

Metode Numerice

Inginerie Medicală, Bistrița

2019-2020

Ș.I. Dr. Ing. **Levente CZUMBIL**

Laboratorul de Cercetare în Metode Numerice
Departamentul de Electrotehnică, Inginerie Electrică

E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro

WebSite: <http://users.utcluj.ro/~czumbil>



Bibliografie

1. D.D. Micu, A. Ceclan: **Metode Numerice. Aplicații în Ingineria Electrica**, Ed. Mediamira, 2007. ISBN: 978-973-713-140-9
2. D.D. Micu, L. Czumbil, A. Ceclan, D. Csala: **Metode Numerice. Lucrări Practice**, Ed. Mediamira, 2010. ISBN: 978-973-713-278-9
3. J.F. Epperson, **An Introduction to Numerical Methods and Analysis**, 2nd edition, Ed. Willey, 2013. ISBN: 978-1-118-36759-9
4. G. Ciuprina, **Algoritmi Numerici pentru Calcule Științifice în Ingineria Electrică**, Ed. MatrixROM, 2013. ISBN: 978-606-25-0008-5
5. Ș. Kilyeni, **Metode Numerice. Aplicații în Energetică**, ediția a 4-a, Ed. Orizonturi Universitare, 2011. ISBN: 978-973-638-438-7
6. P.E. Brent Maxfield, **Essential MATHCAD for Engineering, Science and Math**, 2nd edition, Ed. Academic Press, 2011. ISBN: 978-0-12-374783-9
7. D.D. Micu, A. Cziker: **Aplicații ale metodelor numerice în electrotehnică**, Ed. Casa Cărții de Știință, Cluj-Napoca, 2002. ISBN: 978-686-317-4
8. M.N.O. Sadiku, **Numerical Techniques in Electromagnetics**, 2nd edition, Ed. CRC Press, 2000. ISBN: 978-148-222-578-5
9. PTC, **User's Guide Mathcad 14**, Parametric Technology Corporation, USA, 2007.

Curs 1

Utilizarea *Metodelor Numerice* în Aplicații Specifice *Ingineriei Electrice*

Ș.l. Dr. ing. Levente CZUMBIL

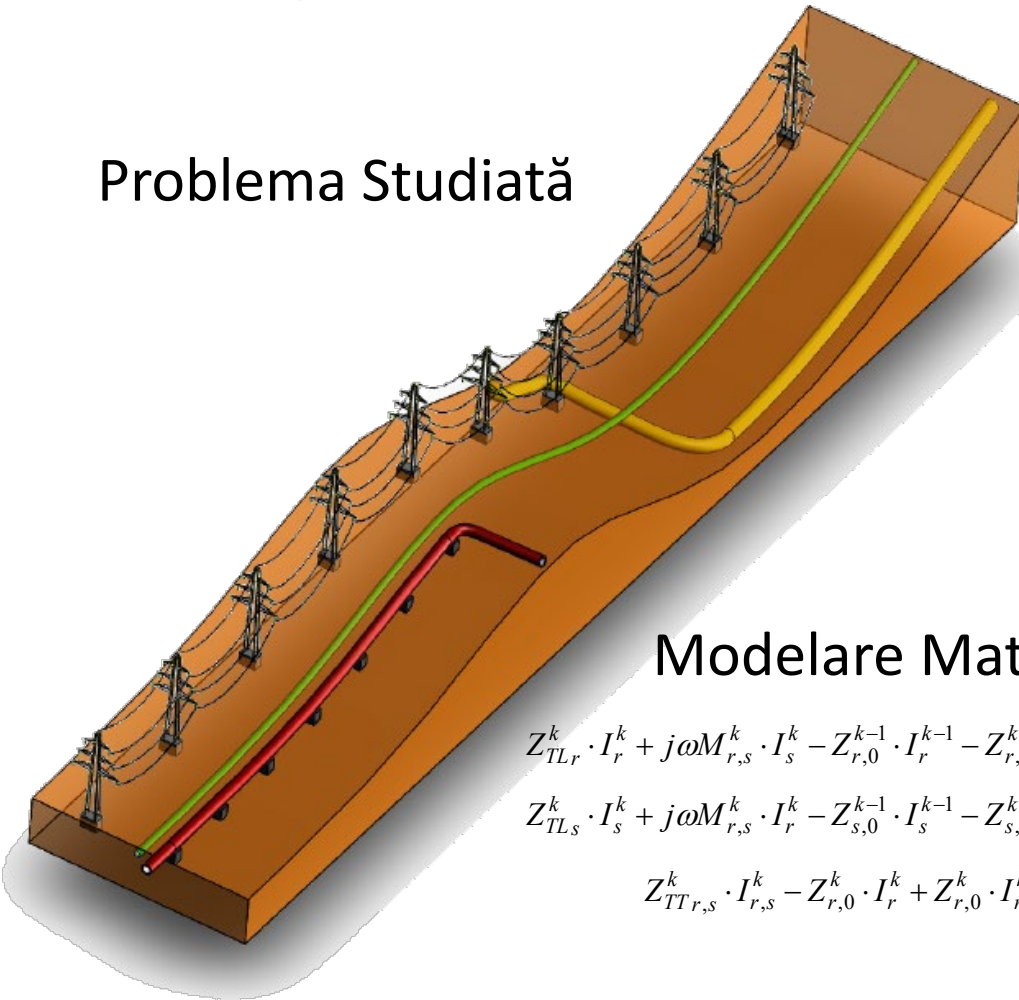
Laboratorul de Cercetare în Metode Numerice
Departamentul de Electrotehnică, Inginerie Electrică

E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro WebSite: <http://users.utcluj.ro/~czumbil>

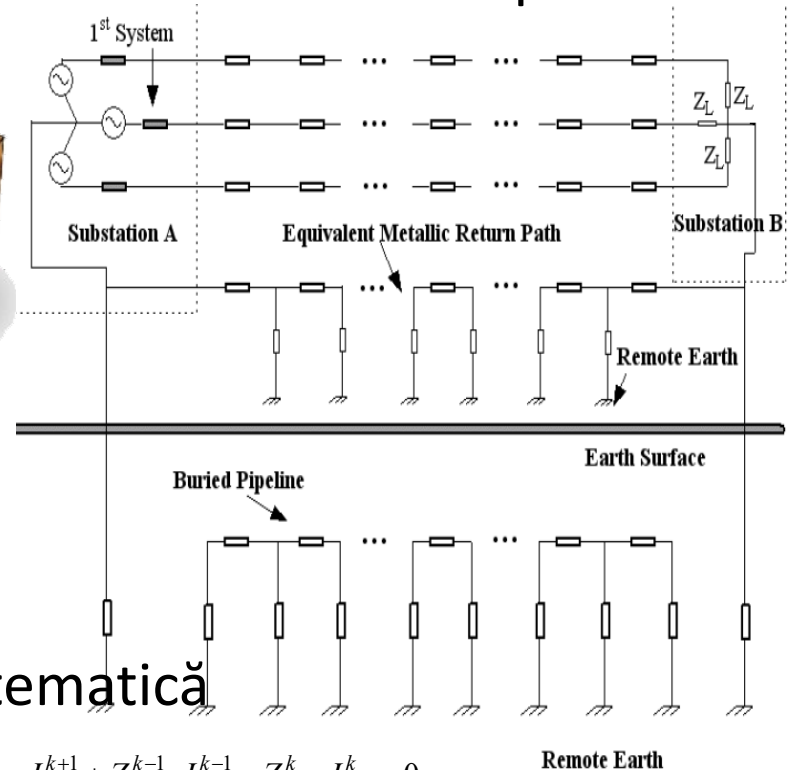


- Metode numerice?

Problema Studiată



Model Fizic Simplificat



Modelare Matematică

$$Z_{TLr}^k \cdot I_r^k + j\omega M_{r,s}^k \cdot I_s^k - Z_{r,0}^{k-1} \cdot I_r^{k-1} - Z_{r,0}^k \cdot I_r^{k+1} + Z_{r,0}^{k-1} \cdot I_{r,s}^{k-1} - Z_{r,0}^k \cdot I_{r,s}^k = 0$$

$$Z_{TLs}^k \cdot I_s^k + j\omega M_{r,s}^k \cdot I_r^k - Z_{s,0}^{k-1} \cdot I_s^{k-1} - Z_{s,0}^k \cdot I_s^{k+1} - Z_{s,0}^{k-1} \cdot I_{r,s}^{k-1} + Z_{s,0}^k \cdot I_{r,s}^k = 0$$

$$Z_{TT,r,s}^k \cdot I_{r,s}^k - Z_{r,0}^k \cdot I_r^k + Z_{r,0}^k \cdot I_r^{k+1} + Z_{s,0}^k \cdot I_s^k - Z_{s,0}^k \cdot I_s^{k+1} = 0$$

Metode Numerice

$$[I^k] = [A1^k] + [A2^k] \cdot [I^{k+1}]$$

Rezolvare a unei Probleme de IE

Formularea Problemei (P)

date cunoscute (date); necunoscute (soluții); lege de legătură (date-soluții)



Descrierea Problemei (P) – Model Matematic (M(P))



Aproximare M(P) – printr-o Metodă Numerică (MN(P))



Dezvoltarea/Identificarea
unui algoritm
pentru MN(P)



Implementare algoritmului
într-un program de calcul
(**MathCad**, Matlab, Mathematica)
etc.

Obiectivul Principal

Determinarea algoritmilor care rezolvă o problemă numerică într-un timp minim și cu o acuratețe (precizie) maximă

Pentru un model matematic **rezolvabilitatea** cere ca problema matematică asociată să fie:

- a) **bine pusă**: existența, unicitatea, stabilitatea soluției;
- b) **bine condiționată**: la mici variații ale datelor (**erori experimentale** sau **erori de rotunjire** în reprezentarea numerică a datelor) corespund mici variații ale rezultatelor.

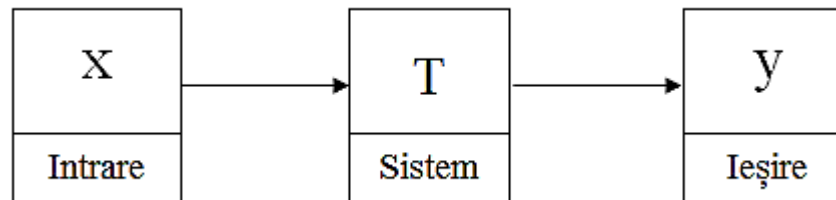
În metodele de analiza numerică se disting două aspecte:

1. **Metodologia** : tratează construcția algoritmilor specifici, eficiența lor, implementarea pe un calculator (aspect practic);
2. **Analiza** : studiază și estimează erorile și convergența metodelor (aspect teoretic).

Clasificarea problemelor numerice (de calcul)

Problema numerică: $T \cdot x = y$
A, B – spații liniare $x \in A; y \in B$
T- operator $T : A \rightarrow B$

Reprezentare schematică a unei probleme numerice



Problema Directă $\begin{cases} x \\ T \end{cases} \Rightarrow y; \quad T \cdot x = y; \quad \int P \cdot dt = W$

Problema Inversă $\begin{cases} T \\ y \end{cases} \Rightarrow x; \quad T \cdot x = y \Rightarrow x = T^{-1} \cdot y$

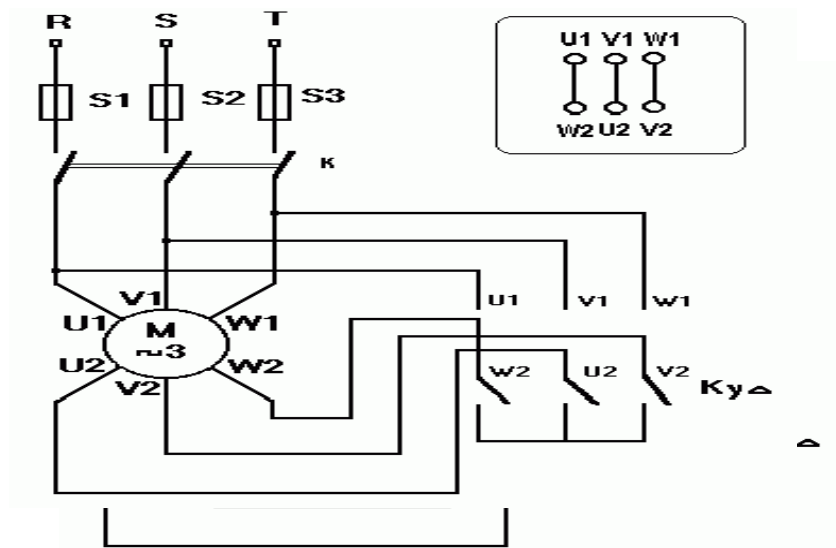
$$[R] \cdot [I] = [E] \Rightarrow [I] = [R]^{-1} \cdot [E]$$

Aplicații ale Metodelor Numerice în Ingineria Electrică



Rezolvarea Aproximativă a Ecuțiilor Algebrice și Transcendente

Efectul pornirii mașinilor electrice

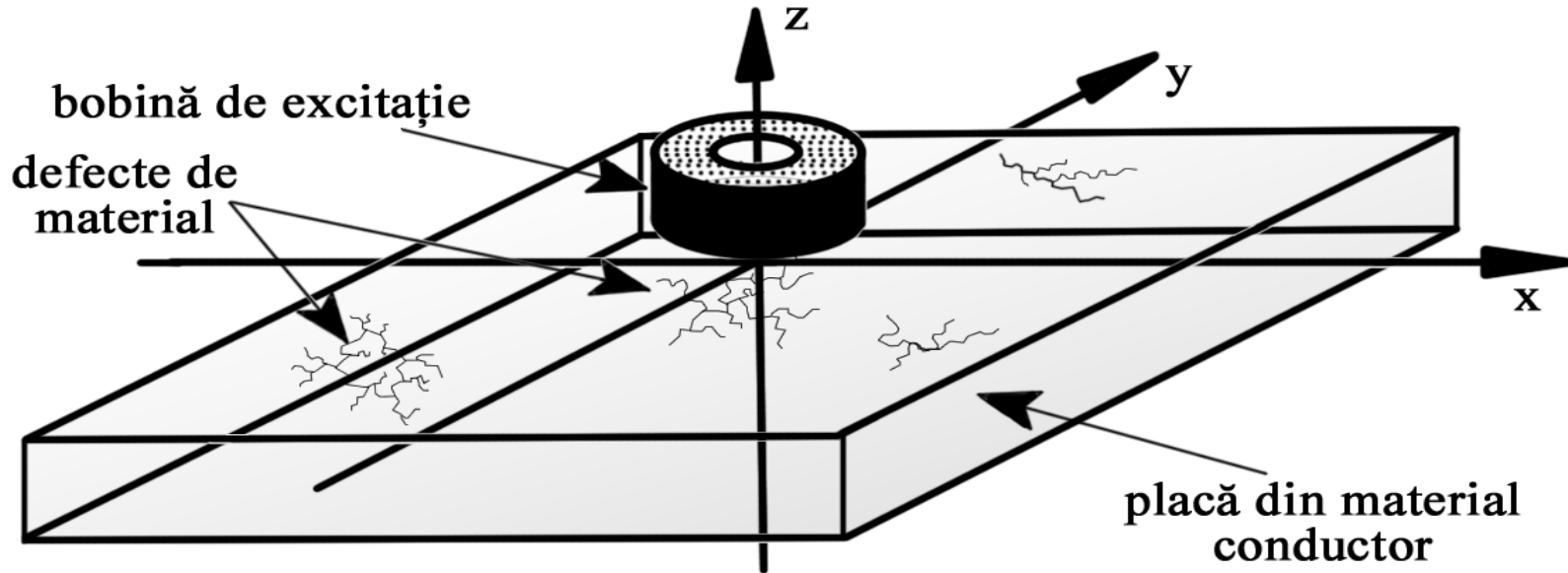


Motor asincron pentru acționarea pompelor

$$\left[Z_p^2 \cdot \left(\frac{U_{b0}}{S_{sc}} \right)^2 + \frac{2 \cdot X_p}{S_{sc}} + \frac{1}{U_{b0}^2} \right] \cdot U_b^2 - \left[\left(\frac{S_{f0}}{S_{sc}} \right)^2 + \frac{2 \cdot (Q_{f0} - Q_f)}{S_{sc}} - 2 \cdot \left(\frac{U_{b0}}{S_{sc}} \right)^2 \cdot (R_p \cdot P_f + X_p \cdot Q_f) + 1 \right] \cdot U_b^2 + S_f^2 \cdot \left(\frac{U_{b0}}{S_{sc}} \right)^2 = 0$$



Detecția defectelor de material



Model geometric demonstrativ privind testarea non-distructivă

$$\int_a^b K(x, y) \cdot z(x) dx = u(y), \quad y \in [c, d]$$

⇓

$$A \cdot z = u$$

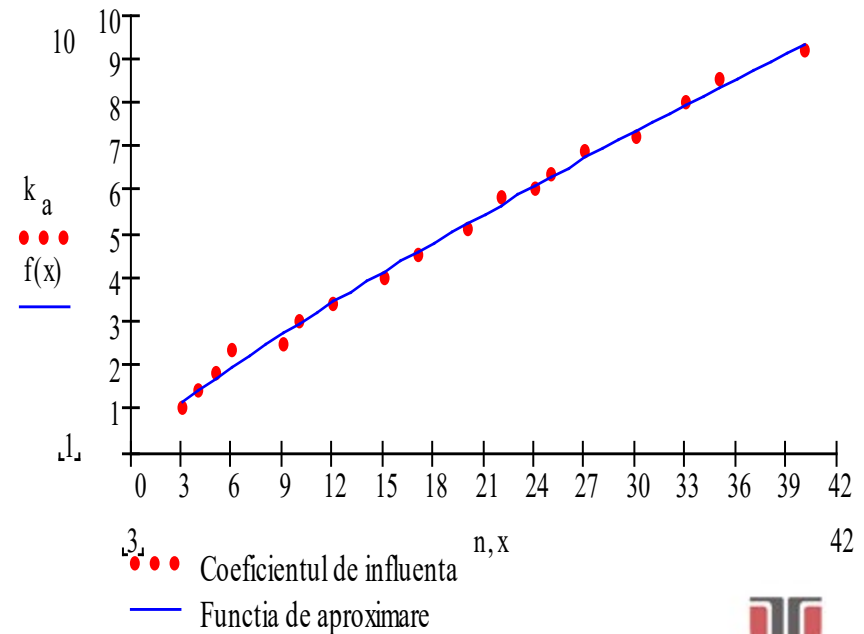


Aproximarea Funcțiilor Utilizând Funcții Analitice

Amplasarea tablourilor de distribuție

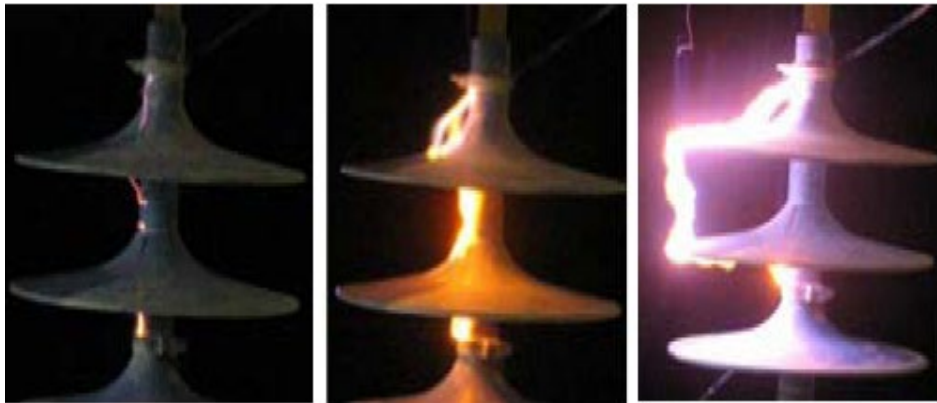
Alegerea unei funcții pentru aproximarea analitică a coeficientului de influență

$$K_a(n, A, B, C, D) = A \cdot n^2 + B \cdot n + C + D \cdot \log(n)$$

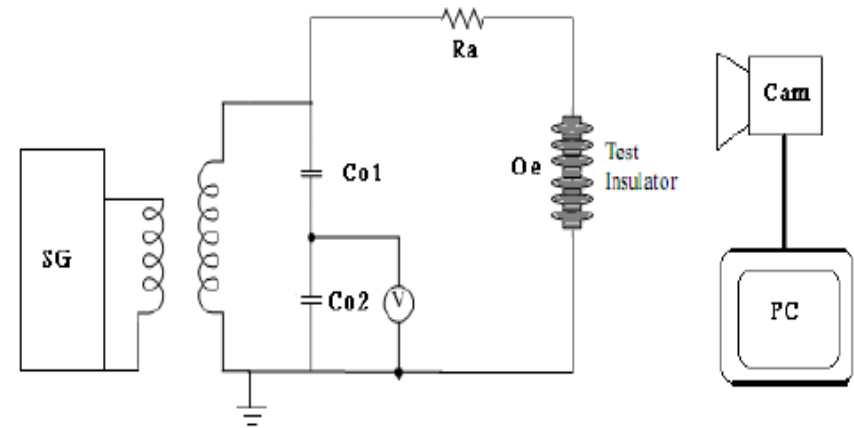


Aproximarea Funcțiilor prin Polinoame de Interpolare

Testarea izolatorilor liniilor electrice aeriene



Străpungerea izolatorilor



Montaj de testarea a izolatorilor

- În urma efectuării încercărilor se stabilesc **funcții numerice de dependență** între valorile rezistenței de izolație și nivelul tensiunilor aplicate.
- Pentru determinarea rezistenței pentru orice nivel de tensiune electrică, se apelează la **interpolarea numerică** a funcțiilor de dependență reieșite.

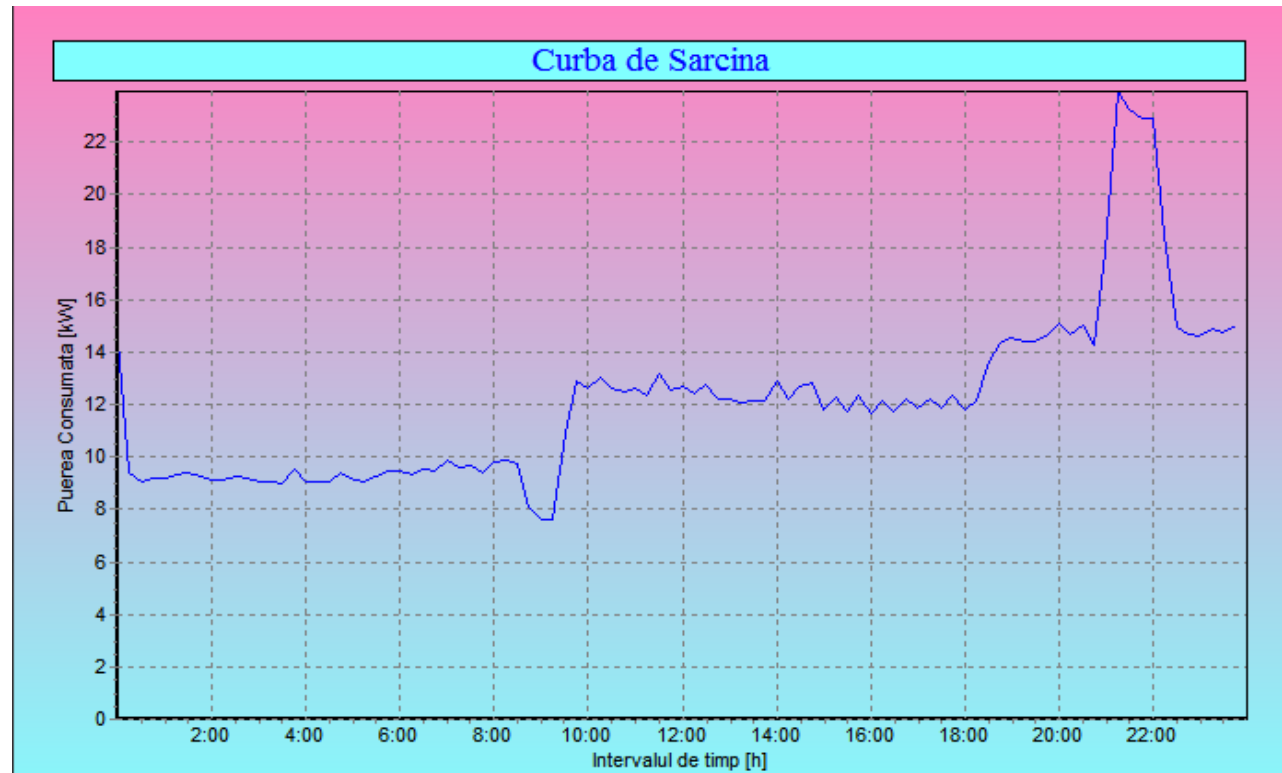


Integrarea și Derivarea Numerică

Stabilirea cantităților de energie consumate,
pe baza înregistrărilor de putere – curba de sarcină zilnică

Se consideră un receptor de energie electrică pentru care se cunoaște curba de sarcină zilnică referitoare la puterea activă consumată (exprimă variația în timp a puterii active consumate pe durata unei zile).

$$W_{zi} = \int_0^{24} P(t) \cdot dt$$



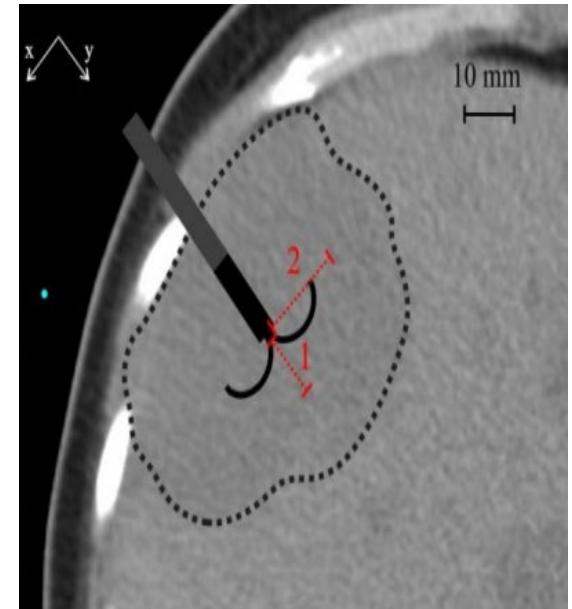
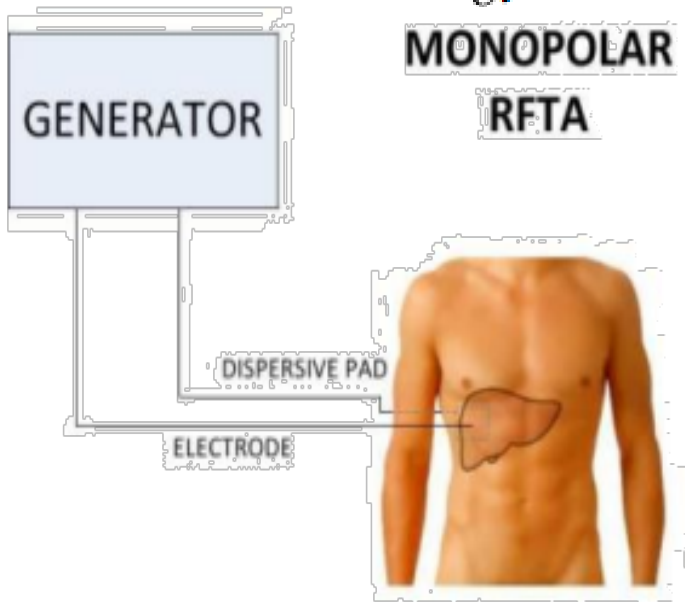
Rezolvarea Ecuțiilor și Sistemelor de Ecuții Diferențiale

Computer modeling and simulation of radiofrequency thermal ablation

Dagmara Dołęga, Jerzy Barglik

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot k \nabla T + \sigma E^2 - \rho_{bl} c_{bl} w_{bl} (T - T_{bl}) - Q_m$$

MONOPOLAR
RFTA



Aplicație: Tratamentul leziunilor canceroase
încălzirea locală prin radiofrecvență



Analiza Erorilor

Fără a subestima importanța **soluțiilor analitice**, majoritatea problemelor de inginerie electrică nu admit decât **soluții numerice**.

În activitatea concretă de determinare a acestora, inginerul este obligat să cunoască și să stăpânească aspectele legate de **aproximări și erori**, de influența lor asupra rezultatelor.

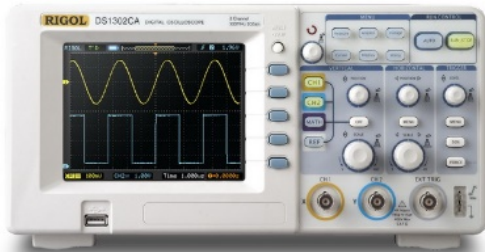
Întrebare: „Cât de concrete, cât de exacte sunt rezultatele obținute?”

Problema erorilor prezintă interes atât la **metodele numerice directe** (soluția rezultatelor după efectuarea unui număr finit de operații elementare, cunoscut de la bun început), cât și cele **iterative sau de aproximări succesive** (pornind de la o soluție aproximativă, se obțin valori din ce în ce mai precise ale rezultatului, prin repetarea unei secvențe relativ mai reduse de operații aritmetice elementare).

Condiția de terminare a calculelor la metodele iterative este legată, de regulă, de atingerea unei anumite **precizii**, de situare a erorii sub o valoare prestabilită, ceea ce impune necesitatea **cunoașterii sau aprecierii erorii** în fiecare moment a procesului de calcul.

Surse de Erori

- Măsurările obținute într-un laborator cu un instrument de măsură, au sens numai dacă este cunoscută **sensibilitatea** aparatului.
- Un calculator numeric poate reprezenta numai un **număr finit** de cifre; de unde și posibilitatea ca un număr real introdus în calculator să fie aproximat; **operațiile elementare** cu aceste numere produc rezultate care nu pot fi reprezentate exact în calculator.
- Când un algoritm, constituit dintr-o succesiune de operații elementare este introdus în calculator, se obține în general o **eroare și propagare succesivă de erori**. Aceste erori se numesc **erori de rotunjire**, numele venind de la o tehnică de reprezentare a numerelor reale în calculator



Tipuri de Erori

Categoriile principale de erori: **erori de problemă și de metodă, erori inițiale sau inerente, erori de trunchiere și erori de rotunjire.**

Eroarea unui rezultat aproximativ este unică dar provine din mai multe surse și are mai multe componente de natura celor precizate mai sus:

- fiecare dintre componentele erorii se poate exprima sub formă **absolută sau relativă**
- diversele categorii de erori trebuie coordonate (corelate) între ele, în sensul asigurării **aceluiași ordin de mărime** pentru fiecare componentă.

(sunt nejustificate și ineficiente eforturile pentru reducerea unui anumit tip de eroare, dacă celelalte tipuri au valori mult mai mari)

PROBLEMA REALĂ P

erori de problemă cauzate de simplificările în formularea $M(p)$

MODEL MATEMATIC $M(P)$ erori de trunchiere analitice - procese de calcul numeric cu convergență infinită sunt înlocuite cu procese cu convergență practic finită, element caracteristic pentru metodele iterative sau de aproximări succesive.

METODĂ NUMERICĂ $MN(P)$

erori de
intrare-ieșire

Eroarea de trunchiere nu se poate calcula exact dar se poate **estima**. De regulă, condiția practică de terminare a calculelor la **metodele iterative** este legată de **valoarea erorii de trunchiere**: calculele se consideră terminate în momentul în care eroarea de trunchiere ajunge sub o valoare **limită prestabilită**.

ALGORITM

(schemă logică)

PROGRAM

Erorile inițiale sau inerente se datorează prezenței în modelul matematic a unor coeficienți numerici, ale căror valori se cunosc doar aproximativ.

Cauzele sunt legate de provenința lor : măsurători experimentale mai mult sau mai puțin precise, soluții mai mult sau mai puțin aproximative ale unor probleme numerice asociate, etc.

Testare și utilizare

Interpretare rezultate

Moduri de Exprimare a Erorii

Se consideră o mărime numerică reală A pentru care se cunoaște valoarea aproximativă a (determinată experimental-măsurători)

Eroarea aproximației a pentru valoarea exactă A :

$$\varepsilon = A - a \quad \text{- corecție a aproximației lui } A \text{ prin } a$$

$$\varepsilon > 0 \Rightarrow \quad \text{Aproximare prin lipsă}$$

$$\varepsilon < 0 \Rightarrow \quad \text{Aproximare prin adaos}$$

$$A = a + \varepsilon \quad \text{- formula de aproximare}$$

$$\varepsilon_a = |\varepsilon| = |A - a| \quad \text{- *Eroarea absolută*}$$

În aplicațiile practice se cunoaște a ; nu se cunoaște A - se pune problema estimării erorii absolute!

$$\text{Limita superioară} \quad \varepsilon_a = |A - a| \leq \varepsilon_{as}$$

$$a - \varepsilon_{as} \leq A \leq a + \varepsilon_{as}$$

$$A = a \pm \varepsilon_{as}$$

Eroarea absolută nu este suficientă pentru a caracteriza gradul de precizie a unei aproximări!!!

Exemplu

$$\begin{array}{ll} A_1 = 10 & A_2 = 10000 \\ a_1 = 9 & a_2 = 9999 \end{array}$$

Se apreciează intuitiv că a_2 aproximează mult mai bine A_2 decât a_1 pe A_1 cu toate că:

$$\varepsilon_{a_1} = \varepsilon_{a_2} = 1$$

Este nevoie de o altă mărime care să exprime corect gradul de precizie al unei aproximații!!!

Eroarea relativă

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{|a|} = \frac{|A - a|}{|a|} \quad \varepsilon_r [\%] = 100 \cdot \varepsilon_r$$

$$\varepsilon_{r_1} = \frac{|A_1 - a_1|}{|a_1|} = \frac{|10 - 9|}{|9|} = 0.11 = 10[\%];$$

$$\varepsilon_{r_2} < \varepsilon_{r_1}$$

$$\varepsilon_{r_2} = \frac{|A_2 - a_2|}{|a_2|} = \frac{|10000 - 9999|}{|9999|} = 0.0001 = 0.01[\%]$$

Aproximația 2 este mai precisă

Eroarea Analitică de Trunchiere

→ eroarea între soluția lui $M(P)$ și soluția lui $MN(P)$

Exemplu: Consider funcția exponențială e^x . Se cere să se calculeze valorile ei pentru diverse valori ale argumentului x , utilizând dezvoltarea în serie MacLaurin:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots +$$

Avem un număr infinit de termeni. În calcule se folosesc doar un număr finit de termeni (5,6,7,8, ...) dependent și de valoarea argumentului x . Termenii omiși determină apariția **erorii de trunchiere** (datorată trunchierii unui proces de calcul teoretic infinit).

Problema matematică $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ Problema numerică $S_N(x) = \sum_{i=0}^N \frac{x^i}{i!}$

Eroarea analitică de trunchiere: $\varepsilon_{a.t} = \varepsilon_{a.t}(N) = e^x - S_N(x)$

$\varepsilon_{a.t}$ – depinde de $N \rightarrow$ parametru de discretizare

Propagarea Erorilor

X, Y – operanzi (tensiune, curent); x, y – valorile aproximative corespunzătoare

$$\begin{array}{l} \text{Adunarea} \\ X = x + \varepsilon_x \\ Y = y + \varepsilon_y \end{array} \quad X + Y = x + \varepsilon_x + y + \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{x+y} = \varepsilon_x + \varepsilon_y \quad \varepsilon_{a_{x+y}} \leq \varepsilon_{a_x} + \varepsilon_{a_y}$$

$$\varepsilon_{r_{x+y}} = \frac{\varepsilon_{a_{x+y}}}{|x+y|} \leq \frac{\varepsilon_{a_x}}{|x+y|} + \frac{\varepsilon_{a_y}}{|x+y|} = \frac{\varepsilon_{a_x}}{|x|} \cdot \frac{|x|}{|x+y|} + \frac{\varepsilon_{a_y}}{|y|} \cdot \frac{|y|}{|x+y|} \quad \varepsilon_{r_{x+y}} \leq \frac{|x| \cdot \varepsilon_{a_x} + |y| \cdot \varepsilon_{a_y}}{|x+y|}$$

- Eroarea sumei este egală cu suma erorilor termenilor
- Eroarea absolută a sumei nu depășește suma erorilor absolute ale termenilor
- Dacă operanzii sunt de același semn, limita superioară a erorii relative a sumei nu depășește limita superioară a erorii relative maxime a termenilor!

Reguli practice pentru calculele numerice

Se consideră utilă evidențierea unor “sfaturi” practice, la efectuarea, manuală sau automată, a calculelor numerice:

- pe parcursul efectuării unui șir de calcule, numărul de cifre semnificative al rezultatelor intermediare trebuie să fie mai mare cu 1 sau 2 decât numărul de cifre exacte;
- rezultatul final al unei secvențe de calcule nu trebuie să conțină mai mult de o cifră semnificativă în plus față de numărul de cifre exacte;
- la operațiile de adunare și de scădere rangul ultimei cifre reținute pentru rezultat trebuie să fie cel mult egal cu rangul ultimelor cifre semnificative exacte ale datelor inițiale sau mai mare decât acesta (+1 pentru rezultate intermediare);
- la operațiile de înmulțire, împărțire, extragere de radical numărul de cifre semnificative al rezultatului trebuie să fie identic cu numărul de cifre semnificative exacte ale operandului cu numărul minim de asemenea cifre (+1 pentru rezultate intermediare);

➤ se recomandă, pe cât posibil, evitarea operației de scădere a două valori numerice aproximativ egale (apar erori foarte mari datorate fenomenului de “anulare prin scădere”), prin rescrierea expresiei respective și **utilizarea dezvoltării în serie Taylor**;

➤ dacă se adună, în sens algebric, un șir de numere, atunci, pentru minimizarea erorii de rotunjire, se recomandă ca operanzii să fie considerați în ordinea crescătoare a modulelor lor;

➤ dacă o expresie este de forma $(a - b) \cdot c$ sau de forma $(a - b) / c$, atunci se recomandă efectuarea operațiilor în ordinea $a \cdot c - b \cdot c$, respectiv $a/c - b/c$ (dacă valorile a și b sunt foarte apropiate, este de preferat respectarea ordinei inițiale);

➤ atunci când argumentul unei funcții are valori atât de mari, încât determină pierderea unor cifre semnificative înainte de terminarea procesului de calcul, atunci se recomandă efectuarea unei schimbări corespunzătoare de variabilă;

➤ pentru situațiile care nu se încadrează în regulile practice enumerate mai sus, se recomandă minimizarea numărului total de operații aritmetice elementare.