_0^L \frac{1-x}{EI_y(x)} dx + \int_0^L \frac{dx}{L^2 GA_y(x)} \right) \cdot M_{jy} \\ \left(\int_0^L \frac{1-x}{EI_z(x)} dx + \int_0^L \frac{dx}{L^2 GA_z(x)} \right) \cdot M_{iz} + \left(\int_0^L \frac{x}{EI_z(x)} dx - \int_0^L \frac{dx}{L^2 GA_z(x)} \right) \cdot M_{jz} \\ \left(\int_0^L \frac{x}{EI_z(x)} dx - \int_0^L \frac{dx}{L^2 GA_z(x)} \right) \cdot M_{iz} + \left(\int_0^L \frac{1-x}{EI_z(x)} dx + \int_0^L \frac{dx}{L^2 GA_z(x)} \right) \cdot M_{jz} \\ \left(\int_0^L \frac{dx}{GI_t(x)} \right) \cdot M_x \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Neglijând deformările plastice de alunecare și de torsiune ($GA_{y(z)} = \text{const}$, $GI_t = \text{const}$) și efectuând în continuare schimbarea de variabilă $\xi = x/L$ în relațiile (5.44), rezultă

următoarea formă pentru matricea de flexibilitate $\mathbf{F}$ a barei drepte de cadru spațial:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \int_0^1 \frac{L}{EA(\xi)} d\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_0^1 \frac{L(1-\xi)^2}{EI_y(\xi)} d\xi + \frac{1}{LGA_y} & \int_0^1 \frac{L\xi(1-\xi)}{EI_y(\xi)} d\xi - \frac{1}{LGA_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \int_0^1 \frac{L\xi(1-\xi)}{EI_y(\xi)} d\xi - \frac{1}{LGA_y} & \int_0^1 \frac{L\xi^2}{EI_y(\xi)} d\xi + \frac{1}{LGA_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^1 \frac{L(1-\xi)^2}{EI_z(\xi)} d\xi + \frac{1}{LGA_z} & \int_0^1 \frac{L\xi(1-\xi)}{EI_z(\xi)} d\xi - \frac{1}{LGA_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \int_0^1 \frac{L\xi(1-\xi)}{EI_z(\xi)} d\xi - \frac{1}{LGA_z} & \int_0^1 \frac{L\xi^2}{EI_z(\xi)} d\xi + \frac{1}{LGA_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{GI_t} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Prin inversarea matricei de flexibilitate $\mathbf{F}$ se obține matricea de rigiditate ${}^e\mathbf{K}_{(6 \times 6)}$ a barei în coordonatele de bază, matrice ce va conține termeni asemănători ca formă cu cei ai matricei $\mathbf{F}$. Pentru simplificarea formei matricei de rigiditate se vor introduce următorii *coeficienți de corecție*:

$$c_x = \int_0^1 \frac{1}{f_x(\xi)} d\xi \quad c_{1y} = 3 \int_0^1 \frac{(1-\xi)^2}{f_y(\xi)} d\xi; \quad c_{2y} = 3 \int_0^1 \frac{\xi^2}{f_y(\xi)} d\xi; \quad c_{3y} = 6 \int_0^1 \frac{\xi(1-\xi)}{f_y(\xi)} d\xi \quad (5.46)$$

$$c_{1z} = 3 \int_0^1 \frac{(1-\xi)^2}{f_z(\xi)} d\xi; \quad c_{2z} = 3 \int_0^1 \frac{\xi^2}{f_z(\xi)} d\xi; \quad c_{3z} = 6 \int_0^1 \frac{\xi(1-\xi)}{f_z(\xi)} d\xi \quad (5.47)$$

În continuare matricea de rigiditate, în sistemul local elementului, se alcătuește în condițiile domeniului micilor deplasări și rotații printr-o transformare liniară între coordonatele de bază și cele locale elementului astfel:

$$\mathbf{K}_{(12 \times 12)} = \mathbf{T}_{(6 \times 12)}^T \cdot {}^e\mathbf{K}_{(6 \times 6)} \cdot \mathbf{T}_{(6 \times 12)} \quad (5.48)$$

unde matricea liniară de transformare $\mathbf{T}$ are următoarea formă:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/L & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/L & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/L & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

Astfel matricea de rigiditate a unui element de bară în coordonate locale, ținând seama de comportarea elasto-plastică a secțiunilor din lungul ei, rezultă de următoarea formă:

$${}^e \mathbf{K}_{(12 \times 12)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii(6 \times 6)} & \mathbf{K}_{ij(6 \times 6)} \\ \mathbf{K}_{ji(6 \times 6)} & \mathbf{K}_{jj(6 \times 6)} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

unde

$$\mathbf{K}_{ii} = \begin{bmatrix} \frac{EA_0}{L} f_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{0,z}}{L^3} f_{22} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{0,z}}{L^2} f_{26} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_{0,y}}{L^3} f_{33} & 0 & -\frac{6EI_{0,y}}{L^2} f_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_{0,y}}{L^2} f_{53} & 0 & \frac{4EI_{0,y}}{L} f_{55} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_{0,z}}{L^2} f_{62} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{0,z}}{L} f_{66} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

$$\mathbf{K}_{jj} = \begin{bmatrix} \frac{EA_0}{L} f_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{0,z}}{L^3} f_{88} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{0,z}}{L^2} f_{812} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_{0,y}}{L^3} f_{99} & 0 & \frac{6EI_{0,y}}{L^2} f_{911} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_{0,y}}{L^2} f_{119} & 0 & \frac{4EI_{0,y}}{L} f_{1111} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_{0,z}}{L^2} f_{128} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{0,z}}{L} f_{1212} \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

$$\mathbf{K}_{ji}^T = \mathbf{K}_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{EA_0}{L} f_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{0,z}}{L^3} f_{82} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{0,z}}{L^2} f_{86} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_{0,y}}{L^3} f_{93} & 0 & \frac{6EI_{0,y}}{L^2} f_{95} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_{0,y}}{L^2} f_{113} & 0 & \frac{2EI_{0,y}}{L} f_{115} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_{0,z}}{L^2} f_{122} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{0,z}}{L} f_{126} \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

și în care factorii de corecție f_{ij} sunt dați de următoarele expresii (Chiorean&Bârsan, 2005):

$$f_{11} = f_{77} = f_{71} = f_{17} = \frac{1}{c_x}; \quad (5.54)$$

$$f_{22} = f_{88} = f_{82} = f_{28} = \frac{s_z}{Z_z + t_z s_z}; \quad f_{33} = f_{99} = f_{93} = f_{39} = \frac{s_y}{Z_y + t_y s_y}; \quad (5.55)$$

$$f_{55} = \frac{3\left(c_{2y} + \frac{t_y}{4}\right)}{Z_y + t_y s_y}; \quad f_{66} = \frac{3\left(c_{2z} + \frac{t_z}{4}\right)}{Z_z + t_z s_z} \quad (5.56)$$

$$f_{35} = f_{53} = f_{95} = f_{59} = \frac{2c_{2y} + c_{3y}}{Z_y + t_y s_y}; \quad f_{26} = f_{62} = f_{86} = f_{68} = \frac{2c_{2z} + c_{3z}}{Z_z + t_z s_z} \quad (5.57)$$

$$f_{113} = f_{311} = f_{119} = f_{911} = \frac{2c_{1y} + c_{3y}}{Z_y + t_y s_y}; \quad f_{122} = f_{212} = f_{128} = f_{812} = \frac{2c_{1z} + c_{3z}}{Z_z + t_z s_z} \quad (5.58)$$

$$f_{1111} = \frac{3\left(c_{1y} + \frac{t_y}{4}\right)}{Z_y + t_y s_y}; \quad f_{1212} = \frac{3\left(c_{1z} + \frac{t_z}{4}\right)}{Z_z + t_z s_z} \quad (5.59)$$

$$f_{115} = f_{511} = \frac{3\left(c_{3y} - \frac{t_y}{2}\right)}{Z_y + t_y s_y}; \quad f_{126} = f_{612} = \frac{3\left(c_{3z} - \frac{t_z}{2}\right)}{Z_z + t_z s_z} \quad (5.60)$$

$$Z_y = 4c_{1y}c_{2y} - c_{3y}^2; \quad Z_z = 4c_{1z}c_{2z} - c_{3z}^2; \quad (5.61)$$

$$s_y = c_{1y} + c_{2y} + c_{3y}; \quad s_z = c_{1z} + c_{2z} + c_{3z} \quad (5.62)$$

$$t_y = \frac{12EI_y}{GA_y L^2}; \quad t_z = \frac{12EI_z}{GA_z L^2} \quad (5.63)$$

Factorii de corecție f_{ij} definiți de relațiile (5.54-5.60) vor fi subunitari, întrucât valorile rigidităților corespunzătoare diferitelor etape de încărcare sunt inferioare celei inițiale, și au un caracter instantaneu, fiind reevaluați la sfârșitul fiecărei etape a procesului de calcul, în funcție de modificarea stărilor de eforturi, reactualizând în acest mod matricea de rigiditate tangentă a barei.

Astfel răspunsul neliniar la nivel de element se determină prin sumarea ponderată a răspunsului unui număr discret de secțiuni transversale. Aceste secțiuni transversale reprezintă puncte de control a stării de plastificare în lungul elementului, a căror localizare în lungimea elementului depinde de schema de integrare numerică adoptată. În cazul în care funcțiile de corecție f_x, f_y, f_z sunt determinate direct, rezultând expresii analitice simple - funcții continue-, integralele (5.46-5.47) se pot calcula exact. În cazul unor expresii analitice complicate precum și în cazul funcțiilor definite discret (analiza la nivel de fibră) calculul exact devine dificil, chiar imposibil, și se adoptă metode de aproximare pentru calculul integralelor. La alegerea tipului metodei de integrare numerică trebuie ținut cont de faptul că în cazul utilizării unui singur element pentru discretizarea barelor, punctele de control trebuie dispuse cu precădere în secțiunile în care dezvoltarea zonelor plastice sunt preponderente în comparație cu restul secțiunilor din lungul barei. Astfel utilizarea metodei Gauss-Legendre, care este frecvent utilizată în metoda elementelor finite nu este eficientă în acest caz, întrucât nodurile de integrare numerică a acestei metode nu sunt luate și la nodurile de capăt ale barei, unde plastificările sunt importante. Pe de altă parte utilizarea unei metode în care nodurile sunt alese anticipat (metoda Simpson) care consideră noduri și în acele secțiuni, nu este eficientă sub aspectul numărului mare de puncte de integrare cerut la o precizie similară. Din acest motiv se propune în acest caz metoda Gauss-Lobatto, care la un același număr de puncte de integrare ca și metoda Gauss-Legendre are avantajul că prevede noduri de integrare și la capetele intervalului (capetele barei), unde în mod frecvent dezvoltările plastice sunt considerabile.

În cazul aplicării unei metode de tip Gauss trebuie avut în vedere faptul că limitele de integrare sunt diferite de cele din relațiile (5.46-5.47). Astfel printr-o schimbare de variabilă corespunzătoare, se reduce orice integrală cu limite finite ($a, b, a < b$) și integrand continuu F la următoarea formă:

$$\int_a^b F(x)dx = \frac{b-a}{2} \cdot \int_{-1}^1 \Psi(z)dz \quad (5.64)$$

unde noua funcție Ψ este:

$$\Psi(z) = F\left(\frac{1}{2}(b-a) \cdot z + \frac{1}{2}(b+a)\right) \quad (5.65)$$

În cazul particular în care limitele de integrare ale funcției F sunt $a=0$ și $b=1$ și aplicând formula pentru cuadratura gaussiană obținem următoarea aproximare:

$$\int_0^1 F(x)dx = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^n w_j \cdot F(0,5 \cdot z_j + 0,5) \quad (5.68)$$

unde cu z_j și w_j s-au notat abscisele respectiv coeficienții de pondere corespunzători uneia dintre variantele de cuadratura gaussiană adoptată.

Astfel relațiile aproximative pentru calculul relațiilor (5.46-5.47) se scriu în acest caz:

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^n w_j \cdot \frac{1}{f_x(0,5 \cdot z_j + 0,5)} \\
c_{1y(z)} &= \frac{3}{2} \cdot \sum_{j=1}^n w_j \cdot \frac{(0,5 - 0,5 \cdot z_j)^2}{f_{y(z)}(0,5 \cdot z_j + 0,5)} \\
c_{2y(z)} &= \frac{3}{2} \cdot \sum_{j=1}^n w_j \cdot \frac{(0,5 + 0,5 \cdot z_j)^2}{f_{y(z)}(0,5 \cdot z_j + 0,5)} \\
c_{3y(z)} &= 3 \cdot \sum_{j=1}^n w_j \cdot \frac{(0,5 \cdot z_j + 0,5) \cdot (0,5 - 0,5 \cdot z_j)}{f_{y(z)}(0,5 \cdot z_j + 0,5)}
\end{aligned} \tag{5.69}$$

În tabelul 5.1 se prezintă comparativ abscisele punctelor de integrare și coeficienții de pondere corespunzători cuadraturii gaussiene în varianta Legendre și Lobatto, pentru un număr de 3,4 și 5 puncte de integrare.

La alegerea metodei de integrare, mai trebuie avut în vedere faptul că numărul de puncte de integrare se resfringe în mod direct asupra acurateții rezultatelor, și alegerea unui număr mare de puncte duce la mărirea considerabilă a timpului de analiză, mai ales în cazul unei analize la nivel de fibră. Mai mult, în cazul în care se dorește luarea în considerare a efectelor descărcărilor elastice trebuie memorate informații adiționale cu privire la istoria eforturilor (tensiunilor) în dreptul acestor secțiuni, în timpul etapelor de calcul, și generarea unui număr mare de puncte de integrare conduce la mărirea considerabilă a datelor ce trebuie memorate.

Tabelul 5.1. Abscisele și coeficienții de pondere de la integrarea gaussiană.

Nr. puncte	Abscisele z		Coeficienții de pondere w	
	Gauss-Lobatto	Gauss-Legendre	Gauss-Lobatto	Gauss-Legendre
3	$\pm 1,0000000000$	$\pm 0,7745966692$	0,3333333333	0,5555555556
	0,0000000000	0,0000000000	1,3333333333	0,8888888889
4	$\pm 1,0000000000$	$\pm 0,8611363116$	0,1666666667	0,3478548451
	$\pm 0,4472135954$	$\pm 0,3399810436$	0,8333333334	0,6521451549
5	$\pm 1,0000000000$	$\pm 0,9061798459$	0,1000000000	0,2369268851
	$\pm 0,6546536707$	$\pm 0,5384693101$	0,5444444445	0,4786286705
	0,0000000000	0,0000000000	0,7111111112	0,5688888889

Este știut faptul că cuadratura gaussiană ne dă, la aceiași număr de puncte, o precizie mai bună decât metoda Simpson-simplă, presupunând că nu putem localiza aceste puncte, și ca urmare a faptului că varianta Gauss-Lobatto față de Gauss-Legendre consideră noduri și la capetele barei, această variantă este de preferat. În programul de calcul realizat sunt implementate patru metode de integrare numerică, utilizatorul având posibilitatea de a alege între exactitatea metodei Simpson-repetat și economia de timp de la cuadratura gaussiană și anume: Simpson-simplu, Simpson-repetat, Gauss-Legendre, Gauss-Lobatto.

În programul de calcul realizat, calculul "exact" al integralelor se poate face utilizând formula lui Simpson aplicată repetat pe un număr tot mai mare de

subintervale (Simpson-repetat) până la atingerea preciziei dorite, dar cu efect negativ asupra timpului de calcul și asupra imposibilității luării în considerare a descărcărilor elastice, întrucit numărul de puncte de integrare din această metodă este variabil în timp, modificându-se de la o etapă la alta, în timpul procesului de calcul global al structurii, ca urmare a modificării caracteristicilor secționale elasto-plastice ale barei, deci a integrandului.

Abscisele și coeficienții de pondere din metodele numerice de integrare menționate mai sus sunt generate automat în programul de calcul în funcție de numărul de noduri cerut de utilizator. În cazul metodei Simpson -repetat numărul de puncte de integrare este generat în mod crescător până la atingerea preciziei dorite. Se calculează valorile aproximative ale integralei I_i pentru $i=2,3,4...$ calculul încheindu-se când:

$$|I_n - I_{n-1}| < tol \quad (5.70)$$

În cazul în care precizia fixată (tol) nu este atinsă, într-un număr fixat de iterații, estimarea valorii integralei eșuează și pe ecran apare mesajul de atenționare calculul putând continua mai departe, cu ultima estimare a integralei.

5.4.2.2. Determinarea forțelor nodale echivalente

Forțele nodale, ce se exprimă în funcție de încărcările exterioare, sunt mărimi static nedeterminate (momente încovoietoare și forțe de încastrare perfectă la capetele barei), care depind de modulul de rigiditate al barei. În cazul comportării elasto-plastice a barei, acesta este variabil, depinzând de nivelul de solicitare al barei și prin urmare forțele nodale se vor exprima ținându-se seama de variația caracteristicilor de rigiditate ale secțiunilor din lungul barei. În metoda propusă încărcările aplicate în cursul barelor provin din două surse: prima, corespunzătoare forțelor exterioare aplicate direct asupra barelor (forțe distribuite, forțe concentrate în lungul barelor etc.) și a doua, corespunzătoare momentelor încovoietoare de corectare a echilibrului static dintre eforturile exterioare și interioare pe secțiune (respectarea condiției de plastificare).

5.4.2.2.1 Forțe exetrioare aplicate în lungul barelor

În cele ce urmează se prezintă succint determinarea momentelor și forțelor de încastrare perfectă pentru bara dublu încastrată cu o forță uniform distribuită (Fig.5.11). Notând cu F_{ij} matricea de flexibilitate a barei considerate încastrată la capătul i și liberă la capătul j și notând cu M_j vectorul momentelor și forțelor de încastrare perfectă din capătul j al barei (fig. 5.11):

$$M_j = \begin{bmatrix} P_{xj} \\ P_{yj} \\ M_{zj} \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

vectorul deplasărilor produse în capătul j al barei de valorile unitate ale momentelor

și forțelor de încastrare perfectă sunt:

$$\mathbf{D}_j = \mathbf{F}_{jj}^{-1} \mathbf{M}_j \quad (5.72)$$

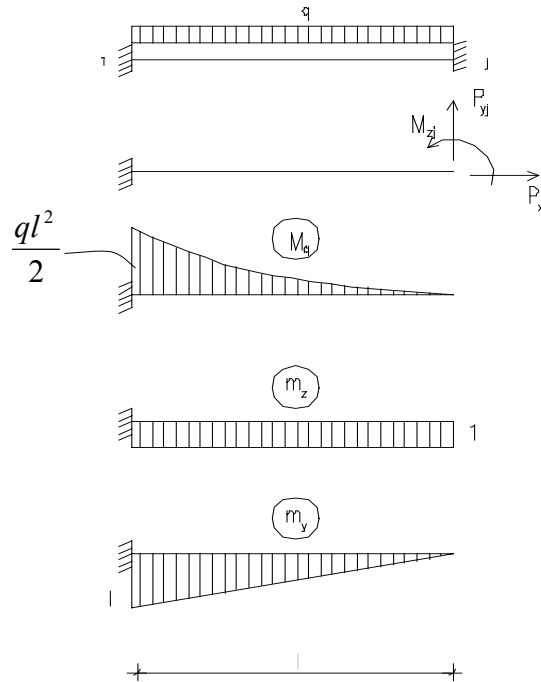


Fig. 5.11. Calcularea forțelor nodale în cazul unei forțe uniform distribuite.

Deplasările produse de încărcarea uniform distribuită q la capatul j al consolei static determinată (Fig.5.11) determinate cu formula lui Maxwell-Mohr sunt:

$$\mathbf{D}_{qj} = \begin{bmatrix} D_{qjx} = 0 \\ D_{qjy} = -\left(qL^4 / 8EI_0\right)c_4 \\ D_{qjz} = -\left(qL^3 / 2EI_0\right)c_1 \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

în care c_1 are expresia dată în relațiile (5.47), iar cu c_4 s-a notat:

$$c_4 = 4 \int_0^1 \frac{(1-\xi)^3}{f_z(\xi)} d\xi \quad (5.74)$$

Condiția de compatibilitate pentru bara dublu încastrată se exprimă atunci sub forma:

$$\mathbf{D}_j + \mathbf{D}_{qj} = 0 \quad (5.75)$$

de unde, cu relația (5.72) se obține:

$$\mathbf{M}_j = -\mathbf{F}_{jj}^{-1} \mathbf{D}_{qj} \quad (5.76)$$

și se determină momentul și forța de încastrare perfectă ținându-se seama de comportarea elasto-plastică a barei, sub forma:

$$P_{xj}=0 \quad (5.77)$$

$$P_{yj} = \frac{qL}{2} \left[\frac{3c_4(c_1 + c_2 + c_3)}{Z} - \frac{2c_1(2c_1 + c_3)}{Z} \right] \quad (5.77')$$

$$M_{zj} = -\frac{qL^2}{12} \left[\frac{9(2c_1 + c_3)c_4}{Z} - \frac{24c_1^2}{Z} \right] \quad (5.77'')$$

În același mod se determină mărimile similare la capătul i al barei, astfel încât vectorul forțelor nodale pentru o bară, în coordonate locale se scrie:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}_i \\ -\mathbf{M}_j \end{bmatrix} \quad (5.78)$$

În mod similar se poate determina vectorul forțelor nodale, în cazul considerării altor forțe în lungul barei.

5.4.2.2.2. Momente încovoietoare de corectare aplicate asupra barelor. Respectarea condiției de interacțiune plastică

În cazul structurilor etajate cu mai multe niveluri, forțele axiale din stâlpi devin importante, în special la nivelurile inferioare, astfel ca efectul acestora nu mai poate fi neglijat în condiția de plasticizare. Prin aceasta, mărimea momentului plastic al secțiunii devine variabilă și scade odată cu creșterea forței axiale, introducând un nou parametru în calculul prin etape succesive. În cazul încovoierii uniaxiale, corelația dintre eforturile axiale și de încovoiere ce produc plasticizarea integrală a secțiunii poate fi reprezentată printr-o curbă de plasticizare, ca în fig. 5.12. Pentru o anumită valoare N se obține un punct Q pe curbă, care definește valoarea momentului plastic corectat M_{pc} .

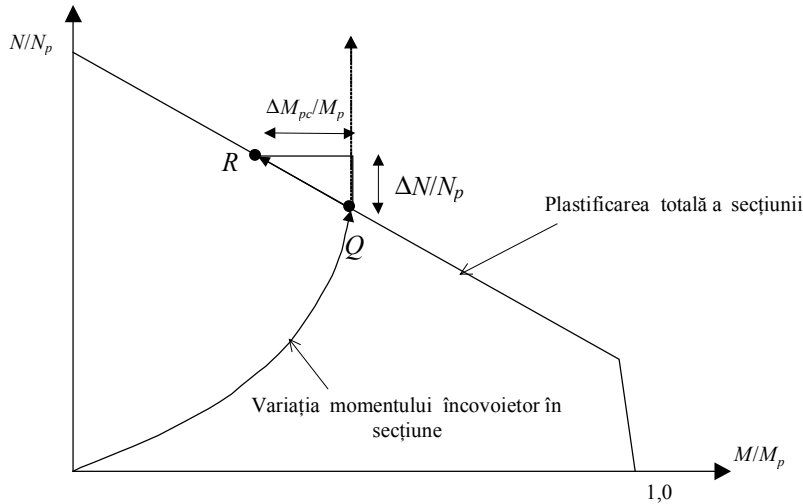


Fig. 5.12. Calculul momentelor încovoietoare de corectare.

Când vârful vectorului $m_p \left(\frac{N}{N_p}, \frac{M}{M_p} \right)$ ajunge pe suprafața de plastificare,

înseamnă că plastificarea secțiunii este totală și deci secțiunea își pierde capacitatea portantă de a prelua eforturi suplimentare (în cazul în care nu se consideră efectul re consolidării materialului). Când încărcarea crește, anumite eforturi dintr-o asemenea secțiune, cum este forța axială, cresc, astfel că respectarea condiției de plastificare impune ca celelalte eforturi, cum sunt momentele încovoietoare, să se modifice, unele dintre ele micșorându-se. Înseamnă că vârful vectorului m_p se deplasează pe suprafața de plastificare, oglindind o redistribuție continuă între eforturile din secțiunea respectivă. În continuare vor fi prezentate două metode de soluționare a problemei mai sus menționate.

(a) Aplicarea momentelor încovoietoare corectoare

O posibilitate de soluționare constă în a efectua o operație de corectare prin care să se revină pe curba de plastificare (trecerea de la punctul Q la punctul R), restabilind corelația corectă între eforturi (Fig. 5.12). Această operație constă în considerarea unor încărcări adiționale aplicate asupra barelor, provenite din corecția momentelor plastice, ΔM_{pc} (Fig. 5.13), unde cu ΔM_{pc} s-a notat momentul încovoietor incremental de corecție obținut pe baza curbei de plasticizare, corespunzător efortului axial total N din bară. Este necesar în continuare ca încărcarea dată de momentele ΔM_{pc} să fie înlocuită prin componentele aplicate în noduri, urmărind procedeul general examinat la punctul anterior.

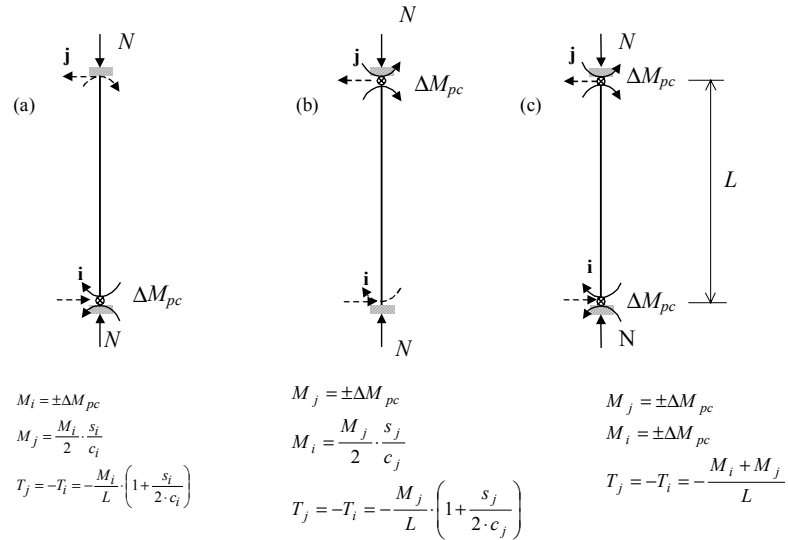


Fig. 5.13. Calculul forțelor de încastrare perfectă în cazul încărcării barei cu momente încovoietoare de capăt.

În figura 5.13 se prezintă expresiile forțelor de încastrare perfectă în cazul încărcărilor barelor cu momentele încovoietoare de corectare ΔM_{pc} , ținând cont de comportarea elasto-plastică a barei. Coeficienții de corecție din relațiile de mai sus sunt dați de următoarele expresii, pentru evaluarea cărora se utilizează aceleași metode de integrare numerică discutate anterior:

$$s_i = \int_0^1 \frac{\xi}{f_z(\xi)} \cdot d\xi \quad s_j = \int_0^1 \frac{1-\xi}{f_z(1-\xi)} \cdot d\xi \quad (5.79)$$

$$c_i = c_2 \quad c_j = 3 \int_0^1 \frac{(1-\xi)^2}{f_z(1-\xi)} d\xi \quad (5.80)$$

În cazul încovoierii bi-axiale procedeul poate fi aplicat în mod similar cu aplicarea momentelor plastice de corectare, ținându-se seama de variația momentelor plastice din lungul barei ca urmare a variației momentelor încovoietoare în lungul barei (Fig. 5.14).

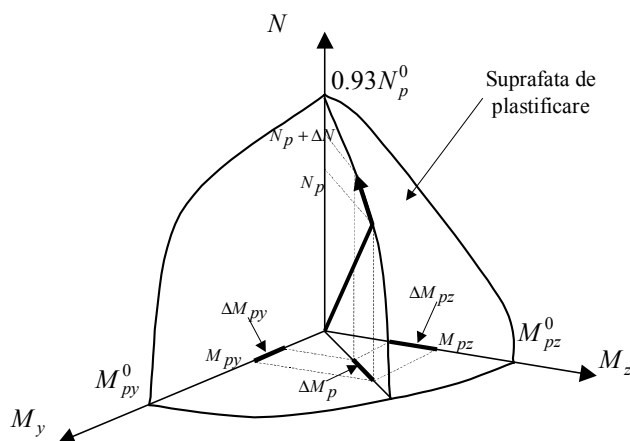


Fig. 5.14. Determinarea momentelor plastice corectoare în cazul încovoierii oblice.

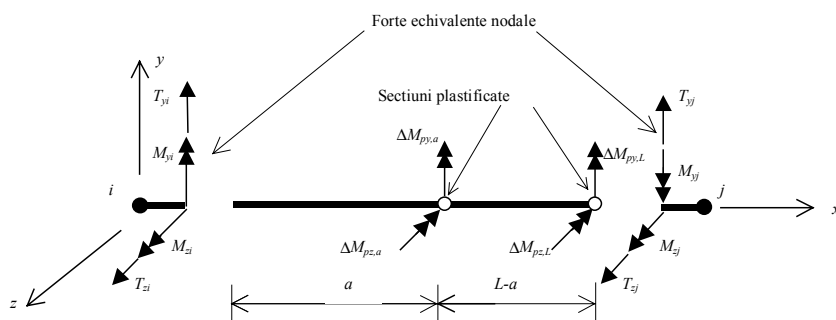


Fig. 5.15. Forțe echivalente plastice nodale.

Spre exemplificare, considerând bara din figura 5.15 și presupunând ca în secțiunea "a" și în secțiunea de la capatul "j" al barei s-a atins capacitatea plastică, eforturile echivalente corectoare cu care se va încărca bara, în următorul ciclu de calcul, sunt date de următoarele expresii:

$$\begin{bmatrix} N \\ T_{zj} \\ T_{yj} \\ M_t \\ M_{yj} \\ M_{zj} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{jj} \cdot \mathbf{d}_j = \mathbf{K}_{jj} \cdot \begin{bmatrix} d_{jx} = 0 \\ d_{jz} = \frac{(\Delta M_{py,a} + \Delta M_{py,j}) \cdot L}{EI_{0,y}} \cdot c_{6y} + \frac{\Delta M_{py,j} \cdot L}{EI_{0,y}} \cdot c_{7y} \\ d_{jy} = \frac{(\Delta M_{pz,a} + \Delta M_{pz,j}) \cdot L}{EI_{0,z}} \cdot c_{6z} + \frac{\Delta M_{pz,j} \cdot L}{EI_{0,z}} \cdot c_{7z} \\ \theta_{jy} = \frac{(\Delta M_{py,a} + \Delta M_{py,j}) \cdot L^2}{EI_{0,y}} \cdot c_{8y} + \frac{\Delta M_{py,j} \cdot L^2}{EI_{0,y}} \cdot c_{9y} \\ \theta_{jz} = \frac{(\Delta M_{pz,a} + \Delta M_{pz,j}) \cdot L^2}{EI_{0,z}} \cdot c_{8z} + \frac{\Delta M_{pz,j} \cdot L^2}{EI_{0,z}} \cdot c_{9z} \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

unde submatricea $\mathbf{K}_{jj}$ este dată de relația (5.52) iar $\mathbf{d}_j$ reprezintă vectorul deplasărilor de la capatul "j" al barei-fixată la capatul "i" și liberă la capatul "j"-încărcată cu momentele încovoietoare plastice de corecție obținute pe baza suprafeței de plastificare corespunzător efortului axial N și raportului momentelor încovoietoare M_y/M_z . Coeficienții de corecție utilizați în relațiile de mai sus sunt:

$$\begin{aligned} c_{6y(z)} &= \int_0^{a/L} \frac{1-\xi}{f_{y(z)}(\xi)} d\xi; & c_{7y(z)} &= \int_{a/L}^L \frac{1-\xi}{f_{y(z)}(\xi)} d\xi; \\ c_{8y(z)} &= \int_0^{a/L} \frac{1}{f_{y(z)}(\xi)} d\xi; & c_{9y(z)} &= \int_{a/L}^L \frac{1}{f_{y(z)}(\xi)} d\xi; \end{aligned} \quad (5.82)$$

(b) Modificarea directă a matricei de rigiditate

O altă posibilitate constă în corectarea directă a matricei de rigiditate prin impunerea condiției de plastificare în relațiile constitutive dezvoltate la nivel de element. Considerând elementul de bară plan (Fig. 5.16) cu secțiunea complet plastificată la capatul "i" relația între creșterea deplasărilor și a eforturilor, în sistemul coordonatelor de bază ale elementului, poate fi scrisă astfel:

$$\mathbf{F}_{(3 \times 3)} \cdot \mathbf{f}_{(3 \times 1)} = \mathbf{u}_{(3 \times 1)} \quad (5.83)$$

unde $\mathbf{F}$ reprezintă matricea de flexibilitate în coordonatele de bază ale barei, $\mathbf{f}$ reprezintă vectorul forțelor nodale de la capetele elementelor corespunzătoare gradelor de libertate asumate, iar $\mathbf{u}$ reprezintă vectorul deplasărilor corespunzătoare gradelor de libertate:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 & 0 \\ 0 & f_{22} & f_{23} \\ 0 & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}; \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{bmatrix}; \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta \theta_i \\ \Delta \theta_j \end{bmatrix} \quad (5.84)$$

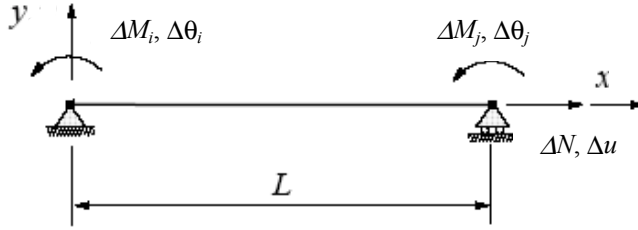


Fig. 5.16. Element de bară plan în sistemul coordonatelor de bază.

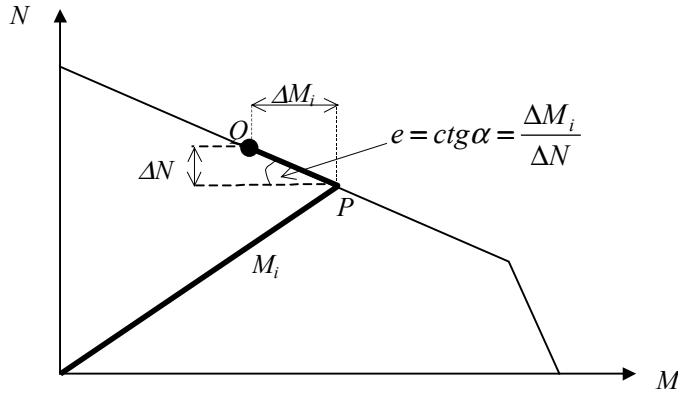


Fig. 5.17. Criteriul de plastificare.

În cazul plastificării secțiunii de capăt "i" a barei variația momentului încovoietor din secțiunea "i" va fi determinată numai de valoarea efortului axial din bară și de curba de plastificare asumată în calcul (Fig. 5.17). Astfel că, vectorul forțelor nodale de capăt poate fi scris astfel:

$$\begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_j \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

sau scris în formă matriceală condensată:

$$\mathbf{f}_{(3 \times 1)} = \mathbf{T}_{(3 \times 2)} \cdot \hat{\mathbf{f}}_{(2 \times 1)} \quad (5.86)$$

unde valoarea e introduce corelația necesară între componente pentru satisfacerea

condiției de plastificare (Fig. 5.17). Astfel că relația (5.83) se rescrie:

$$\mathbf{F}_{(3x3)} \cdot \mathbf{T}_{(3x2)} \cdot \hat{\mathbf{f}}_{(2x1)} = \mathbf{u}_{(3x1)} \quad (5.87)$$

În continuare ambii membri ai relației de mai sus cu $\mathbf{T}^T$ se obține:

$$\left(\mathbf{T}^T_{(2x3)} \cdot \mathbf{F}_{(3x3)} \cdot \mathbf{T}_{(3x2)} \right) \cdot \hat{\mathbf{f}}_{(2x1)} = \mathbf{T}^T_{(2x3)} \cdot \mathbf{u}_{(3x1)} \quad (5.88)$$

astfel că vectorul forțelor nodale independente $\hat{\mathbf{f}}$ se determină astfel:

$$\hat{\mathbf{f}}_{(2x1)} = \left(\mathbf{T}^T_{(2x3)} \cdot \mathbf{F}_{(3x3)} \cdot \mathbf{T}_{(3x2)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{T}^T_{(2x3)} \cdot \mathbf{u}_{(3x1)} \quad (5.89)$$

și ținând cont de relația (5.86) se obține următoarea relație între variația eforturilor nodale de la capetele barei și cea a deplasărilor corespunzătoare gradelor de libertate reținute:

$$\mathbf{f}_{(3x1)} = \mathbf{T}_{(3x2)} \cdot \left(\mathbf{T}^T_{(2x3)} \cdot \mathbf{F}_{(3x3)} \cdot \mathbf{T}_{(3x2)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{T}^T_{(2x3)} \cdot \mathbf{u}_{(3x1)} \quad (5.90)$$

sau scris în formă condensată:

$$\mathbf{f}_{(3x1)} = \mathbf{K}_{ep(3x3)} \mathbf{u}_{(3x1)} \quad (5.91)$$

unde:

$$\mathbf{K}_{ep(3x3)} = \mathbf{T}_{(3x2)} \cdot \left(\mathbf{T}^T_{(2x3)} \cdot \mathbf{F}_{(3x3)} \cdot \mathbf{T}_{(3x2)} \right)^{-1} \cdot \mathbf{T}^T_{(2x3)} \quad (5.92)$$

și care reprezintă matricea de rigiditate elasto-plastică a elementului de bară care include efectul plastificării complete a secțiunii de capăt. Cu următoarea notație pentru matricea de rigiditate a elementului de bară în coordonatele de bază:

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}^{-1} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & k_{23} \\ 0 & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (5.93)$$

matricea de rigiditate elasto-plastică corespunzătoare plastificării integrale a capătului "i" al barei se exprimă astfel:

$$\mathbf{K}_{ep} = \begin{bmatrix} \frac{k_{11}k_{22}}{k_{22} + e^2k_{11}} & \frac{ek_{11}k_{22}}{k_{22} + e^2k_{11}} & \frac{ek_{11}k_{23}}{k_{22} + e^2k_{11}} \\ \frac{ek_{11}k_{22}}{k_{22} + e^2k_{11}} & \frac{e^2k_{11}k_{22}}{k_{22} + e^2k_{11}} & \frac{e^2k_{11}k_{23}}{k_{22} + e^2k_{11}} \\ \frac{ek_{11}k_{23}}{k_{22} + e^2k_{11}} & \frac{e^2k_{11}k_{23}}{k_{22} + e^2k_{11}} & \frac{k_{22}k_{33} - k_{23}^2 + e^2k_{33}k_{11}}{k_{22} + e^2k_{11}} \end{bmatrix} \quad (5.94)$$

Coefficienții de rigiditate k_{ij} din relația (5.94) includ efectul plastificării graduale a secțiunilor din lungul barei precum și efectul local al neliniarității geometrice conform procedeelor descrise pe parcursul acestui capitol. Matricea de rigiditate în coordonate de element se determină în continuare prin transformări liniare. În cazul plastificării capătului "j" sau a plastificării ambelor capete ale barei matricea de "corelație" $\mathbf{T}$ se modifică în consecință:

- plastificarea capătului "j": $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ e & 0 \end{bmatrix}$ (5.95)

- plastificarea ambelor capete: $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 \\ e \\ e \end{bmatrix}$ (5.96)

Extinderea acestui procedeu la cazul structurilor spațiale este imediată.

5.5. EFECTUL LOCAL AL NELINIARITĂȚII GEOMETRICE

Ecuția diferențială de echilibru, pentru elementul de bară din figura 5.18, supus acțiunii efortului axial de compresiune N și momentelor încovoietoare incrementale de capăt, $\dot{M}_i$, $\dot{M}_j$, ținând cont de efectele de ordinul al II-lea locale, rezultă de următoarea formă:

$$EI_t(\xi) \cdot \left[\ddot{y} \right] + N \cdot \dot{y} = \left(\dot{M}_i + \dot{M}_j \right) \cdot \xi - \dot{M}_i \quad (5.97)$$

unde s-a notat cu:

- $EI_t(\xi)$ modulul de rigiditate la încovoiere tangent în secțiunea $\xi = x/L$.
- $\dot{y}$ deplasarea incrementală în secțiunea ξ a barei.

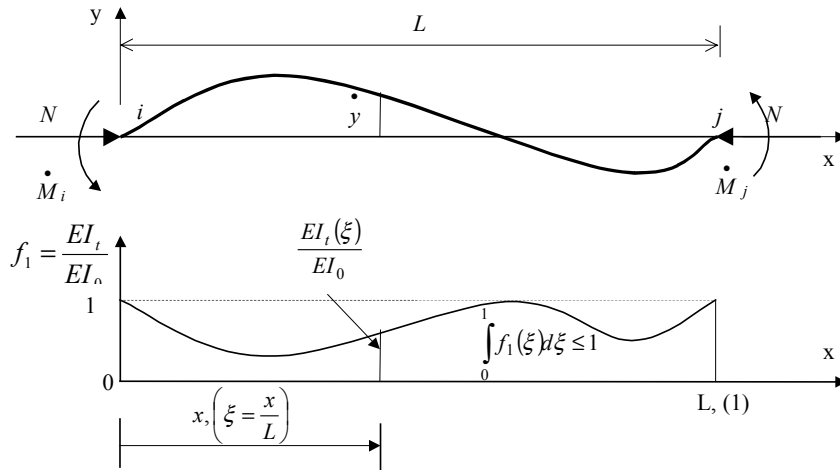


Fig. 5.18. Elementul de bară solicitat de forțe axiale puternice în domeniul elasto-plastic.

În domeniul elastic de comportare a barei, caracterizat prin modulul de rigiditate la încovoiere $EI_t = EI_0$ constant în lungul ei, soluția exactă a acestei ecuații diferențiale omogene de ordinul al II-lea cu coeficienți constanți poate fi ușor de obținut.

Ca urmare a dezvoltărilor zonelor plastice în secțiunile din lungul barei, efect a creșterii nivelului solicitărilor exterioare, ecuația diferențială (5.97) devine una cu coeficienți variabili (modulul de rigiditate la încovoiere EI_t variază în lungul barei) și o soluție exactă a acestei ecuații este greu de obținut, în unele situații chiar imposibil. Se impune astfel adoptarea unor metode aproximative de considerare a efectelor de ordinul al II-lea locale, asupra termenilor matricei de rigiditate a barei. La structurile spațiale cu noduri rigide, efectul local al neliniarității geometrice, datorat forțelor axiale puternice din barele structurii, poate fi luat în considerare în mod similar ca și pentru structurile plane, prin intermediul funcțiilor de stabilitate, cu deosebirea principală ca în acest caz trebuie ținut seama de deformarea barei în două plane diferite, și anume în planul xy când intervine modulul de rigiditate la încovoiere EI_z , respectiv în planul xz când intervine modulul de rigiditate EI_y . Înseamnă că la o bară puternic comprimată, dintr-o structură spațială, trebuie stabilite două valori ale factorului de compresiune, și anume:

$$\begin{aligned} v_y' &= L \sqrt{\frac{N}{EI_{ty}}}, \quad EI_{ty} = EI_{0y} \cdot \int_0^1 \frac{EI_y(\xi)}{EI_{0z}} d\xi = EI_{0y} \cdot \int_0^1 f_y(\xi) d\xi \leq EI_{0y} \\ v_z' &= L \sqrt{\frac{N}{EI_{tz}}}, \quad EI_{tz} = EI_{0z} \cdot \int_0^1 \frac{EI_z(\xi)}{EI_{0z}} d\xi = EI_{0z} \cdot \int_0^1 f_z(\xi) d\xi \leq EI_{0z} \end{aligned} \quad (5.98)$$

corespunzător planului în care intervine deformarea. Fiecărui dintre aceștia îi corespunde câte o serie de coeficienți de corecție, care trebuie introduși în matricea de rigiditate la elementele respective. În acest fel coeficienții de rigiditate k_{ij} sunt corecți ținându-se seama și de efectul forțelor axiale din bare, prin intermediul unor factori de corecție notați cu g_{ij} :

$$\begin{aligned} k'_{22} &= (12EI_0/L^3) f_{22} g_{22} \\ k'_{23} &= (6EI_0/L^2) f_{23} g_{23}, \text{ etc.} \end{aligned} \quad (5.99)$$

Pentru exemplificarea modului cum intervin acești factori de corecție corespunzători celor doi factori de compresiune v_y' , v_z' se prezintă în continuare submatricea de rigiditate $\mathbf{k}_{jj}$ a barei:

$$\mathbf{K}_{jj} = \begin{bmatrix} \frac{EA_0}{L} f_{77} g_{77} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{z0}}{L^3} f_{88} \cdot g_{88} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{z0}}{L^2} f_{812} \cdot g_{812} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_{y0}}{L^3} f_{99} \cdot g_{99} & 0 & \frac{6EI_{y0}}{L^2} f_{911} \cdot g_{911} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_{y0}}{L^2} f_{119} \cdot g_{119} & 0 & \frac{4EI_{y0}}{L} f_{1111} \cdot g_{1111} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_{z0}}{L^2} f_{128} \cdot g_{128} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{z0}}{L} f_{1212} \cdot g_{1212} \end{bmatrix}$$

în care factorii de corecție g_{ij} sunt dați de următoarele expresii:

$$\begin{aligned} g_{77} &= s_1 \\ g_{88} &= \left(\frac{2}{3}s_2 + \frac{1}{3}s_3 \right), \quad g_{99} = \left(\frac{2}{3}s_4 + \frac{1}{3}s_5 \right) \\ g_{1111} &= s_4, \quad g_{1212} = s_2 \\ g_{119} &= g_{911} = \left(\frac{2}{3}s_4 + \frac{1}{3}s_5 \right), \quad g_{128} = g_{812} = \left(\frac{2}{3}s_2 + \frac{1}{3}s_3 \right) \end{aligned} \quad (5.100)$$

unde cu s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 s-au notat funcțiile de stabilitate determinate în cadrul capitolului 2 și care introduc în calcul efectul neliniarității geometrice locale asupra rigidității elementului de bară. Pentru o forță axială de compresiune aceste funcții sunt date de următoarele expresii:

$$s_1 = \frac{1}{1 + \frac{EA}{4P^3L^2}(H_y + H_z)} \quad (5.101)$$

$$s_2 = \frac{v'_z}{4} \frac{(\sin v'_z - v'_z \cos v'_z)}{(2 - 2 \cos v'_z - v'_z \sin v'_z)} \quad (5.102)$$

$$s_3 = \frac{v'_z}{2} \frac{(v'_z - \sin v'_z)}{(2 - 2 \cos v'_z - v'_z \sin v'_z)}$$

$$s_4 = \frac{v'_y}{4} \frac{(\sin v'_y - v'_y \cos v'_y)}{(2 - 2 \cos v'_y - v'_y \sin v'_y)} \quad (5.103)$$

$$s_5 = \frac{v'_y}{2} \frac{(v'_y - \sin v'_y)}{(2 - 2 \cos v'_y - v'_y \sin v'_y)}$$

În același mod în care s-au determinat forțele nodale echivalente în cazul neliniarității fizice, se poate ține seama și de efectele de ordinul al II-lea, corectând astfel vectorii de încastrare perfectă corespunzători unui comportări liniar elastice. Astfel, spre exemplu, pentru bara dublu încastrată încărcată cu o forță uniform distribuită q , în planul (xy) momentul de încastrare perfectă la capetele barei are expresia:

$$M_{zj} = \frac{qL^2}{12} \cdot \frac{6}{4s_2 + 2s_3} \quad (5.104)$$

Astfel forțele nodale echivalente, la capătul j al barei, ținând seama de comportarea elasto-plastică a barei, și de efectele locale de ordinul al II-lea, în cazul unei forțe uniform distribuite în lungul barei, au următoarele expresii:

$$P_{yj} = \frac{qL}{2} \left[\frac{3c_4(c_1 + c_2 + c_3)}{Z} - \frac{2c_1(2c_1 + c_3)}{Z} \right] \quad (5.105)$$

$$M_{zj} = -\frac{qL^2}{12} \left[\frac{9(2c_1 + c_3)c_4}{Z} - \frac{24c_1^2}{Z} \right] \cdot \frac{6}{4s_2 + 2s_3} \quad (5.106)$$

În cazul barei încărcate cu momente la capete (momente provenite din condiția de respectare a condiției de plasticitate), forțele nodale echivalente pot fi de asemenea determinate ținând seama de comportarea elasto-plastică a barei și de efectele de ordinul al II-lea locale. Astfel referindu-ne la figura 5.11, forțele de încastrare perfectă de la capetele i și j ale barei sunt determinate în acest caz de următoarele relații:

$$\begin{aligned} M_i &= \pm \Delta M_{pc} \\ M_j &= \frac{M_i}{2} \cdot \frac{s_i}{c_i} \cdot \frac{s_3}{s_2} \\ T_j &= -T_i = -\frac{M_i}{L} \cdot \left(1 + \frac{s_i}{2 \cdot c_i} \right) \cdot \frac{4 \cdot (s_2 + s_3)}{6 \cdot s_2} \end{aligned} \quad (5.107)$$

Pentru alte încărcări se obțin expresii similare.

Influența neliniarității geometrice locale, se poate considera și în calculul eforturilor în alte secțiuni $\xi = x/L$ ale barei. Folosind matricea de transfer definită în (Bârsan, G.M., 1979) se poate exprima variația eforturilor în lungul barei astfel:

$$S(\xi) = T(\xi) \cdot N \quad (5.108)$$

$$S(\xi) = \{N \quad M_z(\xi) \quad T_y(\xi)\}^T \quad (5.109)$$

$$N = \{N \quad M_{iz} \quad M_{jz} \quad T_{iy} \quad T_{jy}\}^T$$

unde $S(\xi)$ reprezintă vectorul eforturilor secționale în secțiunea ξ în planul (xy), N reprezintă vectorul forțelor nodale iar $T(\xi)$ reprezintă matricea de transfer de ordinul al II-lea. Pentru cazul comun al încărcării cu o forță uniform distribuită pe întreaga lungime a barei expresia matricei de transfer este următoarea:

$$T(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & n & p & -p \\ 0 & \frac{dm}{d\xi} & \frac{dn}{d\xi} & \frac{dp}{d\xi} & -\frac{dp}{d\xi} \end{bmatrix} \quad (5.110)$$

unde:

$$\begin{aligned} m &= \cos(v'_z \xi) - \cos v'_z \cdot \frac{\sin(v'_z \xi)}{\sin v'_z} \\ n &= \frac{\sin(v'_z \xi)}{\sin v'_z} \\ p &= \frac{L(\cos v'_z - 1)}{v'^2_z} \cdot \frac{\sin(v'_z \xi)}{\sin v'_z} - \frac{L(1 - \cos(v'_z \xi))}{v'^2_z} \end{aligned} \quad (5.111)$$

Alte situații de încărcare se consideră în mod similar.

5.6. INTEGRAREA EFECTELOR NELINIARE ALE CONEXIUNILOR FLEXIBILE (SEMRIGIDE) ÎN CALCULUL ELASTO-PLASTIC DE ORDINUL AL II-LEA

Ca un caz mai general, cu privire la tipurile de legături de la capetele unui element de bară de tip cadru spațial, se consideră cazul legăturilor flexibile pe direcțiile momentelor încovoietoare din planurile de rigiditate xy și xz . Pe direcțiile celorlalte eforturi, legăturile se consideră perfect rigide. Barele se consideră prinse în noduri, presupuse punctuale, prin conexiuni flexibile având rigiditățile de rotire R_i , R_j care pot varia între zero (capăt articulat) și infinit (capăt perfect încastrat), adică $0 < R_i, R_j < \infty$. Vor fi prezentate două modalități de includere a efectului conexiunilor flexibile în calculul elasto-plastic de ordinul al II-lea.

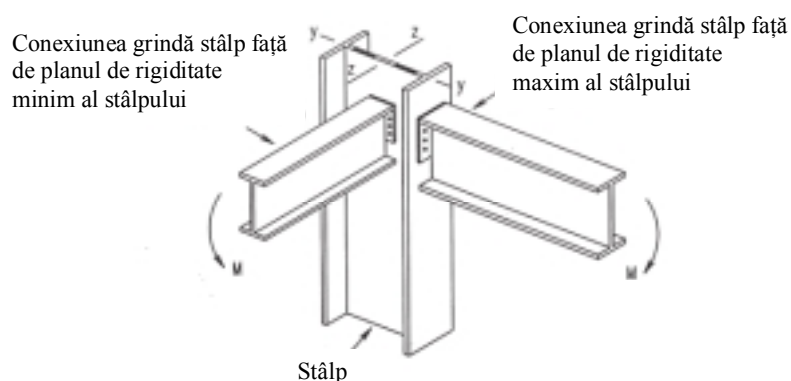


Fig. 5.19. Conexiunile flexibile grindă-stâlp.

a) Metoda 1

În figura 5.20.a se prezintă modelul fizic al prinderii unei bare în noduri (Bârsan&Chiorean, 1999). Cu θ_n s-a notat rotirea nodului, cu θ_b rotirea capătului de bară iar $\theta_r = \theta_n - \theta_b$ este rotirea relativă dintre bară și nod. În figura 5.20.b se reprezintă aceeași bară tronsonată introducându-se momentele încovoietoare corespunzătoare secțiunilor făcute.

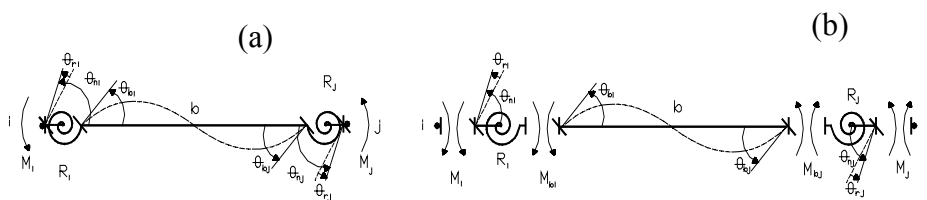


Fig.5.20. Elementul de bară cu noduri semirigide.

Între rotiri și momentele încovoietoare există relațiile:

(a) încovoiere în planul de rigiditate xy :

$$\begin{aligned} M_{iz} &= R_{iz} \theta_{riz} = R_{iz} \theta_{niz} - R_{iz} \theta_{biz} \\ M_{biz} &= -R_{iz} \theta_{niz} + (k'_{6,6} + R_{iz}) \theta_{biz} + k'_{6,12} \theta_{bjz} \\ M_{bjz} &= k'_{6,12} \theta_{bjz} + (k'_{12,12} + R_{jz}) \theta_{bjz} - R_{jz} \theta_{njz} \\ M_{jz} &= -R_{jz} \theta_{bjz} + R_{jz} \theta_{njz} \end{aligned} \quad (5.112)$$

(a) încovoiere în planul de rigiditate xz :

$$\begin{aligned} M_{iy} &= R_{iy} \theta_{riy} = R_{iy} \theta_{niy} - R_{iy} \theta_{biy} \\ M_{biy} &= -R_{iy} \theta_{niy} + (k'_{5,5} + R_{iy}) \theta_{biy} + k'_{5,11} \theta_{bjy} \\ M_{bjy} &= k'_{5,11} \theta_{bjy} + (k'_{11,11} + R_{jy}) \theta_{bjy} - R_{jy} \theta_{njy} \\ M_{jy} &= -R_{jy} \theta_{bjy} + R_{jy} \theta_{njy} \end{aligned} \quad (5.113)$$

și unde coeficienții de rigiditate $k'_{i,j}$ notați cu indicele superior ' sunt coeficienții de rigiditate determinați în paragrafele anterioare, ținându-se seama de efectul plastificării secțiunilor din lungul barei și de efectul local (P - δ) al neliniarității geometrice, pentru bara considerată fără conexiuni. Așa spre exemplu:

$$\begin{aligned} k'_{5,5} &= \left(\frac{4EI_y}{L} \right) f_{55} g_{55}; \quad k'_{5,11} = \left(\frac{2EI_y}{L} \right) f_{511} g_{511}; \quad k'_{11,11} = \left(\frac{4EI_y}{L} \right) f_{1111} g_{1111}; \\ k'_{6,6} &= \left(\frac{4EI_z}{L} \right) f_{66} g_{66}; \quad k'_{6,12} = \left(\frac{2EI_z}{L} \right) f_{612} g_{612}; \quad k'_{12,12} = \left(\frac{4EI_z}{L} \right) f_{1212} g_{1212}; \end{aligned} \quad (5.114)$$

Dacă forțele exterioare se aplică numai în noduri atunci $M_{biy(z)} = M_{bjy(z)} = 0$ și eliminând rotațiile $\theta_{biy(z)}$ și $\theta_{bjy(z)}$ în relațiile (5.112-5.113) se obține:

$$\begin{bmatrix} M_{iy} \\ M_{jy} \\ M_{iz} \\ M_{jz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{iy} - \frac{R_{iy}^2}{\beta_y} (R_{jy} + k'_{11,11}) & \frac{k'_{11,11}}{\beta_y} R_{iy} R_{jy} & 0 & 0 \\ \frac{k'_{11,11}}{\beta_y} R_{iy} R_{jy} & R_{jy} - \frac{R_{jy}^2}{\beta_y} (R_{iy} + k'_{5,5}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{iz} - \frac{R_{iz}^2}{\beta_z} (R_{jz} + k'_{12,12}) & \frac{k'_{12,12}}{\beta_z} R_{iz} R_{jz} \\ 0 & 0 & \frac{k'_{12,12}}{\beta_z} R_{iz} R_{jz} & R_{jz} - \frac{R_{jz}^2}{\beta_z} (R_{iz} + k'_{6,6}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{niy} \\ \theta_{njy} \\ \theta_{niz} \\ \theta_{njz} \end{bmatrix} \quad (5.115)$$

în care s-a notat:

$$\beta_y = \det \begin{bmatrix} k'_{5,5} + R_{iy} & k'_{5,11} \\ k'_{5,11} & k'_{11,11} + R_{jy} \end{bmatrix} \quad (5.116)$$

$$\beta_z = \det \begin{bmatrix} k'_{6,6} + R_{iz} & k'_{6,12} \\ k'_{6,12} & k'_{12,12} + R_{jz} \end{bmatrix} \quad (5.117)$$

Cu relațiile (5.115-5.117) se obține matricea de rigiditate a elementului de bară cu conexiuni semi-rigide în coordonatele de bază. Adăugând liniile și coloanele corespunzătoare efortului axial și al momentului de torsiune în relația (5.115) această matrice este de forma:

$$\begin{bmatrix} P \\ M_{iy} \\ M_{jy} \\ M_{iz} \\ M_{jz} \\ M_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{iyy} & k_{ijy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{ijy} & k_{jyy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{iiz} & k_{ijz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{ijz} & k_{jiz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_t}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \\ \theta_{niy} \\ \theta_{njy} \\ \theta_{niz} \\ \theta_{njz} \\ \theta_t \end{bmatrix} \quad (5.118)$$

unde s-au facut notațiile:

$$\begin{aligned} k_{iyy} &= R_{iy} - \frac{R_{iy}^2}{\beta_y} (R_{jy} + k'_{11,11}) \\ k_{jyy} &= R_{jy} - \frac{R_{jy}^2}{\beta_y} (R_{iy} + k'_{5,5}) \\ k_{ijy} &= \frac{k'_{11,11}}{\beta_y} R_{iy} R_{jy} \\ k_{iiz} &= R_{iz} - \frac{R_{iz}^2}{\beta_z} (R_{jz} + k'_{12,12}) \\ k_{jiz} &= R_{jz} - \frac{R_{jz}^2}{\beta_z} (R_{iz} + k'_{6,6}) \\ k_{ijz} &= \frac{k'_{12,12}}{\beta_z} R_{iz} R_{jz} \end{aligned} \quad (5.119)$$

Rigiditatea inițială a conexiunii se poate exprima în funcție de modulul de rigiditate EI/L al barei și de un factor de "fixare" p astfel încât R se mai poate exprima sub forma:

$$\begin{aligned} R_{i(j)y} &= \frac{4EI_y}{L} \frac{3p_{i(j)y}}{4(1-p_{i(j)y})} \\ R_{i(j)z} &= \frac{4EI_z}{L} \frac{3p_{i(j)z}}{4(1-p_{i(j)z})} \end{aligned} \quad (5.120)$$

Din relația (5.120) rezultă expresia factorului de "fixare" p în funcție de rigiditatea inițială R :

$$p = \frac{1}{1 + 3EI / RL} \quad (5.121)$$

De observat că în timp ce $0 < R < \infty$ coeficientul de "fixare" p ia valori între 0 și 1 ($0 < p < 1$). Matricea de rigiditate, în sistemul local al elementului, se alcătuiește printr-o transformare liniară între coordonatele de bază și cele locale ale elementului utilizând matricea de transformare T dată de relația (5.49):

$${}_l \mathbf{k}_{12 \times 12} = \begin{bmatrix} {}_l \mathbf{k}_1 & {}_l \mathbf{k}_2 \\ {}_l \mathbf{k}_2 & {}_l \mathbf{k}_3 \end{bmatrix} \quad (5.122)$$

unde

$${}_l \mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d & 0 & -e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e & 0 & g & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & h \end{bmatrix}; {}_l \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -d & 0 & -e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & i & 0 \\ 0 & -c & 0 & 0 & 0 & j \end{bmatrix} \quad (5.123)$$

$${}_l \mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 & m & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 & 0 & n \end{bmatrix} \quad (5.124)$$

și în care coeficienții, $a, b, c, \dots$ sunt exprimați astfel:

$$a = s_1 \frac{EA}{L}; b = \frac{k_{iiz} + 2k_{ijz} + k_{jjz}}{L^2}; c = \frac{k_{iiz} + k_{ijz}}{L^2}$$

$$d = \frac{k_{iiy} + 2k_{ijy} + k_{jly}}{L^2}; e = \frac{k_{iiy} + k_{ijy}}{L}; f = \frac{GI_t}{L}; g = k_{iiy} \quad (5.125)$$

$$h = k_{iiz}; i = k_{ijy}; j = k_{ijz}; m = k_{jly}; n = k_{jjz}$$

Determinarea forțelor nodale (forțele și momentele încovoietoare de încastrare de la capetele barei) din încărcările exterioare, ținându-se seama de flexibilitatea conexiunilor de prindere ale barelor în noduri poate fi făcută având în vedere Fig. 5.20.b și considerând ca și plan de încovoiere planul (xy). Relații similare cu cele deduse în continuare pot fi determinate și pentru planul de încovoiere (xz). Să notăm cu ${}_i M'_{eq}$, ${}_j M'_{eq}$ momentele de încastrare perfectă de la capetele i respectiv j ale barei considerată fără conexiuni semi-rigide, și care pentru bara încărcată cu o forță uniform distribuită pot fi calculate utilizând relația (5.106) și fie ${}_i M_{eq}$ respectiv ${}_j M_{eq}$ momentele echivalente la noduri ce țin seama de prezența conexiunilor semirigide. Notând cu θ_{ri} și θ_{rj} rotirile relative între capetele barei și nod relația între momentele încovoietoare echivalente și aceste rotații este:

$$\begin{aligned}\theta_{ri} &= \frac{{}_i M_{eq}}{R_i} \\ \theta_{rj} &= \frac{{}_j M_{eq}}{R_j}\end{aligned}\quad (5.126)$$

unde cu R_i și R_j s-au notat rigiditățile conexiunilor flexibile de prindere ale barei în noduri. În continuare aplicând principiul suprapunerii de efecte obținem:

$$\begin{aligned}{}_i M_{eq} &= {}_i M'_{eq} - (k'_{6,6} \theta_{ri} + k'_{6,12} \theta_{rj}) \\ {}_j M_{eq} &= {}_j M'_{eq} - (k'_{6,12} \theta_{ri} + k'_{12,12} \theta_{rj})\end{aligned}\quad (5.127)$$

unde $k'_{6,6}$ și $k'_{6,12}$ sunt coeficienții de rigiditate pentru bara fără conexiuni definiți de relațiile (5.114).

Înlocuind relațiile 5.126 în (5.127) rezultă:

$$\begin{bmatrix} {}_i M_{eq} \\ {}_j M_{eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}_i M'_{eq} \\ {}_j M'_{eq} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k'_{6,6} & k'_{6,12} \\ k'_{6,12} & k'_{12,12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{R_i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_i M_{eq} \\ {}_j M_{eq} \end{bmatrix}\quad (5.128)$$

Rezolvând în continuare sistemul (5.128) rezultă expresia pentru momentele încovoietoare echivalente corespunzătoare barei cu conexiuni flexibile:

$$\begin{bmatrix} {}_i M_{eq} \\ {}_j M_{eq} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \beta} \begin{bmatrix} 1 + \frac{k'_{12,12}}{R_j} & -\frac{k'_{6,12}}{R_j} \\ -\frac{k'_{6,12}}{R_i} & 1 + \frac{k'_{6,6}}{R_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}_i M'_{eq} \\ {}_j M'_{eq} \end{bmatrix}\quad (5.129)$$

unde coeficienții de rigiditate $k'_{12,12}$, $k'_{6,6}$, $k'_{6,12}$ sunt dați de relațiile (5.114) iar

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 + \frac{k'_{6,6}}{R_i} & \frac{k'_{6,12}}{R_j} \\ \frac{k'_{6,12}}{R_i} & 1 + \frac{k'_{12,12}}{R_j} \end{bmatrix}\quad (5.130)$$

Vectorul forțelor echivalente corespunzătoare forțelor tăietoare se obțin aplicând condiția de echilibru static la nivel de element.

b) Metoda 2

O altă posibilitate de includere a efectului conexiunilor flexibile asupra matricei de rigiditate respectiv vectorului forțelor echivalente la noduri este prezentată în continuare. Se considera o bară dreaptă dintr-o structura plană, legată în noduri prin legături elastice punctuale care permit numai rotații, având rigiditățile

de rotație R_i, R_j (Fig. 5.21). Procedul poate fi extins ușor și la structurile spațiale. Rotirea la cele două capete ale barei poate fi scrisă ca fiind compusă din rotirea capătului de bară la care se adaugă rotirea relativă dintre capătul de bară și nod:

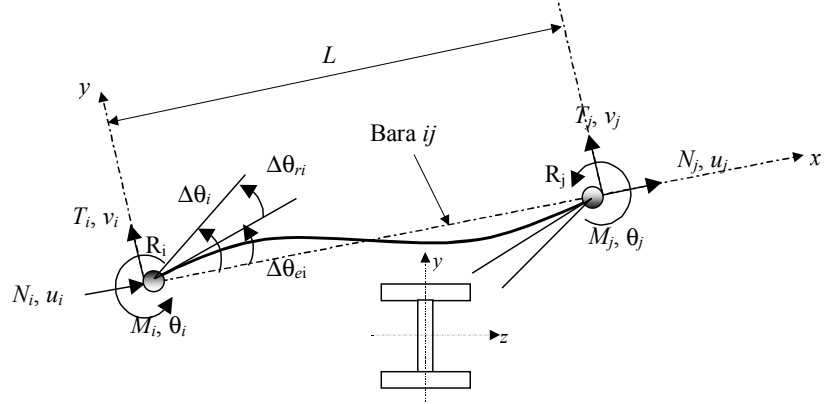


Fig. 5.21. Bara cu conexiuni semi-rigide.

$$\Delta\theta = \begin{bmatrix} \Delta\theta_i \\ \Delta\theta_j \end{bmatrix} = \Delta\theta_e + \Delta\theta_r \quad (5.131)$$

$$\Delta\theta_e = \begin{bmatrix} \Delta\theta_{ei} \\ \Delta\theta_{ej} \end{bmatrix}, \Delta\theta_r = \begin{bmatrix} \Delta\theta_{ri} \\ \Delta\theta_{rj} \end{bmatrix} \quad (5.132)$$

Neglijând în continuare componentele deplasărilor corespunzătoare deplasărilor axiale, vectorul deplasărilor nodale corespunzător gradelor de libertate de rotație și translație transversală se scrie:

$$\Delta = \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix} = \Delta_e + \Delta_r \quad (5.133)$$

unde vectorul Δ_e colectează deplasările de la capetele de bare iar Δ_r colectează deplasările relative între nod și capătul de bară și care mai poate fi exprimat astfel:

$$\Delta_r = G\Delta\theta_r = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta\theta_{ri} \\ 0 \\ \Delta\theta_{rj} \end{bmatrix} \quad (5.134)$$

unde cu G s-a notat matricea "gradient" și a cărei expresie este:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.135)$$

Aastfel că, vectorul deplasărilor generalizate de la capetele barei se determină din relația (5.133):

$$\Delta_e = \Delta - \Delta_r \quad (5.136)$$

iar relația ce leagă creșterile forțelor din noduri $\Delta \mathbf{F}$ cu creșterile deplasărilor generalizate de la capetele barei se scrie:

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{K} \Delta_e = \mathbf{K} (\Delta - \Delta_r) \quad (5.137)$$

unde $\mathbf{K}$ reprezintă matricea de rigiditate a barei considerată fără conexiuni, și care include efectul plastificării distribuite respectiv al neliniarității geometrice locale. În cazul în care bara este încărcată de un sistem de forte ce acționează în lungul ei, forțele nodale echivalente sunt luate în considerare în relația de mai sus, astfel că relația constitutivă la nivel de element se scrie în acest caz astfel:

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{K} (\Delta - \Delta_r) + \Delta \mathbf{P}_0 \quad (5.138)$$

unde $\Delta \mathbf{P}_0$ reprezintă vectorul forțelor nodale echivalente de la capetele barei considerate cu conexiuni rigide și care a fost determinat în paragrafele anterioare.

Vectorul forțelor de la cele două capete ale barei poate fi descompus astfel:

$$\Delta \mathbf{F} = \Delta \mathbf{F}^{(m)} + \Delta \mathbf{F}^{(t)} \quad (5.139)$$

unde $\Delta \mathbf{F}^{(m)}$ colectează numai momentele încovoietoare iar $\Delta \mathbf{F}^{(t)}$ colectează doar forțele tăietoare corespunzătoare capetelor i și j ale barei:

$$\Delta \mathbf{F}^{(m)} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_i \\ 0 \\ M_j \end{bmatrix}; \quad \Delta \mathbf{F}^{(t)} = \begin{bmatrix} T_i \\ 0 \\ T_j \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (5.140)$$

Aastfel, relația (5.139) se scrie acum:

$$\Delta \mathbf{F}^{(m)} + \Delta \mathbf{F}^{(t)} = \mathbf{K} (\Delta - \Delta_r) + \Delta \mathbf{P}_0 \quad (5.141)$$

Multiplicând ambii membrii ai relației de mai sus cu $\mathbf{G}^T$ și ținând seama că $\mathbf{G}^T \Delta \mathbf{F}^{(t)} = 0$ obținem:

$$\mathbf{G}^T \Delta \mathbf{F}^{(m)} = \mathbf{G}^T \mathbf{K} (\Delta - \Delta_r) + \mathbf{G}^T \Delta \mathbf{P}_0 \quad (5.142)$$

Legăturile flexibile transmit forte proportionale cu deplasările relative dintre nod și capătul barei, astfel încât componenta momentelor încovoietoare se exprimă astfel:

$$\Delta \mathbf{F}^{(m)} = \mathbf{K}_r \Delta_r \quad (5.143)$$

unde cu $\mathbf{K}_r$ s-a notat matricea de rigiditate a conexiunilor elastice de la capetele barei și care se exprimă astfel:

$$\mathbf{K}_r = \text{diag}(0, R_i, 0, R_j) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_j \end{bmatrix} \quad (5.144)$$

Coroborând relațiile (5.142) și (5.143) rezultă:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{K}_r \Delta_r = \mathbf{G}^T \mathbf{K}(\Delta - \Delta_r) + \mathbf{G}^T \Delta \mathbf{P}_0 \quad (5.145)$$

Înlocuind în relația de mai sus relația (5.134) ce definește vectorul deplasărilor relative, rezultă expresia acestui vector:

$$\Delta \theta_r = [\mathbf{G}^T (\mathbf{K} + \mathbf{K}_r) \mathbf{G}]^{-1} (\mathbf{G}^T \mathbf{K} \Delta + \mathbf{G}^T \Delta \mathbf{P}_0) \quad (5.146)$$

Revenind la relația constitutivă la nivel de element cu relația (5.146) rezultă:

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{K}(\Delta - \Delta_r) + \Delta \mathbf{P}_0 = \mathbf{K} \left\{ \Delta - \mathbf{G} [\mathbf{G}^T (\mathbf{K} + \mathbf{K}_r) \mathbf{G}]^{-1} (\mathbf{G}^T \mathbf{K} \Delta + \mathbf{G}^T \Delta \mathbf{P}_0) \right\} + \Delta \mathbf{P}_0 \quad (5.147)$$

și care după rearanjare rezultă:

$$\Delta \mathbf{F} = \left\{ \mathbf{K} - \mathbf{K} \mathbf{G} [\mathbf{G}^T (\mathbf{K} + \mathbf{K}_r) \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{K} \right\} \Delta + \Delta \mathbf{P}_0 - \Delta \mathbf{P}_0 \mathbf{K} \mathbf{G} [\mathbf{G}^T (\mathbf{K} + \mathbf{K}_r) \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \quad (5.148)$$

Relația de mai sus stabilește relația între creșterea eforturilor și cea a deplasărilor la nivel de element, cu luarea în considerare a efectului conexiunilor semi-rigide:

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{K}_{sem} \Delta + \Delta \mathbf{P}_{sem} \quad (5.149)$$

unde $\mathbf{K}_{sem}$ reprezintă matricea de rigiditate a elementului de bară incluzând atât efectul plastificării distribuite în lungul barei cât și efectul neliniarității geometrice locale ($P-\delta$) și al conexiunilor semi-rigide, iar $\Delta \mathbf{P}_{sem}$ reprezintă vectorul forțelor nodale echivalente la noduri cu luarea în considerare a aceluiași efecte:

$$\mathbf{K}_{sem} = \left\{ \mathbf{K} - \mathbf{K} \mathbf{G} [\mathbf{G}^T (\mathbf{K} + \mathbf{K}_r) \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{K} \right\} \quad (5.150a)$$

$$\Delta \mathbf{P}_{sem} = \Delta \mathbf{P}_0 - \Delta \mathbf{P}_0 \mathbf{K} \mathbf{G} [\mathbf{G}^T (\mathbf{K} + \mathbf{K}_r) \mathbf{G}]^{-1} \mathbf{G}^T \quad (5.151b)$$

5.6.1. Modelarea comportării neliniare a conexiunilor semi-rigide

Dacă conexiunile au o comportare liniar-elastică, atunci rigiditățile R_i și R_j ale conexiunilor sunt constante. În cazul în care însă, comportarea este neliniară, atunci aceste rigidități sunt variabile, depinzând de nivelul de solicitare al conexiunii. Pentru a modela comportarea neliniară a conexiunilor se consideră pentru relația moment-rotire, după (Kishi&Chen, 1986) o familie de curbe determinată experimental și aproximată în funcție de momentul capabil limită al conexiunii M_u , de rotirea relativă θ_r și rigiditatea inițială R_{i0} a acestora prin ecuația:

$$\frac{M}{M_u} = \frac{\theta_r / \theta_0}{[1 + (\theta_r / \theta_0)^n]^{1/n}} \quad (5.151)$$

care mai poate fi scrisă sub forma:

$$m = \frac{\theta}{(1 + \theta^n)^{1/n}}, \text{ pentru } \theta > 0 \text{ și } m > 0 \quad (5.152)$$

în care $m = M/M_u$, M este momentul încovoietor în conexiune, n este un parametru care determină forma curbei (Fig. 5.22), $\theta = \theta_r/\theta_0$, $\theta_0 = M_u/R_{i0}$ este rotirea de referință.

Relația (5.152) se mai poate exprima sub forma echivalentă:

$$\theta = \frac{m}{(1 + m^n)^{1/n}}, \text{ pentru } \theta > 0 \text{ și } m > 0 \quad (5.153)$$

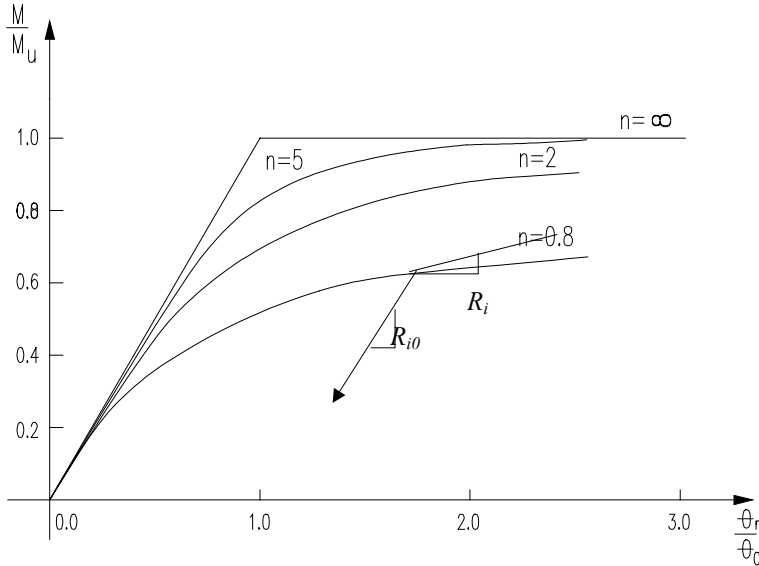


Fig. 5.22. Curbele moment-rotire ale conexiunii semirigide. Modelul celor trei parametri.

Cum între momentele încovoietoare ce solicită conexiunile, M și rotirile relative θ_r există relațiile:

$$M_i = R_i \cdot \theta_{ri} \text{ și } M_j = R_j \cdot \theta_{rj} \quad (5.154)$$

rigiditatea tangentă R_i corespunzătoare unei valori arbitrare a rotirii $|\theta_r|$ se poate evalua făcând derivata lui M în raport cu θ_r în (5.151):

$$R_i = \frac{dM}{d\theta_r} = \frac{M_u}{\theta_0 (1 + \theta^n)^{1+1/n}} = R_{i0} \frac{1}{(1 + \theta^n)^{1+1/n}} = R_{i0} \eta(\theta, n) \quad (5.155)$$

în care cu $\eta(\theta, n)$ s-a notat factorul de reducere al rigidității conexiunii egal cu:

$$\eta(\theta, n) = \frac{1}{(1 + \theta^n)^{1+1/n}} = \frac{(1 - m^n)^{1+1/n}}{1 + m^{n-1} \cdot (1 - m)} \quad (5.156)$$

Rigiditatea inițială a conexiunii se exprimă în funcție de modulul de rigiditate

EI_0/L al barei și de un factor de "fixare" p_i astfel încât R_{i0} se mai poate exprima sub forma:

$$R_{i0} = \frac{4EI_0}{L} \frac{3p_i}{4(1-p_i)} \quad (5.157)$$

Din relația (5.157) rezultă expresia factorului de "fixare" p_i în funcție de rigiditatea inițială R_{i0} :

$$p_i = \frac{1}{1 + 3EI_0 / R_{i0}L} \quad (5.158)$$

De observat că în timp ce $0 < R_{i0} < \infty$ coeficientul de "fixare" p_i ia valori între 0 și 1 ($0 < p_i < 1$).

În felul acesta, rigiditatea tangentă depinzând de valoarea momentului încovoietor M_i ce soliciță conexiunea din nodul i este:

$$R_i = \frac{4EI_0}{L} \frac{3p_i}{4(1-p_i)} \eta(M_i) \quad (5.159)$$

Se pot considera astfel coeficienți diferiți de "fixare" p în cele două capete i și j ale barei, ca și moduri diferite de comportare neliniară a celor două conexiuni, prin alegerea corespunzătoare a parametrilor de comportare n , ale momentelor limită de cedare M_u ca și ale rigidităților inițiale R_0 , în funcție de tipul de prindere al barelor în nod.

De observat că în modelul de comportare neliniară a conexiunilor, nu s-a considerat fenomenul de consolidare care apare pentru valori relativ mari ale deformațiilor. Descărcarea elastică în conexiunile semirigide, în timpul procesului de calcul, poate fi luată în considerare prin studiul semnului produsului dintre momentul încovoietor incremental ΔM și a momentului încovoietor total M din conexiune și calcularea rigidității R_i a conexiunii în consecință (Fig. 5.22):

$$\Delta M \cdot M > 0, R_i = R_i \text{ (ec. 5.159), curba de încărcare}$$

$$\Delta M \cdot M < 0, R_i = R_{i0} \text{ (ec. 5.157), curba de descărcare}$$

5.7. CONSIDERAREA EFECTULUI GLOBAL AL NELINIARITĂȚII GEOMETRICE

Efectele globale ale neliniarității geometrice se referă la considerarea configurației geometrice deformate a structurii pentru fiecare etapă a procesului de încărcare. Se impune o modalitate de rezolvare indirectă, soluția corectă fiind obținută prin efectuarea unei succesiuni de cicluri de calcul, în fiecare ciclu reconstituind matricea de rigiditate globală $\mathbf{K}$ precum și vectorul forțelor nodale în coordonate globale. Astfel în procesul de calcul de fiecare dată intervine o altă configurație geometrică a structurii, caracterizată prin deplasările de noduri care au fost calculate în etapa precedentă a calculului. Aceasta influențează atât formarea matricelor de rigiditate și a vectorilor forțelor nodale ale elementelor în sistemul propriu de axe, cât și trecerea acestora în sistemul global de referință al structurii în

vederea asamblării. Acest lucru se poate realiza efectuând un calcul static al structurii în treapta de încărcare k considerată și determinând vectorul deplasărilor nodale, cu care se pot calcula coordonatele nodurilor i și j ale barelor ca și lungimile actualizate ale acestora pentru treapta k de încărcare. Se pot determina astfel cosinușii directori a unghiurilor făcute de axele sistemului de referință local (xyz) cu cele ale sistemului de referință global (XYZ), și actualiza pentru fiecare treaptă de încărcare k matricea de rotație $\mathbf{R}_b$, ținându-se astfel seama de efectul global al neliniarității geometrice în fiecare pas al procesului de calcul. În metoda de calcul pe care o propunem, efectul neliniarității geometrice globale este luat în considerare adoptând o formulare în cadrul căreia deplasările și rotirile incrementale sunt considerate mici pe parcursul unui ciclu de încărcare.

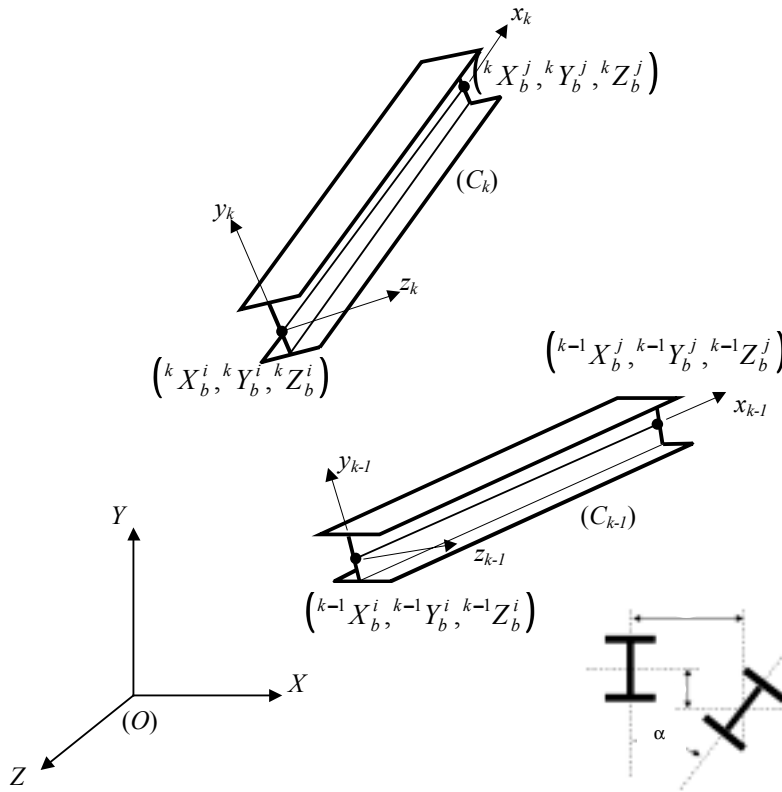


Fig. 5.23. Efectul global al neliniarității geometrice.

Ca urmare, matricea de rigiditate tangentă sau incrementală a elementelor structurii poate fi obținută direct în sistemul de coordonate local prin transformări de coordonate liniare. Mai departe trecerea de la coordonatele locale la cele globale ale matricei de rigiditate se face utilizând matricea de rotație $\mathbf{R}_b$ a barei prin procedeul standard:

$$\mathbf{K}_b = \mathbf{R}_b^T \cdot \mathbf{k}_b \cdot \mathbf{R}_b \quad (5.160)$$

în care matricea de rotație $\mathbf{R}_b$ a barei este de forma:

$$\mathbf{R}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_i^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_i^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{L}_j^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{L}_j^k \end{bmatrix} \quad (5.161)$$

și în care matricele $\mathbf{L}_i^k$ și $\mathbf{L}_j^k$ reprezintă matricele cosinușilor directori ale axelor reperului local în raport cu axele sistemului global de referință și care se calculează în funcție de noua configurație geometrică (k) a elementului la cele două capete ale barei:

$$\mathbf{L}_{i(j)}^k = \begin{bmatrix} {}^k\lambda_{xx}^{i(j)} & {}^k\lambda_{xy}^{i(j)} & {}^k\lambda_{xz}^{i(j)} \\ {}^k\lambda_{yx}^{i(j)} & {}^k\lambda_{yy}^{i(j)} & {}^k\lambda_{yz}^{i(j)} \\ {}^k\lambda_{zx}^{i(j)} & {}^k\lambda_{zy}^{i(j)} & {}^k\lambda_{zz}^{i(j)} \end{bmatrix} \quad (5.162)$$

unde $\begin{pmatrix} {}^k\lambda_{xx}^{i(j)} & {}^k\lambda_{xy}^{i(j)} & {}^k\lambda_{xz}^{i(j)} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} {}^k\lambda_{yx}^{i(j)} & {}^k\lambda_{yy}^{i(j)} & {}^k\lambda_{yz}^{i(j)} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} {}^k\lambda_{zx}^{i(j)} & {}^k\lambda_{zy}^{i(j)} & {}^k\lambda_{zz}^{i(j)} \end{pmatrix}$ reprezintă coordonatele versorilor ${}^k\lambda_x$, ${}^k\lambda_y$, ${}^k\lambda_z$ a axelor x, y, z la cele două capete, i și j a elementului la incrementul de încărcare k . Pentru configurația inițială nedeformată, expresia acestor matrici a fost dată în cadrul capitolului 2 al acestei cărți. Diferențele în matricele $\mathbf{L}_i^k$ și $\mathbf{L}_j^k$ în configurația deformată sunt date de unghiul de rotire al axelor principale de inerție ale secțiunilor de la capetele elementului:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_0 + \Delta\theta_{xi}^k \\ \alpha_j &= \alpha_0 + \Delta\theta_{xj}^k \end{aligned} \quad (5.163)$$

unde α_0 este unghiul în configurația inițială nedeformată.

Adoptând o formulare incremental-iterativă, în continuare este propusă o metodă de reactualizare a matricei de rotație $\mathbf{R}_b$ prin corectarea succesivă a vectorilor de orientare λ_x , λ_y , λ_z . Să considerăm cele două configurații C_{k-1} și C_k unde vectorii de orientare corespunzători configurației C_{k-1} (${}^{k-1}\lambda_x$, ${}^{k-1}\lambda_y$, ${}^{k-1}\lambda_z$) se consideră cunoscuți. Astfel, la fiecare ciclu de încărcare versorii de orientare ai barei în configurația C_k (${}^k\lambda_x$, ${}^k\lambda_y$, ${}^k\lambda_z$) sunt reactualizați astfel:

1. Versorul ${}^k\lambda_x$ al fiecărui element de bară b este determinat pe baza noilor coordonate ale nodurilor kX_b , kY_b , kZ_b obținute în pasul curent de încărcare k :

$${}^k\lambda_x = \begin{bmatrix} \frac{{}^kX_b^j - {}^kX_b^i}{{}^kL_b} & \frac{{}^kY_b^j - {}^kY_b^i}{{}^kL_b} & \frac{{}^kZ_b^j - {}^kZ_b^i}{{}^kL_b} \end{bmatrix} \quad (5.164)$$

unde ${}^k L_b$ reprezintă lungimea barei reactualizată iar ${}^k X_b^{i(j)}$, ${}^k Y_b^{i(j)}$, ${}^k Z_b^{i(j)}$ sunt coordonatele nodale ale capetelor barei în sistemul global de referință:

$${}^k L_b = \sqrt{({}^k X_b^j - {}^k X_b^i)^2 + ({}^k Y_b^j - {}^k Y_b^i)^2 + ({}^k Z_b^j - {}^k Z_b^i)^2} \quad (5.165)$$

2. Reactualizarea parțială a vectorului asociat axei principale de inerție a secțiunii ${}^k \lambda_y$ se realizează astfel, după calcularea rotirii axiale a barei:

$${}^k \lambda_{y0} = {}^{k-1} \lambda_y + ({}^{k-1} \lambda_x \times {}^{k-1} \lambda_y) \cdot \Delta \theta_m^k \quad (5.166)$$

unde $\Delta \theta_m^k = 1/2(\Delta \theta_{xj}^k + \Delta \theta_{xi}^k)$, $\Delta \theta_{xi}^k$ și $\Delta \theta_{xj}^k$ sunt rotirile axiale incrementale la cele două capete i și j ale barei față de axa locală:

$$\begin{aligned} \Delta \theta_{xi}^k &= {}^{k-1} \lambda_{xx} \cdot \Delta \theta_{xg}^{k,i} + {}^{k-1} \lambda_{xy} \cdot \Delta \theta_{yg}^{k,i} + {}^{k-1} \lambda_{xz} \cdot \Delta \theta_{zg}^{k,i} \\ \Delta \theta_{xj}^k &= {}^{k-1} \lambda_{xx} \cdot \Delta \theta_{xg}^{k,j} + {}^{k-1} \lambda_{xy} \cdot \Delta \theta_{yg}^{k,j} + {}^{k-1} \lambda_{xz} \cdot \Delta \theta_{zg}^{k,j} \end{aligned} \quad (5.167)$$

și $\Delta \theta_{xg}^{k,i(j)}$, $\Delta \theta_{yg}^{k,i(j)}$, $\Delta \theta_{zg}^{k,i(j)}$ sunt rotirile incrementale nodale obținute în pasul curent de încărcare față de sistemul de axe global al structurii.

3. În această etapă versorul ${}^k \lambda_{y0}$ nu satisface proprietatea de ortogonalitate cu versoul axei x , ${}^k \lambda_x$. Cei doi vectori determină un plan (xy) din care nu face parte ${}^k \lambda_x$. Astfel versoul atașat axei y este reactualizat pe baza următoarei relații:

$${}^k \lambda_y = ({}^k \lambda_x \times {}^k \lambda_{y0}) \times {}^k \lambda_x \quad (5.168)$$

Datorită erorilor numerice ce se pot acumula în timpul acestor etape de calcul vectorul de mai sus nu are norma unitară astfel că următoarea relație este utilizată în acest scop:

$${}^k \lambda_y = \frac{{}^k \lambda_y}{\|{}^k \lambda_y\|} \quad (5.169)$$

4. În ultima etapă versoul asociat axei principale z a secțiunii este reactualizat pe baza relației:

$${}^k \lambda_z = {}^k \lambda_x \times {}^k \lambda_y \quad (5.170)$$

Astfel efectul neliniarității geometrice globale se poate introduce în calcul, direct, prin reactualizarea succesivă, la fiecare ciclu de încărcare, a lungimilor și vectorilor de orientare λ_x , λ_y , λ_z ale elementelor componente ale structurii, asamblarea acestora în matricea de rigiditate globală efectuându-se la fel ca în statica liniară, pe baza definiției topologice a structurii. Având matricele de rigiditate ale barelor în coordonate globale, matricea de rigiditate a structurii se obține prin sumarea matricelor barelor:

$$\mathbf{K} = \sum_b \mathbf{K}_b \quad (5.171)$$

În mod analog se obține vectorul forțelor nodale în coordonate globale, trecerea de la coordonate locale la cele globale se face cu ajutorul matricei de rotație $\mathbf{R}_b$:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{M} \quad (5.172)$$

iar vectorul forțelor nodale pentru întreaga structură se obține sumând vectorii $\mathbf{M}'$ pentru toate barele la care se adaugă vectorii forțelor concentrate în nodurile structurii. În continuare urmărind un procedeu de tip *predictor-corector* similar cu cel descris în cadrul capitolul 2, verificarea echilibrului se face considerând o valoare prestabilită pentru toleranța (ϵ) de închidere a forțelor reziduale pe structură, constituite ca diferență dintre forțele exterioare aplicate și cele interne rezultate.

Pentru accelerarea vitezei de convergență și ajustarea direcției de căutare în spațiul deplasărilor, pe parcursul ciclurilor de calcul, matricea de rigiditate tangentă a elementului de bară, $\mathbf{K}_b$, care include efectul plastificării distribuite, efectul neliniarității geometrice locale (P- δ), precum și cel al conexiunilor semi-rigide cu comportare liniară sau neliniară, poate fi completată cu matricea de rigiditate geometrică dedusă în (Yang, s.al., 2003) în ipoteza micilor deplasări și rotații în interiorul unui ciclu de calcul:

$$\mathbf{K}'_b = \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_g \quad (5.173)$$

unde matricea de rigiditate geometrică $\mathbf{K}_g$ are următoarea formă:

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{g} & \mathbf{h}_i & -\mathbf{g} & \mathbf{h}_i \\ \mathbf{h}_i^T & \mathbf{i}_i & -\mathbf{h}_i^T & \mathbf{0} \\ -\mathbf{g} & -\mathbf{h}_i & \mathbf{g} & -\mathbf{h}_j \\ \mathbf{h}_j^T & \mathbf{0} & -\mathbf{h}_j^T & \mathbf{i}_j \end{bmatrix} \quad (5.174)$$

unde $\mathbf{0}$ este matricea nulă de dimensiuni 3x3 iar submatricele $\mathbf{g}, \mathbf{h}, \mathbf{i}$ asociate celor două capete i și j ale elementului sunt:

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{k^{-1}F_{jy}}{L} & -\frac{k^{-1}F_{jz}}{L} \\ -\frac{k^{-1}F_{jy}}{L} & \frac{k^{-1}F_{jx}}{L} & 0 \\ -\frac{k^{-1}F_{jz}}{L} & 0 & -\frac{k^{-1}F_{jx}}{L} \end{bmatrix} \quad (5.175)$$

$$\mathbf{h}_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{{}^{k-1}M_{iy}}{L} & -\frac{{}^{k-1}M_{ix}}{2L} & 0 \\ \frac{{}^{k-1}M_{iz}}{L} & 0 & -\frac{{}^{k-1}M_{ix}}{2L} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{{}^{k-1}M_{jy}}{L} & -\frac{{}^{k-1}M_{jx}}{2L} & 0 \\ \frac{{}^{k-1}M_{jz}}{L} & 0 & -\frac{{}^{k-1}M_{jx}}{2L} \end{bmatrix} \quad (5.176)$$

$$\mathbf{i}_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{{}^{k-1}M_{ix}}{2} \\ -{}^{k-1}M_{iz} & 0 & 0 \\ {}^{k-1}M_{iy} & \frac{{}^{k-1}M_{ix}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{i}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{{}^{k-1}M_{jx}}{2} \\ -{}^{k-1}M_{jz} & 0 & 0 \\ {}^{k-1}M_{jy} & \frac{{}^{k-1}M_{jx}}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.177)$$

unde ${}^{k-1}F_{jy}$, ${}^{k-1}F_{jz}$, ${}^{k-1}M_{jy}$, ${}^{k-1}M_{jz}$, etc., reprezintă eforturile la capetele elementului determinate în configurația, $k-1$, ultima configurație de echilibru calculată.

5.8. PARTICULARITĂȚI DE MODELARE ÎN CAZUL STRUCTURILOR ÎN CADRE DIN BETON ARMAT

Contradicția privind analiza structurilor din beton armat este bine cunoscută și unanim acceptată în proiectare: determinarea stărilor de eforturi în elementele structurale este realizată în domeniul comportării elastice a materialului în timp ce dimensionarea secțiunilor barelor ține cont de variatele stări limită ultime ale secțiunilor transversale presupunând o complexă comportare elasto-plastică a materialului.

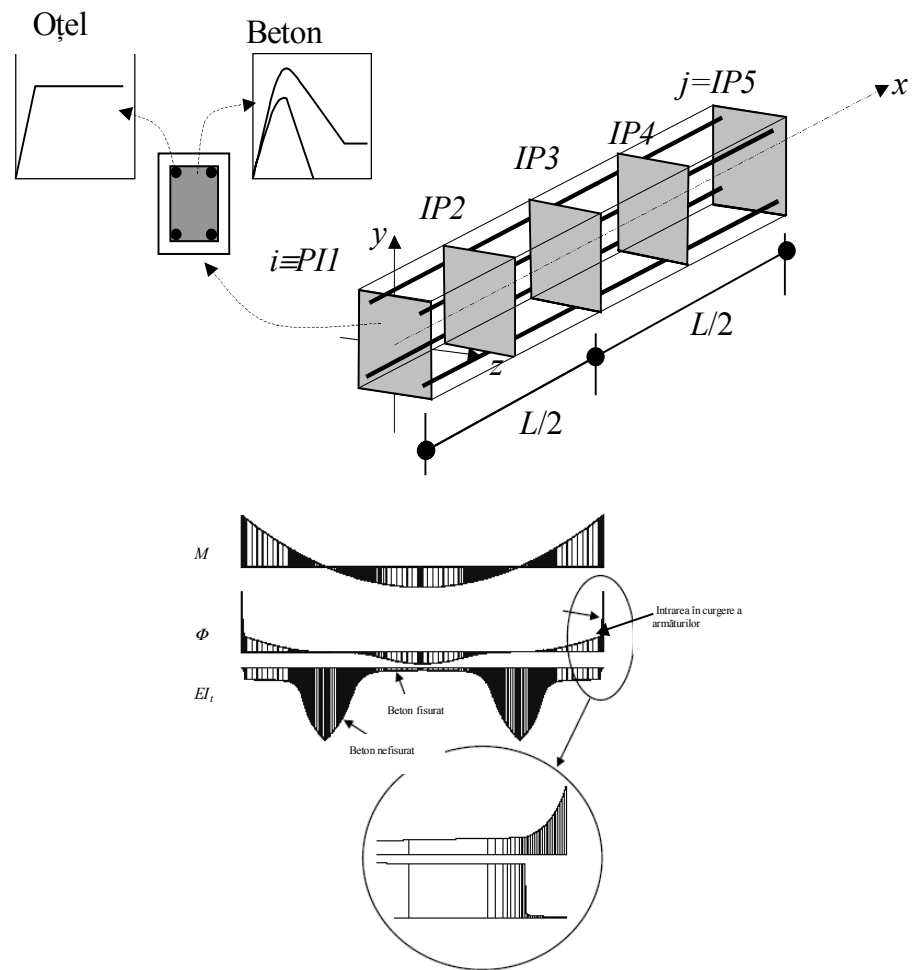


Fig. 5.24. Modelarea neliniarității fizice la nivel de "fibră" în cazul elementelor de beton armat.

Totodată, continua schimbare a procesului deformării configurației geometrice inițiale a structurii, duce de asemenea la schimbări ale stării de efort și deformație față de cea dedusă printr-un calcul liniar elastic.

Cele două probleme mai sus menționate nu pot fi soluționate din punct de vedere teoretic, dacă nu se efectuează o analiză neliniară în care trebuie să se țină seama atât de neliniaritățile fizice cât și cele geometrice ale structurii. Luarea în considerație a comportării post-elastice a structurilor din beton armat la acțiuni statice presupune precizarea prealabilă a unor legi de comportare a materialelor constitutive fie la nivel de secțiune (curbe $M-N-\Phi$) fie la nivel de fibră (curbe constitutive $\sigma-\epsilon$) (Fig. 5.24). Pentru secțiuni de beton armat, relațiile caracteristice la nivel de secțiune $M-N-\Phi$ sunt mai complexe decât pentru secțiuni omogene, fiind influențate de: curbele caracteristice ale betonului și armăturilor; forma secțiunii de beton; cantitatea și poziționarea armăturilor în secțiune; ieșirea din lucru a betonului din zona întinsă după fisurare.

Existența în secțiune a două materiale cu caracteristici fizico-mecanice diferite, precum și stadiile diferite de solicitare care pot apărea în cele două materiale componente, impun trecerea de la analiza bazată pe conceptul de articulație plastică la cel bazat pe considerarea dezvoltărilor de zone plastice în secțiune și în lungul barelor și modelarea neliniarității fizice la nivel de fibră sau la nivel de secțiune pe baza unor relații neliniare de comportare.

Rezultatele experimentale au arătat că procesul de redistribuire a eforturilor în structurile din beton armat, în comparație cu cele metalice, este mult mai complex și depinde nu numai de deformările plastice ale oțelului ci și de cele ale betonului, de existența fisurilor, durata încărcării și curgerea lentă neliniară a betonului. Efectul redistribuirii mai depinde de natura structurii încărcate și de calitatea și cantitatea armăturii întinse în secțiuni, ceea ce dă posibilitatea teoretică de a regla eforturile prin schimbarea cantității de armătură în secțiuni.

Ipotezele de bază, suplimentare față de cele prezentate în cadrul paragrafului 5.2, avute în considerație sunt:

- deformația barei respectă ipoteza secțiunilor plane. Eroarea introdusă de tendința de deplanare a secțiunilor dintre două fisuri datorate lunecării armăturii în beton este neglijată.
- compatibilitatea deformațiilor specifice ale betonului și armăturii.
- barele structurii sunt drepte cu secțiune transversală constantă, permițându-se variația secțiunii transversale a armăturii de-a lungul barei.
- curbele caracteristice la nivel de secțiune (curbe moment-curbură de tip Ramberg-Osgood, etc.), precum și relațiile constitutive $\sigma-\epsilon$ ale materialelor componente se consideră cunoscute.

Astfel, concepția, formularea și procedeele sistematizate de aplicare ale metodei generale descrise în cadrul paragrafelor anterioare, inclusiv aplicarea procedurii incremental-iterativ de determinare a stării de efort și deformație în

structură ce va fi descris în cadrul paragrafului 5.9 rămân aceleași ca și în calculul structurilor metalice și nu este necesar să mai fie reamintite aici.

Trebuie subliniate numai anumite particularități care apar prin extinderea aplicării metodei în condițiile unui calcul elasto-plastic în care comportarea secțiunilor transversale ale barelor diferă în mod esențial de cel al secțiunilor omogene (metalice).

Calculul structurilor din beton armat (cu secțiuni transversale neomogene) necesită cunoașterea caracteristicilor de rigiditate ale secțiunilor transversale corespunzătoare unui anumit nivel și sens de solicitare precum și variația acestora în lungul barelor. Asemănător barelor omogene cu secțiune variabilă, și în acest caz, cunoașterea riguroasă a configurațiilor de rigiditate în lungul barei se referă la două aspecte și anume: (1) variația modulului de rigiditate la încovoiere EI și axial EA , ca urmare a modificărilor eforturilor (ca mărime și/sau sens) așa cum s-a arătat în cadrul paragrafelor anterioare și (2) variația caracteristicilor de rigiditate EI și EA de la o secțiune la alta în lungul barelor ca urmare a variației secțiunii transversale a armăturii în lungul barei.

Determinarea modulului de rigiditate la încovoiere EI și a modulului de rigiditate axial EA corespunzător unei anumite stări de eforturi exterioare poate fi realizată "exact" la nivel de fibră prin aplicarea procedurii numerice descris în cadrul capitolului 4 sau aproximativ, prin utilizarea unor relații analitice aproximative moment încovoiitor-efort axial-curbură.

Spre deosebire de structurile metalice, la structurile din beton armat există posibilitatea de a influența asupra formării zonelor plastice. Astfel, prin modificarea secțiunii armăturii, se poate corecta mărimea momentului capabil (plastic) M_c al secțiunii respective, fără ca prin aceasta să se influențeze sensibil asupra modulului inițial de rigiditate la încovoiere EI și axial EA , care depind practic de dimensiunile secțiunii de beton. Dispare astfel condiționarea directă dintre modulele de rigiditate ale barelor ce compun structura și momentele capabile (plastice), acestea din urmă putând fi modificate în anumite limite, conferind structurii o ductilitate și rezistență sporită.

Atfel, variația secțiunii de armătură din lungul barei de beton armat, se poate considera doar în calculul momentelor capabile din secțiunile respective, rezultând o lege de variație de forma unei funcții de tip scară pentru momentele capabile. Spre exemplificare în cazul modelării neliniarității fizice la nivel de secțiune prin relații de tip Ramberg-Osgood, modulii de rigiditate sunt exprimați pe baza următoarelor relații:

$$EI_t(\xi) = EI_0 \cdot \frac{1}{1 + a \cdot n \cdot \left| \frac{M(\xi)}{M_c^{(s,i)}(\xi)} \right|^{n-1}} = EI_0 \cdot \frac{1}{1 + a \cdot n \cdot \left| \frac{M(\xi)}{M_{c0}^{(s,i)} \cdot g^{(s,i)}(\xi)} \right|^{n-1}} \quad (5.178)$$

unde cu indicele superior s și i se diferențiază momentul capabil superior respectiv inferior al secțiunii corespunzător sensului de acțiune al momentului încovoietor M . Pentru o mai bună sistematizare a calculelor s-a introdus o funcție g pe baza căreia se determină variația momentului capabil în lungul barei în raport cu un moment capabil de referință M_{c0} .

Având în vedere variația continuă a secțiunii transversale de armătura, atât de la partea superioară cât și de la partea inferioară a secțiunii de beton, de-a lungul barei, o discretizare a barei prin definirea de noduri intermediare suplimentare, corespunzătoare schimbării de secțiune este dezavantajoasă atât din punct de vedere al consumului de memorie suplimentară necesar cât și din punct de vedere a utilizării programului (o modificare a secțiunilor de armătură în lungul barei ar atrage după sine modificarea întregii topologii a structurii). Pentru evitarea acestor dificultăți, în condițiile unui calcul automat, s-a optat pentru o metodă care are la bază un *limbaj structurat de interogare*.

Astfel corespunzător celor două metode de evaluare a modurilor de rigiditate ale secțiunilor, numeric (analiza la nivel de fibră) și analitic (pe baza relațiilor $M-N-\Phi$), folosind un limbaj structurat este descrisă poziționarea și secțiunile armăturilor în secțiunile transversale de beton din lungul barei, respectiv funcțiile g ce definesc variația momentelor capabile corespunzătoare armării superioare și inferioare ale secțiunilor de beton din lungul barei. Fiecare tip de bară, astfel definită, se adaugă unei baze de date a cărei câmpuri conțin informații privitoare la dispunerea barelor de armătura în secțiune și în lungul barei precum și informații cu privire la valorile funcțiilor g . Limbajul structurat de interogare este folosit în continuare pentru interogarea, actualizarea și gestionarea bazei de date.

O interogare de selecție solicită bazei de date informațiile necesare determinării caracteristicilor de rigiditate EI și EA pentru o secțiune aflată la distanța ξ și solicitată de eforturi de o anumită intensitate și un anumit sens. În acest mod utilizatorul nu este obligat de a defini noduri intermediare suplimentare în secțiunile cu armare diferită, evitându-se discretizarea exagerată a barelor structurii, asigurându-se o mai eficientă gestionare a memoriei, a timpului de analiză, precum și ușurință în pre și post procesarea datelor.

Configurația secțiunilor de armătură și a poziției acestora în secțiunile transversale din lungul barelor, în vederea asigurării unei mai bune ductilități, fiind independentă de configurația geometrică și topologică a structurii de beton armat analizată, aceeași structură putând fi în mod repetat analizată prin simpla reactualizare a bazei de date cu tipurile de bare.

Mai mult, utilizarea unui singur element pentru modelarea barelor structurii încurajează aplicarea directă în proiectare a unui asemenea program de calcul.

5.9. ALGORITMUL ȘI PROGRAMUL DE CALCUL

Pentru determinarea stării de solicitare și deformație a structurii, sub acțiunea unui sistem oarecare de forțe statice, ținându-se seama de efectele neliniarității materiale, geometrice și a prinerilor flexibile ale barelor în noduri se aplică un

calcul incremental-iterativ, întreaga rezolvare fiind condusă în metoda pașilor controlați de lungimea de arc ("arc length methods"). Majoritatea procedeelor propuse în literatura de specialitate pentru rezolvarea sistemului ecuațiilor de condiție neliniar, presupun forțele aplicate exclusiv în noduri, forțele aplicate în lungul barelor fiind remodelate și transformate în forțe concentrate în nodurile adiționale generate în lungul elementelor de bară. În metoda pe care o propunem acest dezavantaj, datorat în principal majorării numărului de noduri și implicit a dimensiunilor problemei, poate fi evitat prin transferarea forțelor din cuprinsul barelor în forțe nodale echivalente, variabile în timpul procesului de calcul, ca urmare a efectelor neliniarităților fizice, geometrice și de comportare neliniară a conexiunilor flexibile. În acest sens, metoda propusă generalizează și îmbunătățește metoda Crisfield ținând cont de particularitățile de modelare structurală descrise în cadrul paragrafelor anterioare - considerarea forțelor echivalente la noduri variabile de la o treaptă de încărcare la alta. Controlul soluției constă în îndeplinirea concomitentă a ambelor condiții ce caracterizează situația de echilibru: compatibilitatea deformată și echilibrul static al nodurilor. Astfel cunoscând configurația de echilibru la pasul m al ciclului de calcul, configurația următoare de echilibru $m+1$ este determinată, printr-un proces iterativ de echilibrare, astfel încât vectorul deplasărilor nodale incrementale $\Delta \mathbf{d}^{(i)}$ și factorul de încărcare incremental $\Delta \lambda_i$, rezultați în urma rezolvării sistemului de ecuații:

$$\begin{cases} {}^m \mathbf{K}_T \cdot \Delta \mathbf{d}^{(i)} = {}^m \Delta \mathbf{Q} + \Delta \lambda_i \cdot {}^m \Delta \mathbf{F} \\ f(\Delta \lambda_i, \Delta \mathbf{d}^{(i)}) = 0 \end{cases} \quad (5.179)$$

să determine forțe nodale (totale) interioare pe structura în echilibru cu forțele nodale (totale) exterioare aplicate:

$$\left\| \left({}^m \mathbf{F} + {}^m \Delta \mathbf{Q} + \Delta \lambda_i \cdot {}^m \Delta \mathbf{F} \right) - {}^{(m+1)} \mathbf{P}^{(i)} \right\| \leq \varepsilon \quad (5.180)$$

unde:

- ${}^m \mathbf{K}_T$ reprezintă matricea de rigiditate tangentă globală a structurii determinată pe baza stărilor de eforturi și a configurației geometrice de echilibru corespunzătoare pasului m al procesului de calcul. Matricea de rigiditate este păstrată constantă în timpul iterațiilor de echilibrare.
- ${}^m \mathbf{F}$ reprezintă vectorul forțelor nodale (date și echivalente în noduri) exterioare totale corespunzător limitei pasului m de încărcare.
- ${}^m \Delta \mathbf{Q}$ reprezintă vectorul forțelor nodale provenite din condiția de respectare a condiției de plastificare în secțiunile barelor solicitate la eforturi axiale mari și momente încovoietoare, corespunzător limitei pasului m de încărcare.
- $\Delta \mathbf{d}^{(i)}$ reprezintă vectorul deplasărilor nodale incrementale corespunzătoare factorului incremental de încărcare $\Delta \lambda_i$.
- ${}^m \Delta \mathbf{F}$ reprezintă vectorul forțelor exterioare nodale incrementale de

referință, egal cu o fracțiune ξ a vectorului forțelor nodale exterioare totale (concentrate în noduri și echivalente în noduri) de la începutul calculului, corectat însă în funcție de efectele neliniarității fizice, geometrice și a conexiunilor semirigide, conform relațiilor prezentate în paragrafele anterioare.

- $^{(m+1)}\mathbf{P}^{(i)}$ reprezintă vectorul forțelor nodale interioare totale corespunzătoare iterației i din cadrul pasului $m+1$ de calcul.
- $f(\Delta\lambda_i, \Delta\mathbf{d}^{(i)}) = 0$ reprezintă ecuația suplimentară de constrângere (v. cap 3).

Rezolvarea problemei, formulate mai sus, presupune efectuarea a două etape distincte și anume: prima, constând în reactualizarea matricei de rigiditate incrementală (tangentă), $^m\mathbf{K}_T$, și a vectorului forțelor nodale incrementale, $^m\Delta\mathbf{F}$ corespunzătoare limitei pasului m de încărcare și a doua, constând în aplicarea unui procedeu eficient de rezolvare a sistemului (5.179) astfel încât să fie îndeplinită condiția (5.180). Fluxul operațiilor principale ale algoritmului de analiză este prezentat în figura 5.25.

5.9.1. Reactualizarea matricei de rigiditate și a vectorului forțelor nodale de referință.

Algoritmul de rezolvare a problemei formulate anterior, presupune determinarea în prealabil a matricei de rigiditate incrementală (tangentă) a structurii și a vectorului forțelor nodale echivalente (de referință pe parcursul unui pas) ținând cont de efectele neliniarității fizice, geometrice și de comportare neliniară a conexiunilor flexibile. Organizarea calculelor pentru determinarea matricei de rigiditate și a vectorului forțelor nodale (corespunzătoare unui anumit pas al procesului de calcul), pentru fiecare element de bară în coordonate locale și globale, este dată în schema logică de principiu din figura 5.26, principalele operații indicate efectuându-se în conformitate cu cele discutate în cadrul paragrafelor anterioare.

Matricea de rigiditate globală a structurii corespunzătoare pasului m al procesului de calcul este asamblată prin însumarea matricelor de rigiditate ale barelor structurii trecute în prealabil în coordonatele globale ale structurii. În mod similar, vectorul forțelor exterioare nodale pentru întreaga structură se obține sumând vectorii forțelor concentrate în noduri (date în coordonate globale) cu vectorii forțelor echivalente la noduri, determinați în prealabil în coordonate locale, pentru fiecare bară, trecerea de la coordonatele locale la cele globale făcându-se cu ajutorul matricei de rotație $\mathbf{R}$.

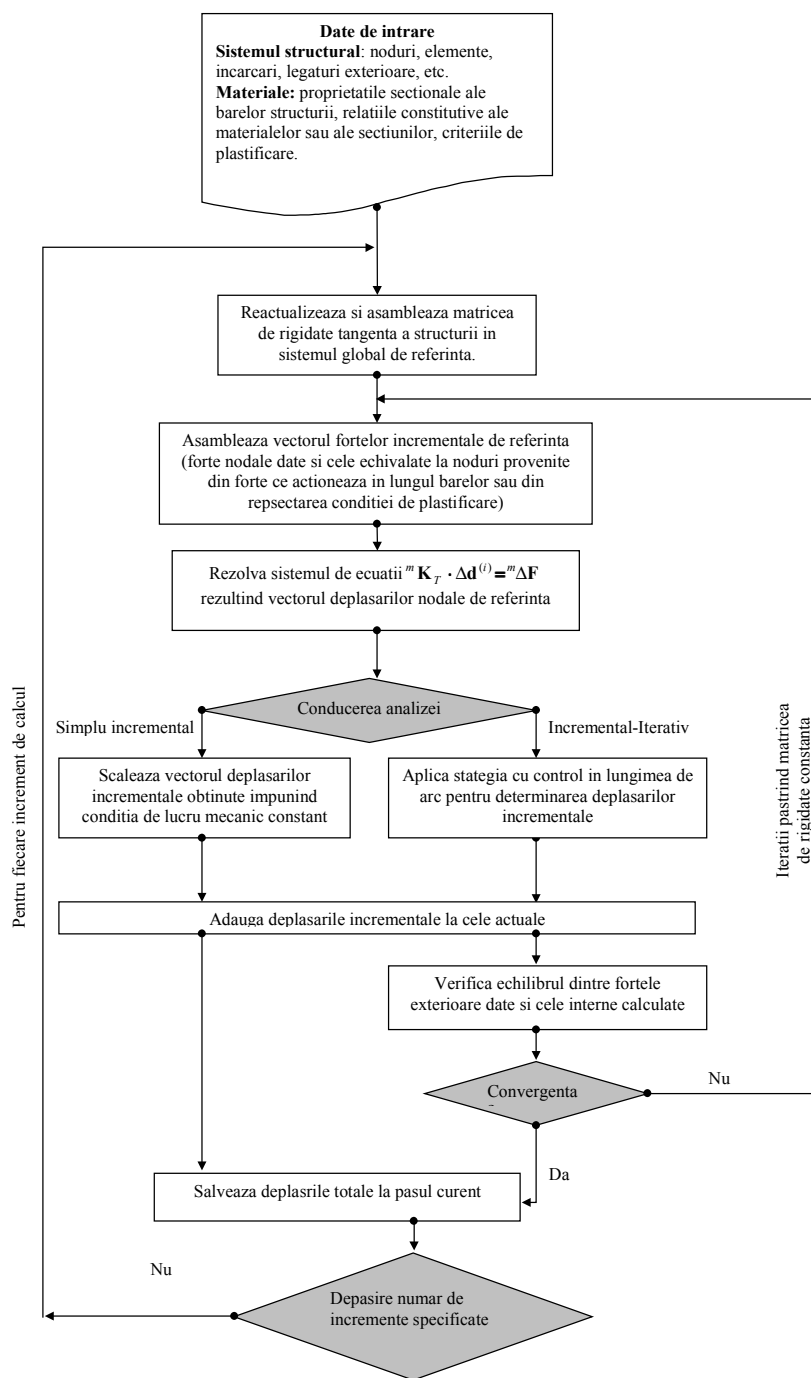


Fig. 5.25. Schema logică de principiu a metodei de calcul propuse.

5.9.2. Procedura de rezolvare

În această etapă se presupun cunoscute matricea de rigiditate tangentă și vectorul forțelor nodale de referință, corespunzătoare limitei pasului m de încărcare (configurației de echilibru m), urmând ca în continuare să se determine următoarea configurație de echilibru, $m+1$, corespunzătoare unui nou nivel al solicitărilor exterioare.

Pentru o încărcare exterioară dată aplicată static ${}^m\mathbf{F} + {}^m\Delta\mathbf{Q} + \Delta\lambda_i \cdot {}^m\Delta\mathbf{F}$, structura va trece într-o poziție de echilibru necunoscută la această fază caracterizată prin deplasările totale $\mathbf{d}_{m+1}$ ale nodurilor ei și prin factorul incremental de încărcare $\Delta\lambda_{m+1}$. Determinarea acestor deplasări și a factorului incremental de încărcare corespunzător este scopul analizei ce urmează. Cunoscând configurația m de echilibru caracterizată prin nivelul ${}^m\mathbf{F}$ al forțelor exterioare și deplasările totale $\mathbf{d}_m$ ale nodurilor structurii (Fig. 5.27.b), procedeul iterativ constă în estimarea factorului incremental de încărcare $\Delta\lambda_i$ și a deplasărilor incrementale corespunzătoare $\Delta\mathbf{d}^{(i)}$, în vederea determinării următoarei configurații de echilibru static, chiar și dincolo de punctul corespunzător încărcării limită a structurii (echilibru instabil). Configurația de referință pentru toate iterațiile din cadrul pasului $m+1$ de încărcare este cea corespunzătoare sfârșitului pasului m de încărcare, procedeul de conducere al iterațiilor încadrându-se în categoria "b" a procedeelor de considerare a configurațiilor de tranziție spre configurația finală de echilibru (v. cap. 3).

La iterația i , din cadrul incrementului $m+1$ de încărcare, estimarea încărcării exterioare aplicată asupra structurii, ${}^{(m+1)}\mathbf{F}^{(i)}$ este dată de următoarea relație:

$${}^{(m+1)}\mathbf{F}^{(i)} = {}^m\mathbf{F} + {}^m\Delta\mathbf{Q} + \Delta\lambda_i \cdot {}^m\Delta\mathbf{F} \quad (5.181)$$

Presupunând cunoscute deplasările totale corespunzătoare iterației i , $(\mathbf{d}_m + \Delta\mathbf{d}^{(i)})$, se calculează forțele nodale interioare corespunzătoare ${}^{(m+1)}\mathbf{P}^{(i)}$, care în general nu sunt în echilibru cu cele exterioare aplicate. Vectorul forțele nodale neechilibrate ${}^{(m+1)}\mathbf{R}^{(i)} = {}^{(m+1)}\mathbf{F}^{(i)} - {}^{(m+1)}\mathbf{P}^{(i)}$ poate fi descompus în două componente (Fig. 5.27.a), una paralelă cu direcția vectorului forțelor incrementale de referință $g_i \cdot {}^m\Delta\mathbf{F}$ unde

$$g_i = \frac{{}^{(m+1)}\mathbf{R}^{(i)T} \cdot {}^m\Delta\mathbf{F}}{{}^m\Delta\mathbf{F}^T \cdot {}^m\Delta\mathbf{F}} \quad (5.182)$$

și o componentă $\mathbf{h}_i$ ortogonală vectorului de referință ${}^m\Delta\mathbf{F}$:

$$\mathbf{h}_i = {}^{(m+1)}\mathbf{R}^{(i)} - g_i \cdot {}^m\Delta\mathbf{F} \quad (5.183)$$

Dacă forțele neechilibrate ${}^{(m+1)}\mathbf{R}^{(i)}$ sau componenta ortogonală $\mathbf{h}_i$ satisfac criteriul de convergență, soluția estimată este acceptată, în caz contrar sunt necesare iterații suplimentare. Pentru asigurarea convergenței dispariția completă a componentei ortogonale $\mathbf{h}_i$ trebuie realizată în următoarele iterații, în timp ce dispariția integrală

a componenteii $g_i \cdot {}^m\Delta F$ nu este în mod obligatoriu necesară, întrucât intensitatea forțelor exterioare este tratată ca și o necunoscută în timpul procesului de calcul, fiind recalculată la fiecare nouă iterație. În cadrul iterațiilor de echilibrare încărcarea incrementală suplimentară aplicată este constituită din încărcarea ortogonală h_i și încărcarea $x_i \cdot {}^m\Delta F$ paralelă cu direcția încărcării de referință, unde x_i este un factor scalar de multiplicare determinat în urma rezolvării ecuației de constrângere (Crisfield, 1981):

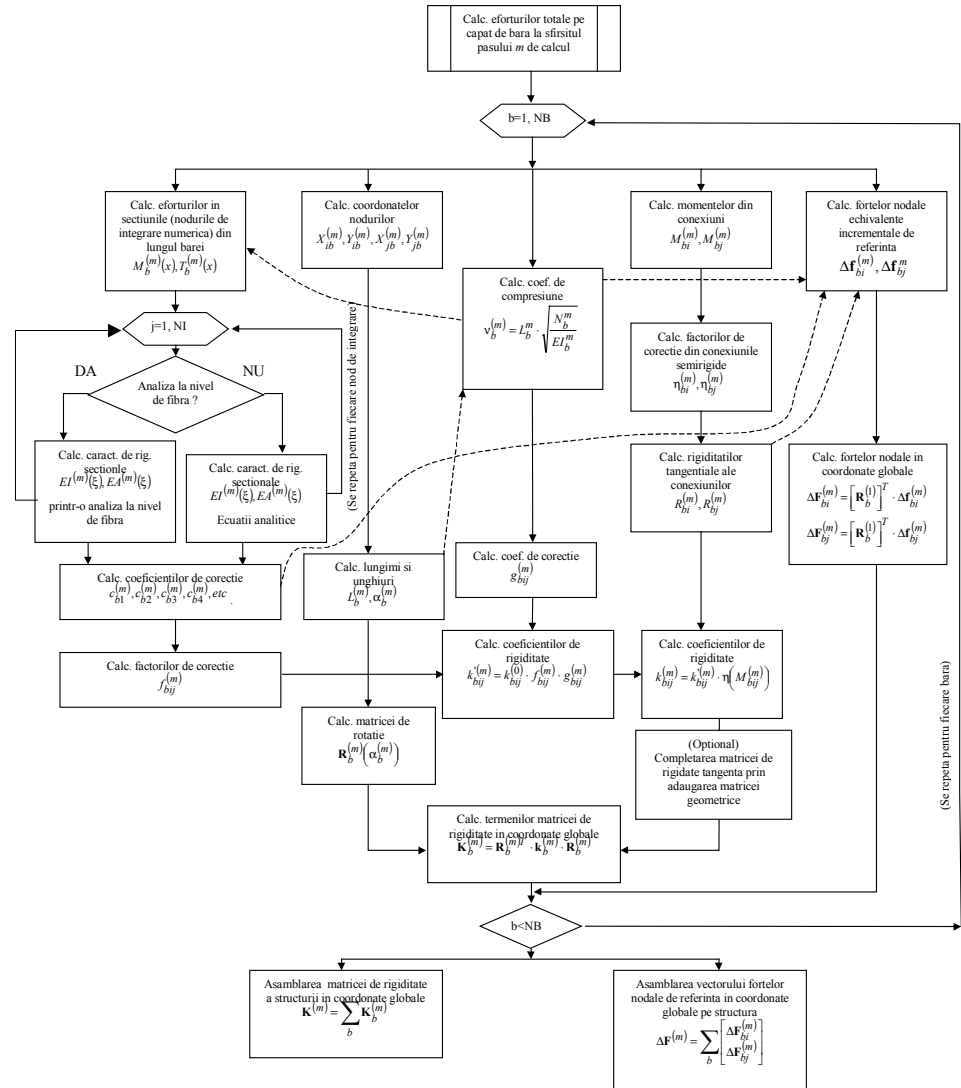


Fig. 5.26. Reactualizarea matricei de rigiditate și a vectorului forțelor echivalente la noduri.

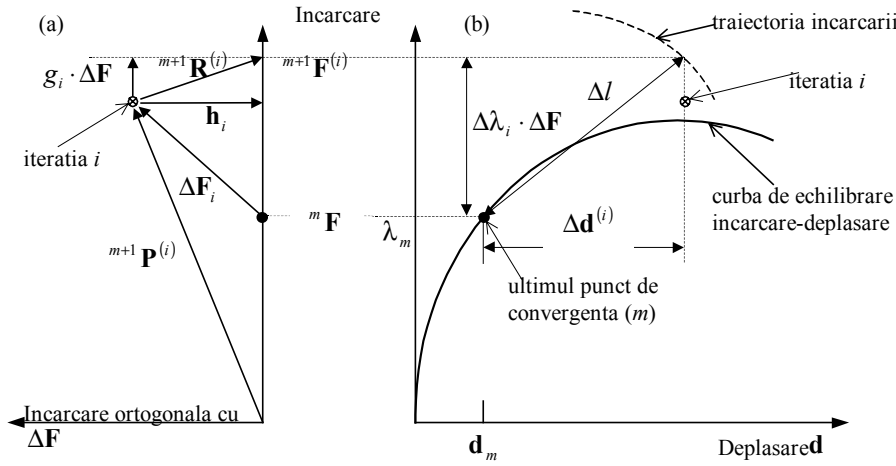


Fig. 5.27. Conducerea iterațiilor în metoda propusă.

$$\Delta \mathbf{d}^{(i)T} \cdot \Delta \mathbf{d}^{(i)} + A_0 \cdot \Delta \lambda_i^2 \cdot \Delta \mathbf{F}^T \cdot \Delta \mathbf{F} = \Delta l^2 \quad (5.184)$$

și care asigură în acest fel depășirea dificultăților legate de determinarea punctelor corespunzătoare încărcărilor limită și a celor de snap-throgh și snap-back ale curbei încărcare-deplasare.

Cunoscând matricea de rigiditate globală a structurii $\mathbf{K}_T$, reactualizată în funcție de starea de deformare și de eforturi corespunzătoare incrementului m de încărcare și păstrată constantă în timpul iterațiilor de echilibrare, deplasările incrementale nodale ale structurii vor fi determinate (estimate) pe baza următoarei relații de recurență:

$$\Delta \mathbf{d}^{(i+1)} = \Delta \mathbf{d}^{(i)} + \mathbf{K}_T^{-1} \cdot (x_i \cdot {}^m \Delta \mathbf{F} + \eta_i \cdot \mathbf{h}_i) = \Delta \mathbf{d}^{(i)} + x_i \cdot \delta \mathbf{F} + \eta_i \cdot \delta \mathbf{h}_i \quad (5.185)$$

unde $\delta \mathbf{F} = \mathbf{K}_T^{-1} \cdot {}^m \Delta \mathbf{F}$; $\delta \mathbf{h}_i = \mathbf{K}_T^{-1} \cdot \mathbf{h}_i$; η_i este un factor scalar considerat egal cu 1 pentru început.

Relația de recurență dintre două valori succesive ale vectorului forțelor exterioare aplicate asupra structurii este dată de următoarea relație:

$${}^{(m+1)} \mathbf{F}^{(i+1)} = {}^m \mathbf{F} + \Delta \mathbf{F}^{(i)} + x_i \cdot {}^m \Delta \mathbf{F} + \mathbf{h}_i \quad (5.186)$$

care coroborată cu relațiile (5.182)-(5.183) conduce la următoarea relație de recurență între două valori succesive ale factorului incremental de încărcare:

$$\Delta \lambda_{i+1} = \Delta \lambda_i - g_i + x_i \quad (5.187)$$

în care factorul x_i este guvernat de următoarea ecuație de constrângere:

$$\Delta l^2 = \Delta \mathbf{d}^{(i+1)T} \cdot \Delta \mathbf{d}^{(i+1)} + A_0 \cdot \Delta \lambda_{i+1}^2 \quad (5.188)$$

Parametrul scalar A_0 convertește toate mărimile la aceleași dimensiuni și este dat de următoarea expresie:

$$A_0 = \frac{\mathbf{d}_m^T \cdot \mathbf{d}_m}{\lambda_m^2} \quad (5.189)$$

unde λ_m reprezintă factorul de încărcare total, la limita configurației m de echilibru.

În continuare, substituind relațiile (5.187) și (5.185) în ecuația (5.184) rezultă următoarea ecuație de gradul al II-lea în necunoscuta x_i :

$$a \cdot x_i^2 + 2 \cdot b \cdot x_i + c = 0 \quad (5.190)$$

unde:

$$\begin{aligned} a &= A_0 + \delta \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F} \\ b &= A_0 \cdot (\Delta \lambda_i - g_i) + \delta \mathbf{F}^T \cdot (\Delta \mathbf{d}^{(i)} + \eta_i \cdot \delta \mathbf{h}_i) \\ c &= A_0 \cdot (\Delta \lambda_i - g_i)^2 - \Delta l^2 + (\Delta \mathbf{d}^{(i)} + \eta_i \cdot \delta \mathbf{h}_i)^T \cdot (\Delta \mathbf{d}^{(i)} + \eta_i \cdot \delta \mathbf{h}_i) \end{aligned} \quad (5.191)$$

Termenii din relația (5.191) pot fi calculați pe baza informațiilor de la sfârșitul iterației i , iar necunoscuta x_i este astfel determinată prin rezolvarea ecuației (5.190), valorile deplasărilor de triere și ale factorului incremental de încărcare, corespunzătoare iterației $i+1$, fiind astfel determinate pe baza relației (5.185) respectiv (5.187). În general ecuația (5.190) are soluții în mulțimea numerelor reale, soluția x_i va fi cea corespunzătoare valorii minime a produsului $\Delta \mathbf{d}^{(i+1)T} \cdot \Delta \mathbf{d}^{(i)}$ calculat pentru cele două valori posibile $x_{i1,2}$ rezultate (Crisfield 1981). În cazul în care ecuația (5.190), pentru $\eta_i = 1$ nu poate fi rezolvată în mulțimea numerelor reale, este utilizată o metoda propusă de Lam și Morley (Lam & Morley, 1990), bazată pe tehnica de căutare a falsei poziții, pentru calcularea unui nou factor η_i care să corespundă unui discriminant nenegativ, $b^2 - ac \geq 0$, pentru ecuația (5.190):

$$\begin{aligned} & \left[A_0 \cdot (\Delta \lambda_i - g_i) + \delta \mathbf{F}^T \cdot (\Delta \mathbf{d}^{(i)} + \eta_i \cdot \delta \mathbf{h}_i) \right]^2 - (A_0 + \delta \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F}) \times \\ & \times \left[A_0 \cdot (\Delta \lambda_i - g_i)^2 - \Delta l^2 + (\Delta \mathbf{d}^{(i)} + \eta_i \cdot \delta \mathbf{h}_i)^T \cdot (\Delta \mathbf{d}^{(i)} + \eta_i \cdot \delta \mathbf{h}_i) \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (5.192)$$

Regrupând și ordonind termenii după puterile lui η_i în relația (5.192), condiția de discriminat nenegativ este rescrisă în modul următor:

$$V = a' \cdot \eta_i^2 + 2 \cdot b' \cdot \eta_i + c' \leq 0 \quad (5.193)$$

unde:

$$\begin{aligned} a' &= (A_0 + \delta \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F}) \cdot (\delta \mathbf{h}_i^T \cdot \delta \mathbf{h}_i) - (\delta \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{h}_i)^2 \\ b' &= (A_0 + \delta \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F}) \cdot (\Delta \mathbf{d}_i^T \cdot \delta \mathbf{h}_i) - [A_0 \cdot (\Delta \lambda_i - g_i) + \delta \mathbf{F}^T \cdot \Delta \mathbf{d}^{(i)}] \cdot (\delta \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{h}_i) \\ c' &= (A_0 + \delta \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F}) \cdot \left[(\Delta \mathbf{d}^{(i)T} \cdot \Delta \mathbf{d}^{(i)}) - \Delta l^2 \right] - [2 \cdot A_0 \cdot (\Delta \lambda_i - g_i) + \delta \mathbf{F}^T \cdot \Delta \mathbf{d}^{(i)}] \cdot \delta \mathbf{F}^T \cdot \Delta \mathbf{d}^{(i)} + \\ & + A_0 \cdot (\Delta \lambda_i - g_i)^2 \cdot (\delta \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F}) \end{aligned} \quad (5.194)$$

Termenii ce intră în expresiile coeficienților a' , b' și c' din cadrul relațiilor de mai sus, sunt calculați de asemenea pe baza informațiilor obținute la sfârșitul iterației i ,

o parte dintre aceștia fiind deja calculați și utilizați la formularea ecuației (5.190). Domeniul valorilor parametrilor pentru care V ia valori nepozitive este delimitat de rădăcinile ecuației $V=0$. În cazul în care această ecuație admite rădăcini reale, fie acestea $\eta_1, \eta_2, \eta_2 > \eta_1$, o valoare posibilă pentru parametrul η_i este obținută în modul următor (Fig. 5.28):

$$\begin{aligned} \eta_i &= \eta_2 - \xi, \text{ dacă } \eta_2 < 1,0 \\ \eta_i &= \eta_2 + \xi, \text{ dacă } -\frac{b'}{a'} < 1,0 < \eta_2 \\ \eta_i &= \eta_1 - \xi, \text{ dacă } -\frac{b'}{a'} > 1,0 > \eta_1 \\ \eta_i &= \eta_1 + \xi, \text{ dacă } 1,0 < \eta_1 \end{aligned} \quad (5.195)$$

unde s-a notat:

$$\xi = 0,05 \cdot |\eta_2 - \eta_1| \quad (5.196)$$

iar pentru conveniență și simplitate alegându-se valori apropiate de valoarea 1,0. În continuare cu noua valoare a parametrului η_i se revine la ecuația (5.190) obținând de data aceasta rădăcini reale.

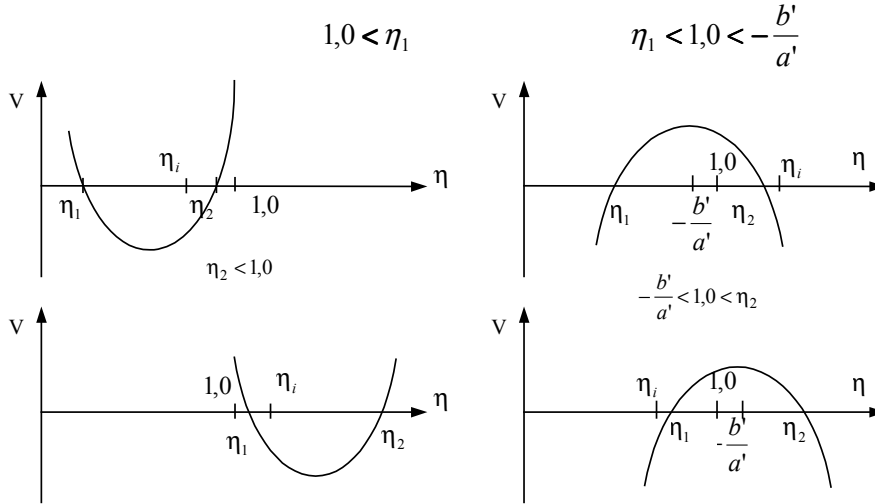


Fig. 5.28. Alegerea parametrului η_i .

În cazul în care ecuația $V=0$ nu poate fi rezolvată în mulțimea numerelor reale, se recurge la o soluție pentru eliminarea componentei $\mathbf{h}_i$ a încărcării exterioare neechilibrate. Astfel vectorul deplasărilor incrementale, este calculat pe baza următoarei relații:

$$\Delta \mathbf{d}^{rc} = \Delta \mathbf{d}^{(i)} + \delta \mathbf{h}_i \quad (5.197)$$

vectorul forțelor nodale interne incrementale ale structurii $\Delta \mathbf{P}^{rc}$ fiind la rândul lui

reevaluat pe baza deplasărilor totale astfel determinate $\mathbf{d}_m + \Delta \mathbf{d}^{rc}$. În continuare se calculează factorul de încărcare incremental:

$$\Delta \lambda^{rc} = \frac{\Delta \mathbf{P}^{rc} \cdot \Delta \mathbf{F}}{\Delta \mathbf{F}^T \cdot \Delta \mathbf{F}} \quad (5.198)$$

iar lungimea de arc este calculată pe baza următoarei relații:

$$\Delta l^{rc} = \sqrt{(\Delta \mathbf{P}^{rc})^T \cdot \Delta \mathbf{P}^{rc} + A_0 \cdot (\Delta \lambda^{rc})^2} \quad (5.199)$$

Pentru a reveni la lungimea de arc Δl specificată la începutul pasului m este utilizat următorul factor de scală:

$$\mu = \frac{\Delta l}{\Delta l^{rc}} \quad (5.200)$$

noile estimări ale deplasărilor incrementale și ale factorului incremental de încărcare fiind determinate în continuare pe baza relațiilor:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{d}^{(i+1)} &= \mu \cdot \Delta \mathbf{d}^{rc} \\ \Delta \lambda_{i+1} &= \mu \cdot \Delta \lambda^{rc} \end{aligned} \quad (5.201)$$

Există două situații particulare pentru care estimarea deplasărilor incrementale și ale factorului incremental de încărcare este realizată urmând un alt procedeu decât cel prezentat. Aceste situații sunt prezentate în continuare și corespund primei iterații de la punctul de convergență respectiv la formularea soluției în origine.

a) Prima iterație de la punctul de convergență

În cadrul incrementului $m+1$ de încărcare, prima estimare a vectorului deplasărilor incrementale și ale factorului incremental de încărcare este dată de următoarele relații:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{d}^{(1)} &= \mu_1 \cdot {}^m \Delta \mathbf{d}^{ultim} \\ \Delta \lambda_1 &= \mu_1 \cdot {}^m \Delta \lambda^{ultim} \end{aligned} \quad (5.201)$$

unde:

$$\mu_1 = \frac{\Delta l}{\sqrt{({}^m \Delta \mathbf{d}^{ultim})^T \cdot ({}^m \Delta \mathbf{d}^{ultim}) + A_0 \cdot ({}^m \Delta \lambda^{ultim})^2}} \quad (5.202)$$

iar ${}^m \Delta \mathbf{d}^{ultim}$ respectiv ${}^m \Delta \lambda^{ultim}$ reprezintă vectorul deplasărilor incrementale respectiv factorul incremental de încărcare corespunzător echilibrului realizat la finele iterațiilor din cadrul ciclului m de încărcare.

b) Formularea soluției în origine

Pentru definirea lungimii de arc, la startul analizei, factorul inițial incremental de încărcare ${}^{(1)} \Delta \lambda$ trebuie să fie specificat. Mai mult, în origine atât (5.189) cât și

(5.201) sunt nedefinite. Considerând un punct de convergență apropiat de origine astfel încât λ_m și $\mathbf{d}_m$ sunt mici, iar efectele neliniarităților fizice și geometrice sunt neglijabile, avem:

$$\mathbf{d}_m = \lambda_m \cdot \mathbf{K}^{-1} \cdot \Delta \mathbf{F} = \lambda_m \cdot \delta \mathbf{F} \quad (5.203)$$

$$A_0 = \delta \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F} \quad (5.204)$$

Vectorul deplasărilor incrementale, corespunzătoare primului pas al analizei este determinat pe baza următoarei relații:

$$\Delta \mathbf{d}_1 = \Delta \lambda_1 \cdot \delta \mathbf{F} \quad (5.206)$$

Astfel relația (5.188) devine:

$$\Delta l^2 = \Delta \mathbf{d}_1^T \cdot \Delta \mathbf{d}_1 + A_0 \cdot \Delta \lambda_1^2 = 2 \cdot \Delta \lambda_1^2 \cdot \delta \mathbf{F}^T \cdot \delta \mathbf{F} \quad (5.207)$$

Lungimea de arc Δl din relația de mai sus este utilizată pentru iterațiile în apropierea originii, fiind reactualizată (mărită sau micșorată) în continuare pe parcursul celorlalte trepte de încărcare, în funcție de viteza de convergență. Ajustarea lungimii de arc pe parcursul incrementelor de încărcare este realizată pe baza relației propuse de Ramm (Ramm, 1981):

$$\Delta l = \sqrt{\frac{I^d}{I^{ultim}}} \cdot \Delta l^{ultim} \quad (5.208)$$

unde I^d reprezintă numărul iterațiilor propuse (dorite) pentru realizarea convergenței, I^{ultim} și Δl^{ultim} fiind numărul actual de iterații necesar respectiv lungimea de arc utilizată la finele pasului anterior de calcul.

În continuare iterațiile continuă conform procedurii expus anterior, pâna la satisfacerea unui criteriu de convergență și disiparea integrală a forțelor neechilibrate sau cel puțin a componentei ortogonale. Criteriul de convergență este exprimat prin raportul dintre norma asociată produsului scalar al forțelor neechilibrate e_i și cea corespunzătoare forțelor nodale de referință, conform următoarei relații:

$$\frac{\sqrt{\Delta \mathbf{e}_i^T \cdot \Delta \mathbf{e}_i}}{\Delta \lambda_i \cdot \sqrt{\Delta \mathbf{F}^T \cdot \Delta \mathbf{F}}} \leq \varepsilon \quad (5.209)$$

unde cu ε s-a notat toleranța de închidere.

Factorul de încărcare total la limita etapei $(m+1)$ de calcul este $\lambda_{m+1} = \lambda_m + \Delta \lambda_i$, procedeul aplicându-se în mod repetat, trecând de la o etapă la alta, până se ajunge la stadiul de cedare global al structurii (determinarea încărcării limită corespunzătoare echilibrului stabil) sau la stadiul corespunzător unei deformabilități exagerate a structurii (studiul echilibrului post critic). În figura 5.29 se prezintă schema bloc a algoritmului prezentat.

5.9.3. Particularități de implementare

Pe baza algoritmilor prezentați în cadrul paragrafului anterior s-a realizat un

program de calcul performant (**NEFCAD**) pentru analiza elasto-plastică de ordinul al II-lea a structurilor în cadre plane și spațiale din oțel și din beton armat. Programul a fost dezvoltat de autor, într-o primă fază, în limbajul de programare Turbo-Pascal 7.0 respectiv C++, pentru sistemul de operare DOS 6.2, în maniera de programare orientată pe obiecte. Programul a fost rescris ulterior în mediul de programare Visual Basic 5.0, pentru sistemul de operare Windows posedând multe facilități noi și îmbunătățiri față de versiunea precedentă. Astfel noua aplicație utilizând proprietățile de modularitate și segmentare, facilitățile deosebite oferite de mediul de programare cu privire la gestionarea memoriei, crearea și gestionarea bazelor de date, stilul de programare orientat spre obiecte și condus de evenimente, contribuie la o corectă structurare și modularizare a programului pentru implementarea algoritmilor prezentați, asigurând totodată o fiabilitate și predictibilitate crescută a programului în timpul execuției lui. Aplicația creată utilizează o interfață grafică utilizator (GUI), fiind o aplicație cu interfață multi-document, oferind utilizatorului facilități deosebite pentru pre și post procesarea datelor referitoare la descrierea structurii și prezentarea rezultatelor furnizate de program în urma analizei, într-o formă atractivă.

Programul realizat poate fi utilizat atât în varianta "*științifică*" (modelarea neliniarității fizice la nivel de fibră) aplicabil în cercetare pentru studii de comportare și calibrare, precum și în varianta *cu aplicabilitate directă* (modelarea neliniarității fizice la nivel de secțiune) în practica de proiectare a structurilor.

Datele de intrare necesare calculului se referă, în principal, la următoarele caracteristici:

- *Topologice* : nr. bare, nr. noduri, conectivitatea barelor în noduri, tipul de legături cu terenul.
- *Geometrice*: coordonatele globale ale nodurilor.
- *Secționale*: dimensiuni geometrice, arii, momente de inerție ale secțiunilor barelor.
- *Materiale*: moduli de elasticitate, rezistențe de calcul, parametrii de modelare a comportării neliniare a materialului structurii. În versiunea actuală programul utilizează următoarele curbe caracteristice pentru modelarea neliniarității fizice:
 - la nivel de fibră: curbe caracteristice σ - ϵ pentru metal și beton propuse de codurile de proiectare în vigoare (EC3, EC2, etc)
 - la nivel de secțiune: curbele caracteristice M-N- Φ (N-M- ϵ) prezentate în cadrul capitolului 4. Programul dispune de asemenea de un interpretor pe baza căruia se pot defini curbe M- Φ , formate dintr-o succesiune de variații liniare, definite de utilizator.
- *Comportare a conexiunilor semirigide*: rigiditățile inițiale, momentele limită capabile, parametri de comportare neliniară în relațiile moment-rotire.
- *Forțe exterioare*: puncte (lungimea) de aplicație, valoare, direcții de acțiune. Încărcări proporționale sau neproporționale: în cazul unor încărcări neproporționale încărcările definite constante (înc.

gravitaționale) în timpul aplicării încărcărilor monotone (crescătoare sau descrescătoare) fac parte din secvențe de încărcare diferite, lansate succesiv în execuție.

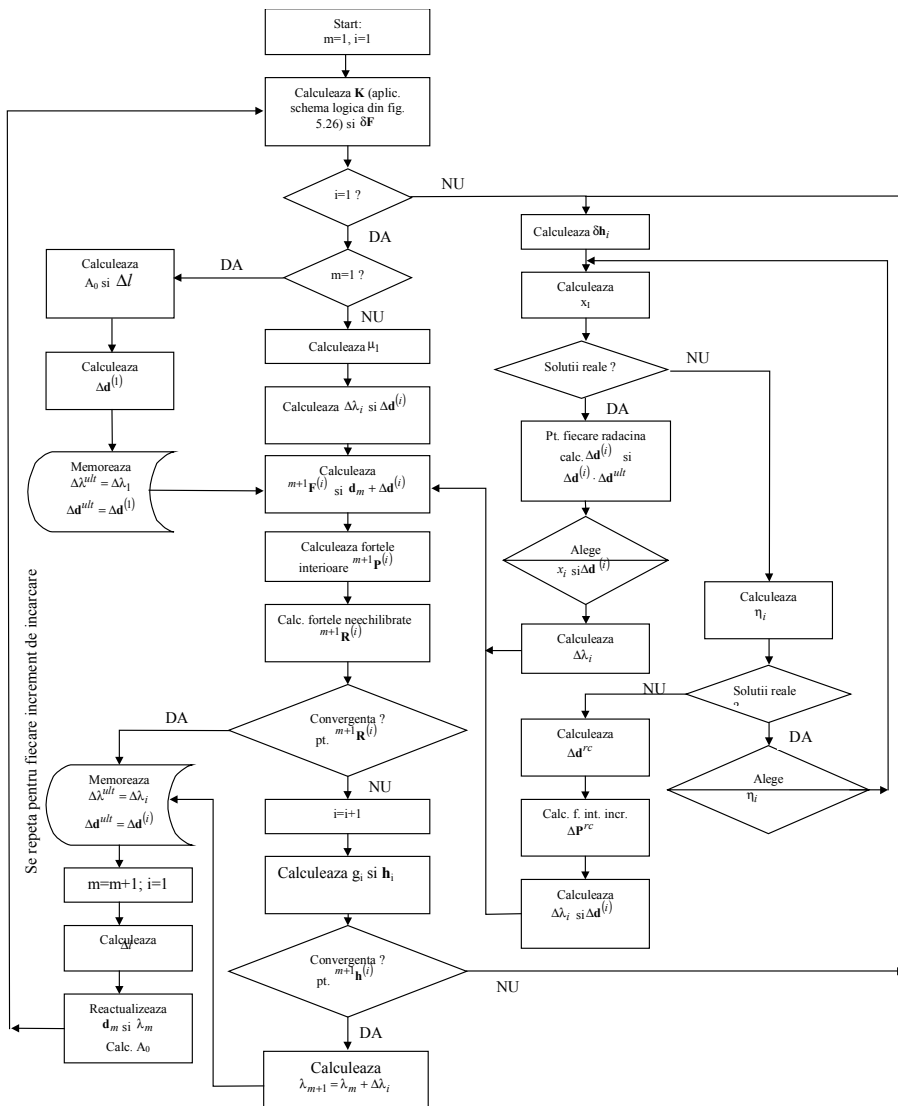


Fig. 5.29. Schema logică a algoritmului de calcul.

-*Calcul*: elastic/elasto-plastic, de ordinul I/ ordinul II, noduri rigide/flexibile; modalitatea de conducere a rezolvării: simplu incremental (Euler), incremental-iterativ (Newton-Raphson), incremental iterativ (metoda propusă); metoda de integrare numerică utilizată (Simpson-simplu, Simpson-recursiv, Gauss-Legendre, Gauss-Lobatto).

Datele de ieșire se referă la:

- *Incarcarea limită*: Factorul limită de încărcare corespunzător colapsului structurii (matrice de rigiditate singulară).
- *Eforturi*: Afișarea în mod text și grafic a valorilor eforturilor pe capăt de bara și în secțiunile (specificate) din lungul barelor, corespunzătoare încărcării limită sau intermediare acesteia. De asemenea sunt reprezentate grafic variația eforturilor (N , M , T) de la capetele barelor,
- începând de la prima treaptă de încărcare și până la oprirea analizei.
- *Deplasări*: Afișarea valorilor deplasărilor nodurilor structurii corespunzătoare încărcării limită sau intermediare acesteia. Reprezentarea grafică a deformatelor structurii, începând cu prima treaptă de încărcare și până la oprirea analizei. Reprezentarea grafică a curbelor încărcare-deplasare, pentru fiecare nod/grad de libertate al structurii.
- *Plastificarea secțiunilor*: Reprezentarea grafică a pozițiilor și ordinea de formare a secțiunilor complet plastificate; Distribuția procentuală a secțiunilor plastificate din lungul barelor (vizualizarea zonelor plastice din lungul barelor și pe înălțimea secțiunii).

Programul folosește o procedură de alocare dinamică a memoriei necesare rulării, în funcție de complexitatea structurii analizate. Dimensiunile structurii care poate fi analizată sunt limitate numai de memoria disponibilă (RAM + swapfile). Matricea de rigiditate a structurii este stocată în formă de bandă, numărul de elemente ale matricii fiind de $N \times LSB$, unde N reprezintă numărul total al gradelor de libertate ale structurii, iar LSB reprezintă lățimea de semibandă. Rezolvarea sistemului de ecuații liniar, la fiecare pas al analizei, efectuându-se prin metoda eliminării Gauss, cu matrice bandă a coeficienților sistemului.

Detalii cu privire la structurarea, rularea, pre și post-procesarea datelor, în pachetul de programe *NEFCAD* sunt prezentate în Anexa 1.

5.10. EXEMPLE NUMERICE DE TESTARE A PROGRAMULUI DE CALCUL

Principalele caracteristici prin care se evidențiază modelul de calcul propus și programul de calcul realizat se referă la: (1) posibilitatea modelării comportării elasto-plastice a barelor structurii în ipoteza plastificării distribuite respectiv a formării zonelor plastice și surprinderea acestor efecte asupra comportării de ansamblu, evitând în același timp discretizarea exagerată a barelor structurii, specifică metodelor de calcul cunoscute până în prezent, prin considerarea fiecărei bare ca un singur element, reducând sensibil memoria-calculator solicitată precum și timpul și volumul calculelor, și (2) posibilitatea de modelare completă a comportării structurale, corespunzătoare unui echilibru stabil, respectiv instabil al structurilor, prin surprinderea porțiunii de curbă perfect orizontală și descrescătoare, de comportare. Totodată, obligativitatea de modelare a forțelor din cuprinsul barelor ca forțe concentrate, în nodurile adițional generate din lungul barei specifică majorității metodelor de calcul neliniar cunoscute, este eliminată de

modelul de calcul propus, prin transferarea forțelor din cuprinsul barei în forțe nodale echivalente la capetele ei, variabile de la un ciclu de calcul la altul, în funcție de rigiditatea barei.

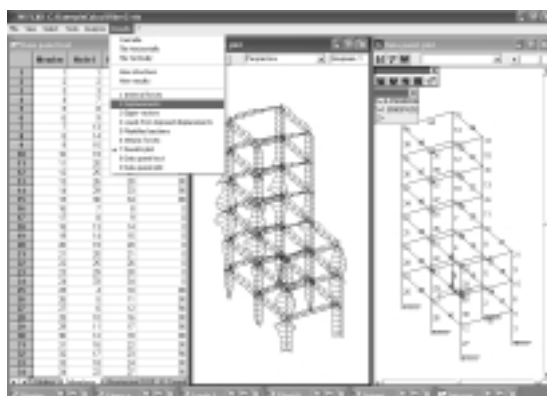


Fig. 5.30. (a) Mediul de lucru.

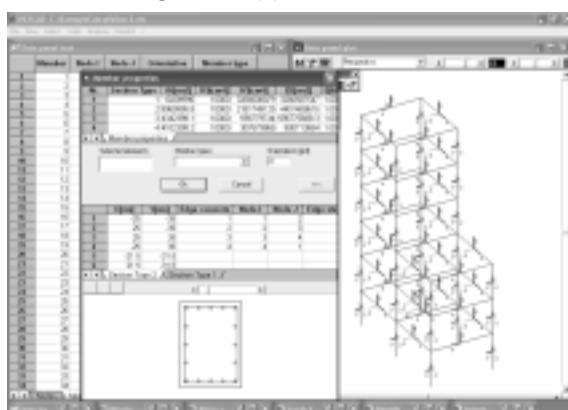


Fig. 5.30. (b) Definirea caracteristicilor secționale

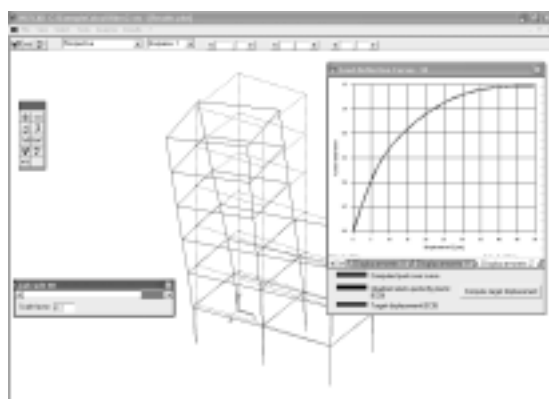
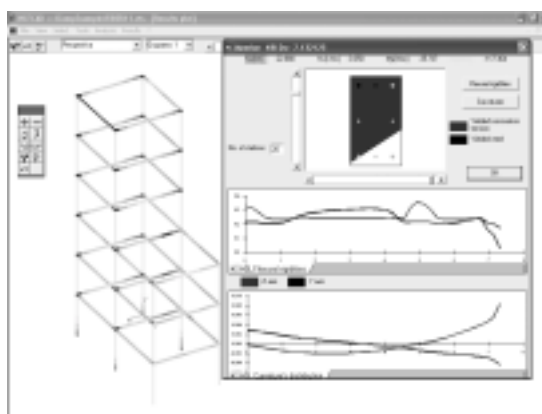


Fig. 5.30. (c) Reprezentarea grafică a deformatiei



(d) Distribuția zonelor plastice.

Fig. 5.30. NEFCAD -capturi ecran.

Evidențierea elocventă a sensibilității metodei de calcul propuse, în surprinderea acestor caracteristici, s-a făcut în cazul unor "structuri de test" cu grad mic de nedeterminare statică, sensibile la efectele dezvoltărilor zonelor plastice în lungul barelor.

Exemplul nr. 1

Se consideră cazul unei grinzi simplu rezemată la capete, realizată dintr-un profil W8x31 ($E=200\text{kN/mm}^2$, $\sigma_c=250\text{N/mm}^2$) încărcată cu o forță uniform distribuită pe toată lungimea ei. Caracteristicile geometrice și materiale ale grinzii sunt prezentate în figura 5.31.

S-au efectuat următoarele analize cu programul NEFCAD: o analiză elasto-plastică, simulând formarea articulațiilor plastice, alegând pentru parametrii curbei Ramberg-Osgood, valorile $a=1$, $n=600$; o analiză elasto-plastică, modelând comportarea elasto-plastică a secțiunilor barei pe baza relațiilor (5.33-5.34), considerând două valori pentru mărimea tensiunii reziduale maxime de compresiune (v. fig. 4.8.b) și anume $\sigma_{rc}=0,333\sigma_c$, respectiv $\sigma_{rc}=0,80\sigma_c$; o analiză elasto-plastică, cu formarea zonelor plastice în secțiune și în lungul barei, modelarea neliniarității fizice a materialului realizându-se la nivel de fibră, utilizând în acest scop relațiile constitutive σ - ϵ prevăzute de codul EC3, iar distribuția și valoarea tensiunilor reziduale în secțiune s-a luat de asemenea conform prevederilor EC3 (v. fig. 4.8.a) În toate cazurile analizate s-a utilizat un singur element la discretizarea barei.

În figura 5.31 sunt prezentate curbele încărcare-rotire, pentru capătul din

dreapta al barei, în ipoteza formării de articulații plastice respectiv în ipoteza plastificării distribuite, iar în figura 5.32 este prezentată distribuția procentuală a secțiunilor plastificate din lungul barei, considerând separat fibrele întinse respectiv comprimate intrate în curgere.

După cum era de așteptat, toate analizele efectuate semnalează același factor

limită de încărcare, $\frac{q}{q_{pl}} = 1,0$, unde $q_{pl} = \frac{8 \cdot M_{pl}}{L^2}$, iar secțiunea cu procent total

maxim de plastificare (98,7%) se află la mijlocul grinzii, în secțiunea de formare a articulației plastice. Efectul tensiunilor reziduale, se manifestă în acest caz, după cum era de așteptat, printr-o scădere graduală a rigidității barei (de la valoarea inițială corespunzătoare comportării perfect elastice la cea corespunzătoare formării mecanismului de cedare), și care este mai aproape de comportarea reală a structurilor metalice, spre deosebire de cazul formării articulațiilor plastice, unde aceasta tranziție este bruscă.

De remarcat eficiența algoritmului incremental-iterativ descris anterior, pe baza căruia a fost condusă analiza în cazul de față, în surprinderea comportării postcritice, și în urma căruia a fost posibilă evidențierea porțiunii de curbă încărcare-rotire, perfect orizontală, de comportare. Totodată acest exemplu scoate pregnant în evidență, sensibilitatea metodei la apariția zonelor plastice din cuprinsul barei, respectiv la formarea articulației plastice din mijlocul ei, fără a fi necesară o discretizare suplimentară a barei, corecția termenilor matricei de rigiditate și a vectorului forțelor nodale de referință, realizându-se prin intermediul coeficienților de corecție, prezentați în cadrul paragrafului 5.4.2. Un rol esențial în acuratețea metodei de calcul propusă, îl joacă metoda numerică de integrare folosită la evaluarea coeficienților de corecție. În analizele efectuate mai sus, s-a utilizat metoda numerică Simpson-repetat (aplicarea formulei Simpson pe un număr tot mai mare de subintervale, pâna la atingerea toleranței de calcul impuse, $TOL=1E-5$, între două evaluări succesive ale integralelor). În această metodă numerică "exactă" se ajunge în mod frecvent la generarea unui număr mare de puncte de integrare, (în cazul de față pentru satisfacerea preciziei impuse a fost necesar în unele situații generarea unui număr de 50 de subintervale, 51 de puncte de integrare), conducând astfel la mărirea drastică a timpului de calcul și a volumului calculelor, mai cu seamă în cazul analizei efectuate în ipoteza formării zonelor plastice (analiza la nivel de fibră). Prin urmare s-a studiat posibilitatea utilizării unor metode numerice în care punctele de integrare și localizarea lor este dictată de maximizarea preciziei de calcul pentru un număr dat de puncte -metoda Gauss-, spre deosebire de metoda Simpson în care poziționarea punctelor de integrare se face liber, de regulă alegând subintervale de lungime egală. În cazul utilizării unor metode numerice de integrare, în care poziționarea punctelor se face pe criterii de maximizare a preciziei de calcul, trebuie ținut seama de specificul integranzilor din relațiile 5.46-5.47, care au variații mari în zonele plastic potențiale (în general, capetele și mijlocul barei), în comparație cu restul secțiunilor din lungul barei. Un studiu cu privire la eficiența metodelor de integrare numerică

Gauss-Lobatto, respectiv Gauss-Legendre este prezentat în continuare.

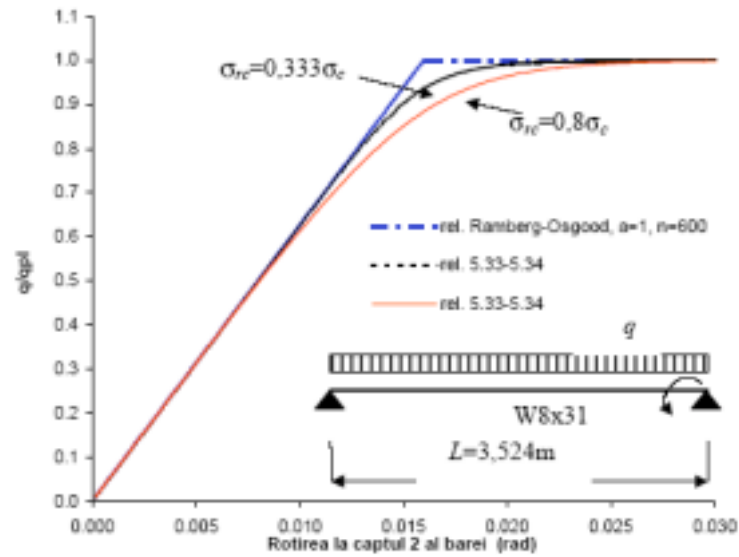


Fig. 5.31. Curbele încărcare-rotire.

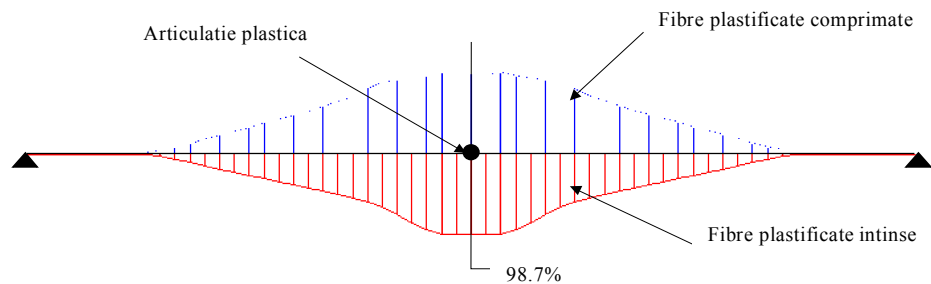


Fig. 5.32. Distribuția procentuală a secțiunilor plastificate în lungul barei.

În figura 5.34 sunt prezentate comparativ curbele încărcare-rotire, pentru capătul din dreapta al grinzii, în cazul utilizării metodei "exacte" Simpson-repetat, pentru efectuarea integralelor în lungul barei, respectiv utilizând metoda numerică Gauss-Lobatto, considerând un număr par respectiv impar de puncte de integrare. Se observă o bună concordanță între curba "exactă" obținută cu metoda Simpson-repetat, cu cea obținută prin utilizarea metodei Gauss-Lobatto, cu 9 puncte de integrare numerică. De asemenea, este de observat că, în cazul de față, datorită faptului că zona plastic potențială se afla la mijlocul grinzii (mijlocul intervalului $[-1,1]$), este nevoie de un număr par de puncte de integrare mult mai mare decât cel impar pentru o precizie asemănătoare, datorită faptului că în cazul unui număr par

de puncte de integrare, nu este prevăzut punct de integrare la jumătatea intervalului de integrat (mijlocul grinzii), în contrast cu cazul unui număr impar.

Eficiența metodei numerice de integrare Gauss-Lobatto față de metoda Gauss-Legendre va fi testată în următorul exemplu de calcul.

Se consideră cazul unei grinzi continue cu trei deschideri, cu o deschidere centrală de lungime $L=3,524\text{m}$ și două deschideri laterale αL , acționată de o forță uniform distribuită în lungul deschiderii centrale (fig. 5.33). Se observă că pentru $\alpha \rightarrow 0$ grinda continuă se transformă într-o grindă dublu încastrată în reazemele 2 și 3, în care caz zonele plastic potențiale sunt concentrate la capetele și la mijlocul grinzii centrale.

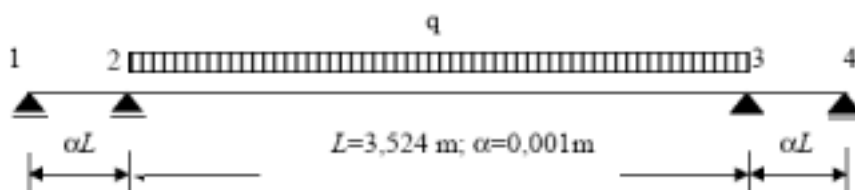


Fig. 5.33. Grinda continuă cu trei deschideri.

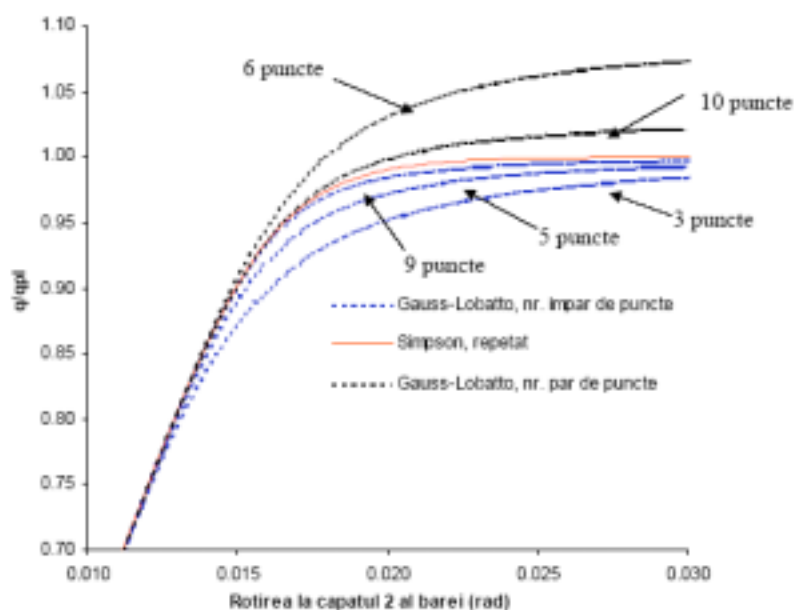


Fig. 5.34. Testarea metodei de cuadratură Gauss-Lobatto.

Un număr impar de puncte de integrare Gauss-Lobatto, acoperă în totalitate aceste

secțiuni, în timp ce un număr similar de puncte Gauss-Legendre omit capetele intervalului de integrare (capetele grinzii centrale), conducând, în acest caz, la erori semnificative la determinarea răspunsului neliniar. Curbele comparative încărcare-rotire, pentru capatul 3 al grinzii centrale, obținute utilizând aceste două metode numerice de integrare, precum și în cazul utilizării metodei Simpson-repetat sunt reprezentate grafic în figura. 5.35.

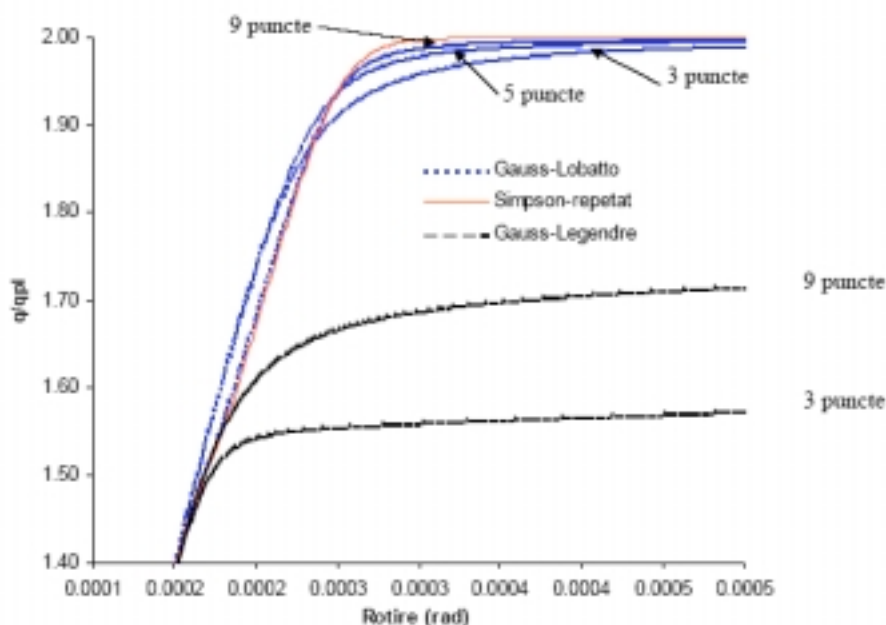


Fig. 5.35. Compararea metodelor de cuadratura Gauss-Lobatto și Gauss-Legendre (curbele încărcare-rotire pentru capătul 3 al grinzii centrale).

Comportarea elasto-plastică a secțiunilor din lungul barei a fost modelată pe baza relațiilor analitice 5.33-5.34 considerând $\sigma_{rc}=0,333\sigma_c$. În figura 5.36 sunt prezentate curbele comparative încărcare-rotire pentru capătul 3 al grinzii centrale, în ipoteza formării articulațiilor plastice ($a=1$, $n=600$), precum și în ipoteza comportării elasto-plastice a secțiunilor conform relațiilor 5.33-5.34, considerând două valori pentru tensiunile maxime de compresiune $\sigma_{rc}=0,333\sigma_c$, respectiv $\sigma_{rc}=0,80\sigma_c$, iar în figura 5.37 este prezentată distribuția procentuală a secțiunilor plastificate, considerând separat fibrele întinse respectiv comprimate intrate în curgere, din lungul barei, obținută la valoarea factorului limită de încărcare ($q/q_{pl}=2,0$), în ipoteza considerării formării zonelor plastice în secțiune și în lungul barei, relațiile constitutive neliniare σ - ϵ și distribuția tensiunilor reziduale pe înălțimea secțiunii fiind considerate în mod similar cu cel de la exemplul anterior. În aceste cazuri s-a utilizat metoda Simpson-repetat pentru calcularea coeficienților

de corecție.

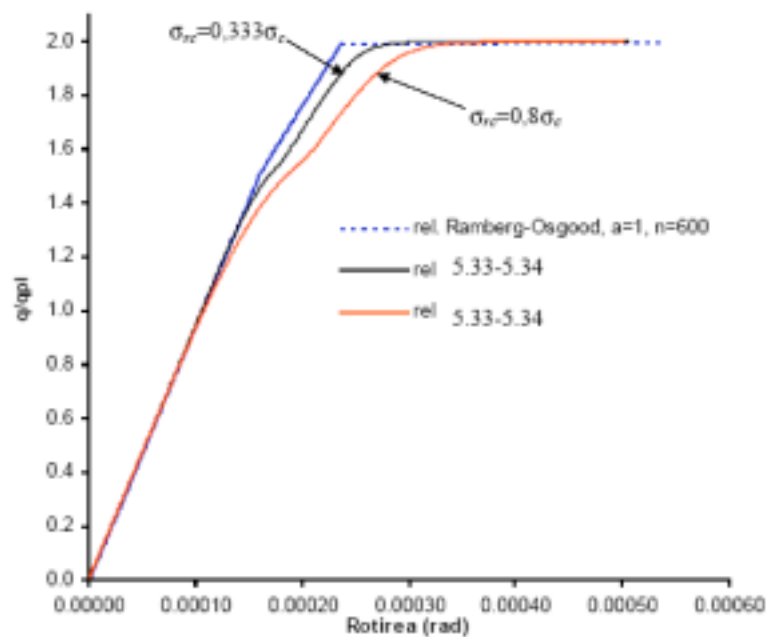


Fig. 5.36. Curbele încărcare rotire pentru capătul 3 al grinzii centrale.

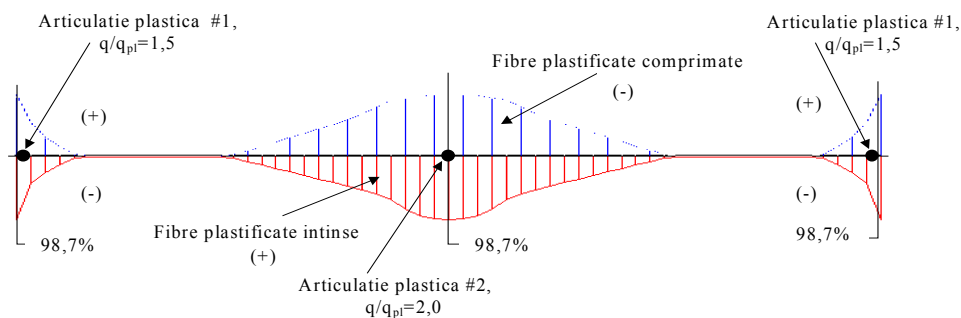


Fig. 5.37. Distribuția procentuală a secțiunilor plastificate în lungul grinzii centrale.

Exemplul nr. 2

În acest exemplu se testează sensibilitatea algoritmului descris la punctul 5.9.2 în surprinderea comportării postcritice a unei structuri pleoștite încărcate transversal dublu încastrate (Fig. 5.38). Caracteristicile geometrice, mecanice și de încărcare sunt prezentate în figura 5.38. În analiza neliniară geometrică efectuată

(neliniaritatea fizică a materialului s-a neglijat), barele s-au modelat cu un singur element, având secțiunea transversală de dimensiuni 1cm x 1cm.

S-au efectuat două analize, prima condusă pe baza metodei incremental-iterative cu corecții Newton-Raphson (pași controlați de încărcări), și cea de a doua pe baza algoritmului propus în prezenta lucrare, și descris la punctul 5.9.2 (pași controlați de lungimea de arc).

Așa cum era de așteptat trasarea curbei încărcare-deplasare verticală, în metoda incremental-iterativă cu corecții Newton Raphson, se oprește în apropierea primului punct corespunzător încărcării critice, în timp ce în cazul conducerii analizei în metoda pașilor controlați de lungimea de arc, se poate surprinde întreaga domeniul de comportare a structurii, trasându-se atât porțiunea descendentă a curbei, cât și surprinderea configurației stabile obținută după fenomenul de "*snap-through*" (Fig. 5.38).

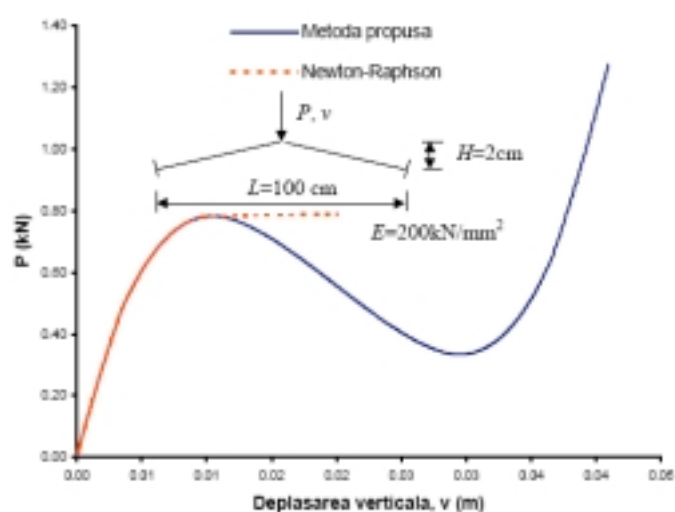


Fig. 5.38. Curbele încărcare-deplasare verticală.