Curs 2

Metode Numerice de Rezolvare a Ecuațiilor Neliniare Algebrice şi Transcendente

Aplicații în Ingineria Electrică

Ș.l. Dr. ing. **Levente CZUMBIL**

Laboratorul de Cercetare în Metode Numerice

Departamentul de Electrotehnică, Inginerie Electrică

E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro WebSite: http://users.utcluj.ro/~czumbil

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Ecuaţiile neliniare constituie una din cele mai frecvente aplicaţii de calcul numeric care apar în cadrul **activităţilor de proiectare** din ingineria electrică.

Problema…

- Expresia ecuaţiei este foarte complicată sau valorile coeficienţilor nu se cunosc exact (rezultaţi din determinări experimentale sau au fost calculaţi pe baza unor ipoteze simplificatoare)!

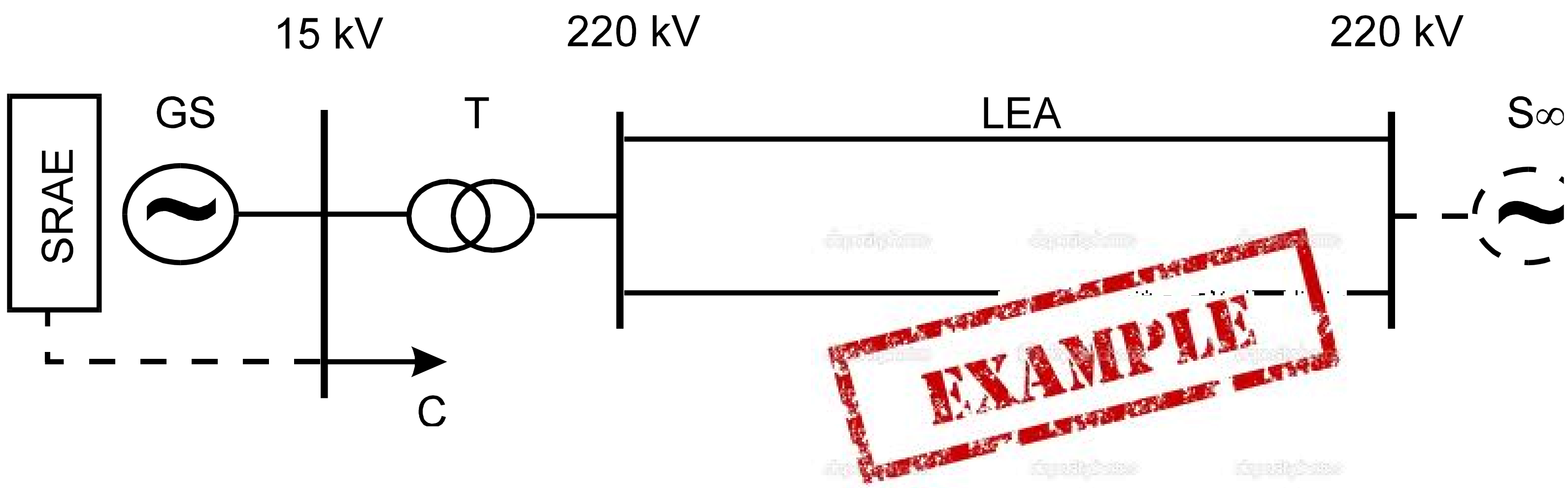
Concluzia…

- Nu se pune problema soluţionării exacte a ecuaţiilor cu metode directe (nr. finit de paşi – cunoscut apriori)
- Se utilizează **metode numerice aproximative** – **metode iterative** cu convergenţă teoretic infinită dar practic finită (prin estimarea permanenta a gradului de precizie a determinării soluţiei sau soluţiilor)
- Soluţiile ecuaţiilor neliniare se obţin aşadar ca **limite ale unor şiruri convergente**.

Engineering is seeing solutions, not finding problems

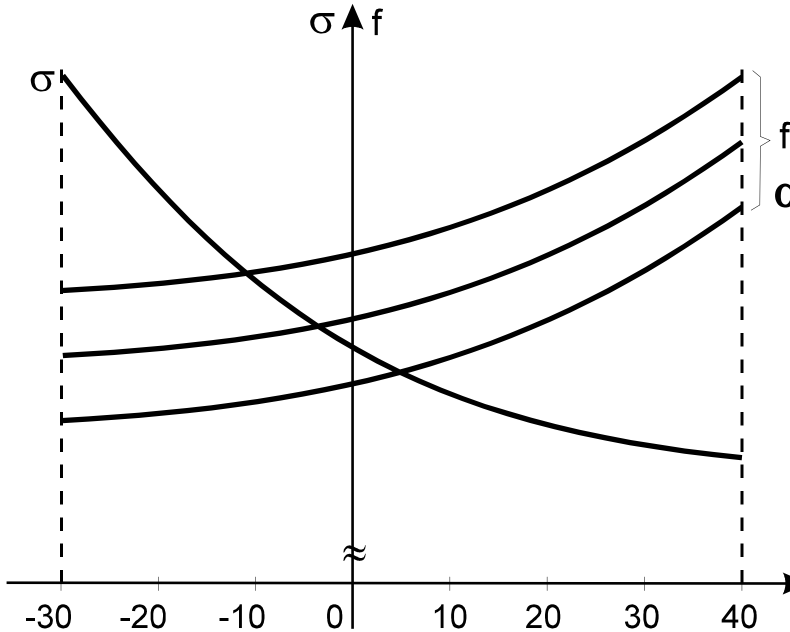
Exemple de aplicaţii din ingineria electrică

➢ **Testarea stabilităţii la mici perturbaţii a generatoarelor electrice distribuite** (ex. turnuri eoliene), conectate la reţea; soluţiile complexe ale unei ecuaţii polinomiale



➢ La **proiectarea mașinilor electrice** care acționează compresoare de frig, care funcționează în regim de saturaţie, este necesar să se calculeze câmpul magnetic în zona punctului de funcţionare în care inducţia magnetică ajunge la 2 Tesla; impune rezolvarea unei ecuaţii polinomiale;

➢ **În dimensionarea mecanică a unei linii electrice aeriene (LEA)**, se rezolvă ecuaţia de stare a conductoarelor electrice, care exprimă comportarea liniei sub acţiunea efortului unitar exercitat de conductoare asupra stâlpilor de susţinere şi în condiţii meteorologice diferite (vânt, chiciură);



$$\alpha\cdot\left(t_a - t_b\right) + \frac{1}{E}\cdot\left(\sigma_{0a} - \sigma_{0b}\right) = \frac{\ell_e^2}{24}\cdot\left[\left(\frac{g_a}{\sigma_{0a}}\right)^2 + \left(\frac{g_b}{\sigma_{0b}}\right)^2\right]$$

Curbele de montare se referă la variaţia efortului unitar σ şi a săgeţii *f* în funcţie de temperatura *t*.

Exemplu concret: În cadrul unui studiu coexistenţă LEA – CATV (reţea de cablu TV - Turda) s-a impus rezolvarea repetată a ecuaţiei de stare, având diferite valori ale coeficienţilor, cu scopul de a verifica rezistenţa LEA existentă, în condiţiile montării pe acelaşi tronson de stâlpi a reţelei CATV;

Consideraţii Teoretice

Se consideră o ecuaţie de formă generală:

$$f(x) = 0$$

Pentru majoritatea aplicaţiilor din ingineria electrică – domeniul de definiţie este un interval I:

$$f : I \to R$$

Teorema lui Rolle-de localizare a rădăcinilor:

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists x_0 \in (a, b)$$ x_0-rădăcina ecuaţiei

Observaţii

Dacă f(x) este un polinom atunci ecuaţia se numeşte **ecuaţie algebrică**; în caz contrar se numeşte **ecuaţie transcendentă**

Se numeşte: - rădăcina funcţiei (ecuaţiei) – numai la ecuaţii algebrice

- zeroul (soluţia) funcţiei - la ecuaţii transcendente

Rezumat

➢ Se va demonstra pas cu pas modul în care o aplicaţie reală (provenită din ingineria electrică) se **modelează matematic** şi apoi se rezolvă numeric cu ajutorul **metodelor numerice**;

➢ Intuitiv, vor fi experimentate **fazele de soluţionare numerică** a ecuaţiilor algebrice (polinomiale), stabilite ca model matematic al aplicatiei reale;

➢ De la desfăşurarea **particularizată** a metodei numerice de rezolvare, se trece la **descrierea ei generală**, fiind subliniate limitele de aplicabilitate, avantaje şi dezavantaje;

1. Metoda bisecţiei (a înjumătăţirii intervalului)

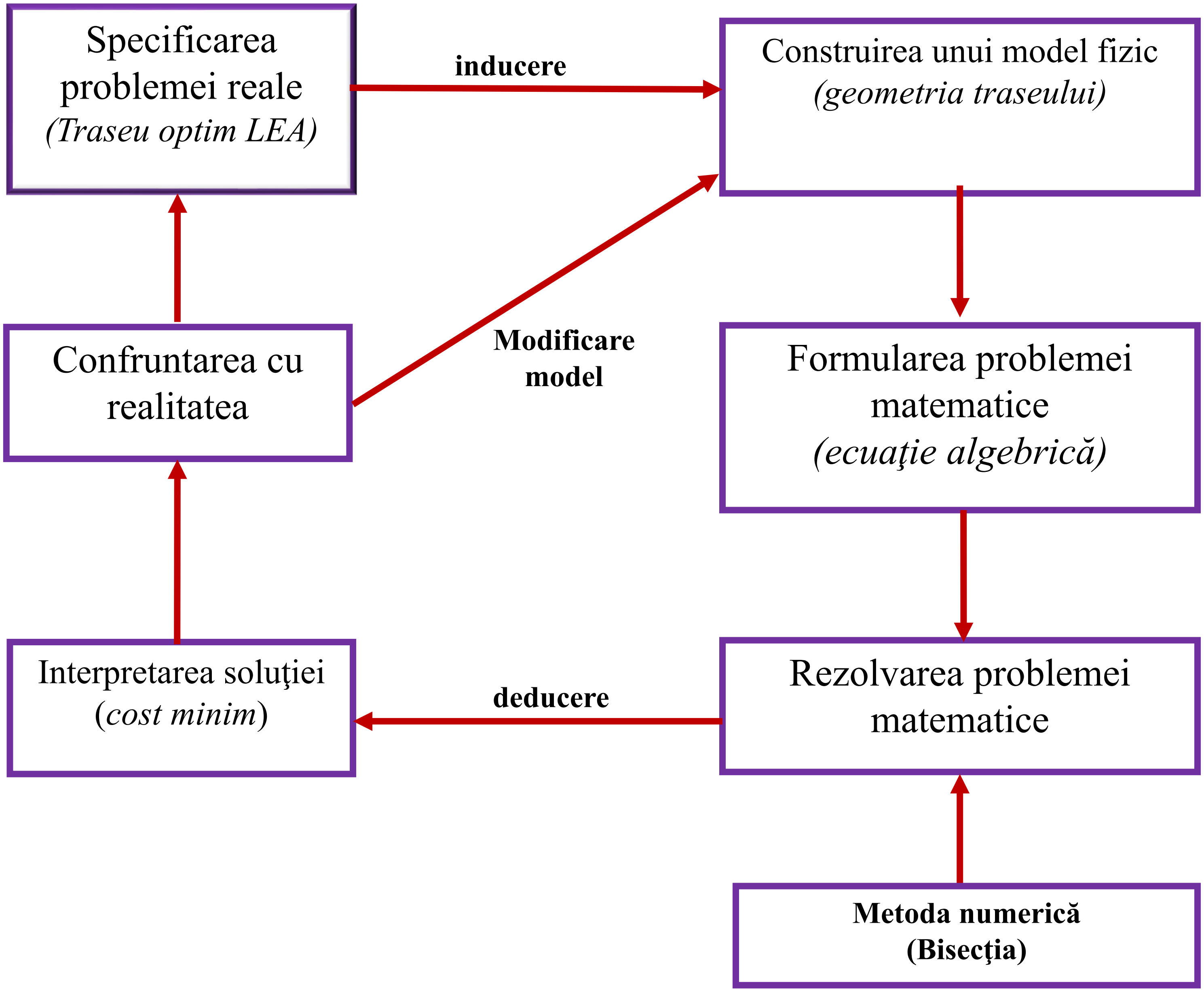
Aplicaţia Practică

Societatea de transport a energiei electrice, S.C TRANSELECTRICA S.A, şi-a stabilit ca obiectiv de investiţii pe anul 2009 construirea unei linii electrice de interconexiune între două staţii electrice. Pe distanţa celor două staţii, datorită diferenţelor de teren, amplasamentul se împarte în două zone, delimitate printr-o linie WE, aşa încât costul execuţiei liniei pe fiecare zonă se caracterizează prin indicii C_1 şi C_2.

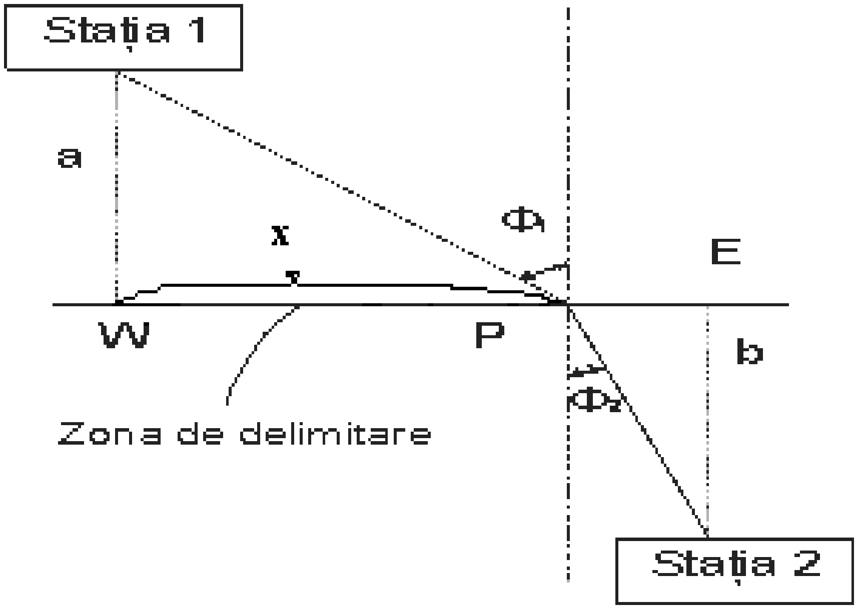
Se pune problema stabilirii **traseului optim** al liniei astfel încât **costul de execuţie să fie minim.**

Pentru soluţionarea modelului matematic care provine din această aplicaţie este necesar apelul la o **metodă numerică**.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA


Specificarea problemei reale
(Traseu optim LEA)
inducere
Construirea unui model fizic
(geometria traseului)
Confruntarea cu realitatea
Modificare model
Formularea problemei matematice
(ecuaţie algebrică)
Interpretarea soluţiei
(cost minim)
deducere
Rezolvarea problemei matematice
Metoda numerică
(Bisecţia)

Modelul matematic pe baza datelor problemei tehnice de soluţionat:



Reprezentarea geometrică de amplasament

Ideea de bază se reduce la localizarea unui punct *P* pe frontiera *WE* prin care linia electrică să traverseze limita de separaţie dintre cele două zone. Având la dispoziţie indicii de cost, se poate stabili o relaţie de egalitate între sinusurile unghiurilor formate de direcţiile traseelor de linie din cele două zone şi perpendiculara dusă prin punctul *P* la zona de delimitare:

$$C_1 \cdot \sin\theta_1 = C_2 \cdot \sin\theta_2 \qquad C_1^{\,2} \cdot \frac{x^2}{a^2 + x^2} = C_2^{\,2} \cdot \frac{(L-x)^2}{b^2 + (L-x)^2}$$

$$C_1^{\,2} \cdot x^2 \cdot \left[b^2 + (L-x)^2\right] = C_2^{\,2} \cdot (L-x)^2 \cdot \left(a^2 + x^2\right)$$ - ***ecuaţie algebrică***

Exprimarea devine mai sugestivă prin înlocuirea datelor cunoscute:

a=3 km; b=1 km; WE=L=12 km; C_1*=87000 RON/km;* C_2*=93000 RON/km.*

$$-1080 \cdot x^4 + 25920 \cdot x^3 - 225792 \cdot x^2 + 1868184 \cdot x - 11209104 = 0$$

Coeficienţi determinaţi experimental şi prin simplificări în model!!!

➢Necunoscuta în această ecuaţie polinomială (algebrică) este **distanţa *x*** de la marginea *W* la punctul *P* (capetele se consideră ştiute x_W şi x_E).

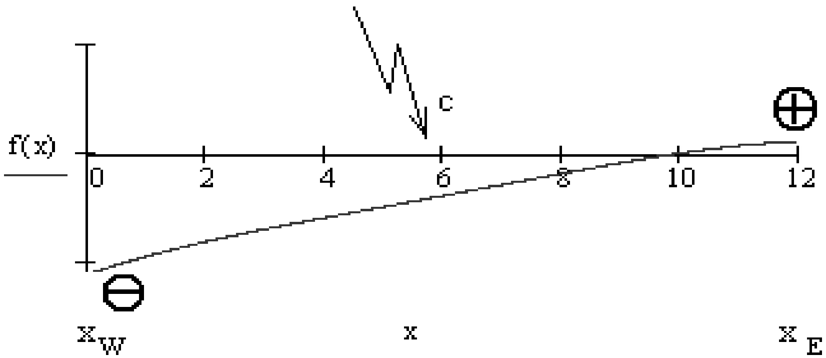
➢Dacă membrul stâng al acestei ecuaţii se exprimă ca o funcţie *f(x),* evident derivabilă pe intervalul $[x_W;x_E]$, se permite efectuarea următoarelor testări:

$$f(x) = -1080 \cdot x^4 + 25920 \cdot x^3 - 225792 \cdot x^2 + 1868184 \cdot x - 11209104$$

Dacă: $$f(x_W) \cdot f(x_E) < 0$$

Între cele două valori limită pe care poate să le ia necunoscuta *x* trebuie să existe o valoare care să anuleze funcţia (Rolle)!!!

Reprezentarea grafică a polinomului pe intervalul definit arată clar îndeplinirea condiţiei anterioare:



Variaţia polinomului şi partiţionarea intervalului de definire

Dar mai mult decât atât, în vederea localizării cât mai exacte a soluţiei, se sugerează ideea împărţirii intervalului prin înjumătăţire succesivă:

$$c = \frac{1}{2} \cdot \left(x_W + x_E\right)$$

Dacă $f(x_W) \cdot f(c) = 0$ soluţia este chiar valoarea c;

$f(x_W) \cdot f(c) < 0$ soluţia se află în intervalul $[x_W; c]$;

$f(x_W) \cdot f(c) > 0$ soluţia se află în cealaltă jumătate de interval.

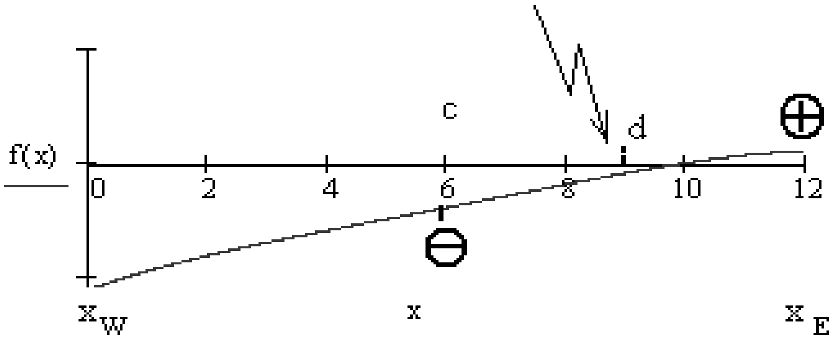
Observaţie: reprezentarea grafică a funcţiei oferă ca evidentă validitatea celei de-a treia ipoteze.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Se înjumătăţeşte intervalul [c; x_E] prin aceeaşi formulă de mediere aritmetică:

$$d = \frac{1}{2} \cdot (c + x_E)$$

Variaţia grafică a funcţiei polinomiale arată clar verificarea inegalităţii !!!

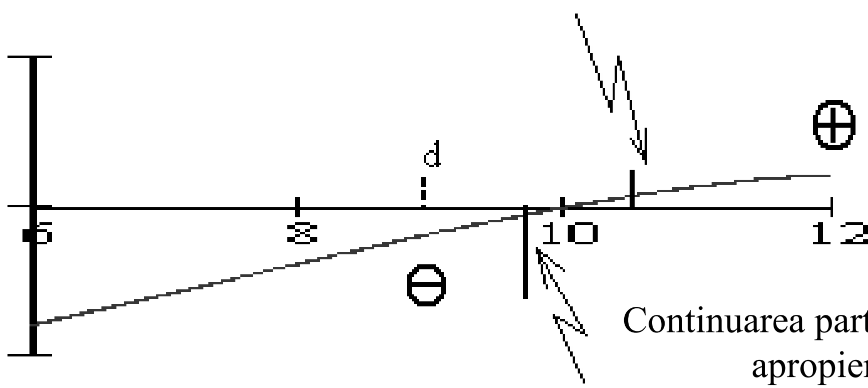


A doua înjumătăţire a intervalului

$$f(d) \cdot f(x_E) < 0$$

Indică localizarea soluţiei în intervalul delimitat de punctele în care se face această evaluare!!!

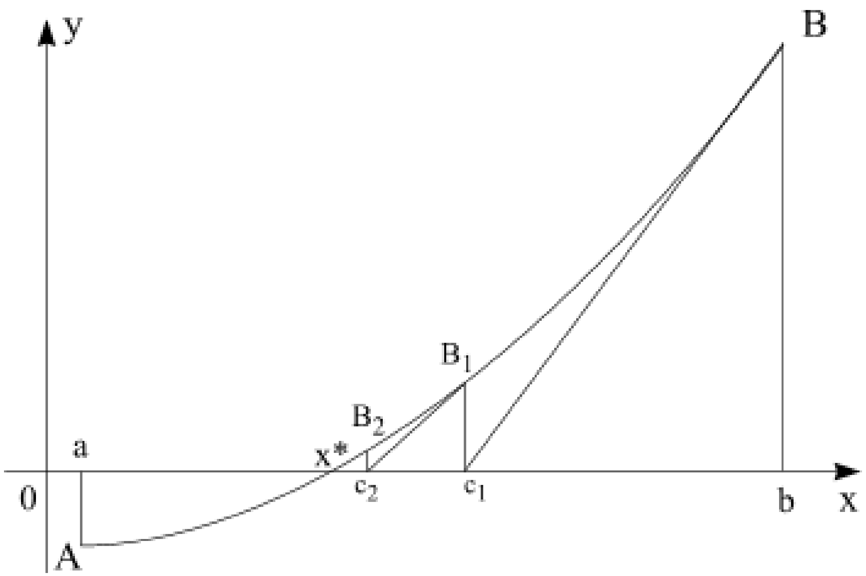
Continuând cu înjumătăţirea intervalului, se observă, restrângerea domeniului în care se află soluţia, apropierea tot mai certă de valoarea care anulează funcţia polinomială!



Continuarea partiţionării intervalului; apropierea de soluţie

Procesul de restrângere treptată a intervalului de definire se poate derula până când evaluarea funcţiei în variabila de înjumătăţire (c, d, ...) devine mai mică decât o valoare impusă, ori efectiv se anulează. În oricare din aceste situaţii, se consideră determinată soluţia realizabilă a polinomului în limita unei precizii, impuse apriori.

➢ Modalitatea prin care s-a soluţionat aplicaţia propusă nu reprezintă altceva decât o metodă numerică, numită **metoda bisecţiei (metoda înjumătăţirii intervalului)**.



➢Pornind de la cele expuse, se va căuta descoperirea **caracterului de generalitate** al acestei metode.

Ideea se transpune **generalizat** după următorul **algoritm**:

<u>Pasul 1:</u> Se iniţializează limitele intervalului de căutare în care se caută soluţia cu Rolle

$$[a;b]=[a_0;b_0]$$

<u>Pasul 2:</u> start iterativ $k=0$

<u>Pasul 3:</u> la un pas oarecare al procesului de calcul se determină noua valoare a soluţiei

$$c_{k+1}=a_k+\frac{1}{2}\cdot(b_k-a_k)$$

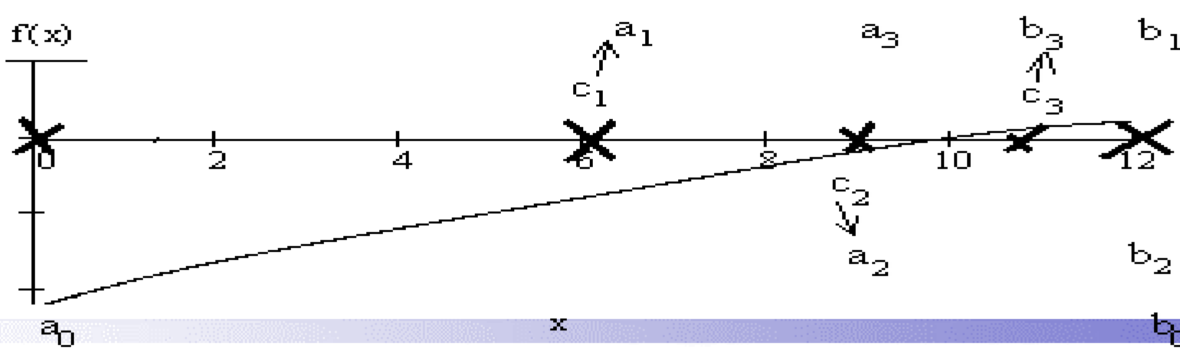
<u>Pasul 4:</u> La acelaşi pas se calculează f (c_{k+1}), f(a_k) rezultând noile limite ale intervalului de căutare:

<u>Pasul 5:</u> Dacă:

$$f(c_{k+1})\cdot f(a_k)<0\Rightarrow a_{k+1}=a_k;b_{k+1}=c_{k+1}$$

$$f(c_{k+1})\cdot f(b_k)<0\Rightarrow a_{k+1}=c_{k+1};b_{k+1}=b_k$$

<u>Pasul 6:</u> Incrementează $k=k+1$ şi reia <u>Pasul 3.</u>



➢Oricât de mult s-ar restrânge intervalul în jurul soluţiei, există posibilitatea ca valoarea determinată considerată drept soluţie să nu fie cea adevărată.

➢Mai mult, procesul iterativ de înjumătăţire nu poate continua la infinit, ci trebuie oprit după un anumit număr de partiţionări. Se va determina acest număr prin stabilirea unei **erori limită** între valoarea determinată ca şi soluţie şi valoarea adevărată.

Demonstratie – **Numarul de iterații necesare - pe tablă**

$$n := \mathrm{round}\left(\frac{\log\left(b_0 - a_0\right) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}\right)$$

Comunicare

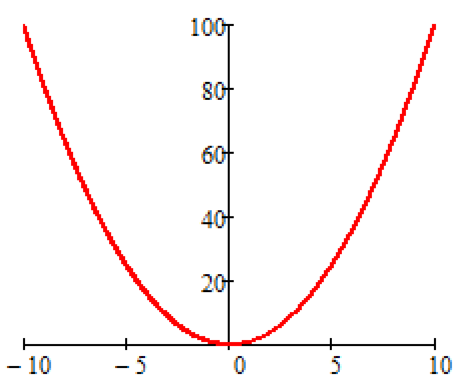
Pasivă – Asertivă – Agresivă

Concluzii asupra Metodei Bisecţiei

- **Metoda bisecţiei** converge spre soluţie indiferent cât de departe este punctul de pornire, fapt pentru care se consideră o **metodă globală** de determinare a soluţiilor;

- **Convergenţa spre soluţie este lentă**, trebuie executat un număr mare de împărţiri ale intervalului pentru a ajunge la o precizie satisfăcătoare;

- Metoda bisecţiei nu poate fi utilizată pentru determinarea soluţiilor unei funcţii care este tangentă la axa *Ox*, fără să o străpungă, fiindcă nu se verifică chiar condiţia de start.



$$f(a)\cdot f(b)<0$$

2. Metoda lui Newton (metoda tangentei)

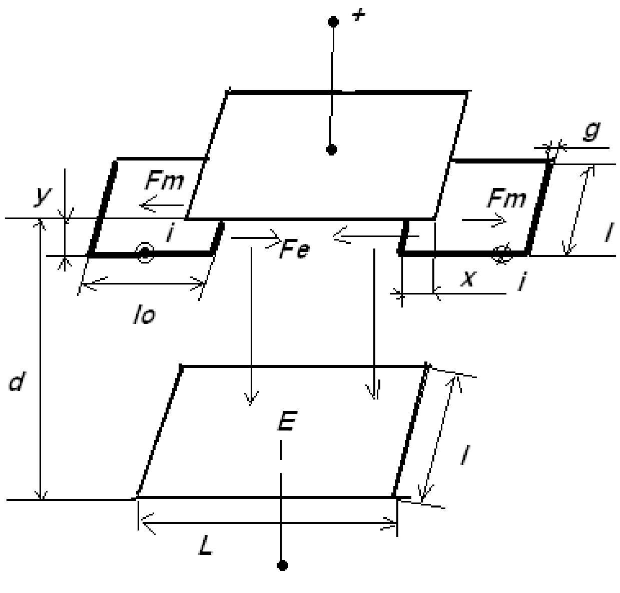
Aplicaţie Practică

S.C ARMĂTURA S.A, firmă cu profil electromecanic, a primit o comandă de prelucrare a unor plăci metalice utilizate în construcţia releelor de telefonie mobilă. Operaţia principală executată asupra acestor piese constă în vopsirea prin pulverizare în câmp electric, procedeu numit **vopsire electrostatică**.

- Problema care se pune în cadrul acestei aplicaţii se referă la găsirea unei legături între dimensiunile de vopsit ale unei plăci şi mărimile electrice prin care se poate ajusta procesul. Astfel, prin reglajul acestor mărimi, tensiune electrică, respectiv curent electric care parcurge plăcile, devine posibil controlul automat al suprafeţei de vopsit pentru fiecare plăcuţă.

- Cunoscând caracteristicile şi dimensiunile instalaţiei de vopsire electrostatică, aplicaţia se poate modela simplu printr-un condensator plan în care se introduc simultan două piese de vopsit. În primul rând trebuie determinată distanţa maximă de pătrundere a plăcilor în interiorul condensatorului plan, distanţă care limitează direct suprafaţa ce urmează a fi acoperită cu vopsea a acestora.

Modelul prin care se poate caracteriza problema:



Modelarea pieselor şi a instalaţiei de vopsire electrostatică

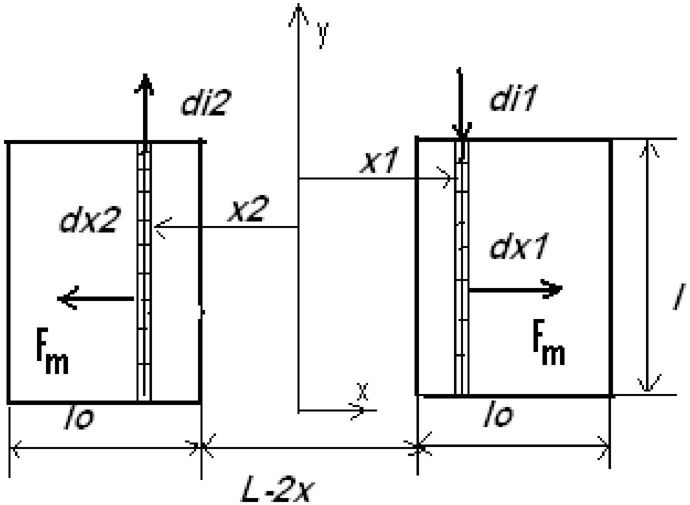
Dimensiunile geometrice ale sistemului condensator plan şi piese de vopsit:

L = 0.65 m ; l = 0.3 m ; l0 = 0.25 m ; d= 1 m ; g = 0.002 m ; y = 0.15 m ;

Mărimile electrice de alimentare:

U = 20000 V ; i = 3 A.

Rămâne să se determine **ecuaţia de echilibru** a forţei electrice cu cea electrodinamică, iar din această relaţie să se găsească mărimea variabilei *x* de pătrundere a pieselor în interiorul condensatorului.



Piesele de vopsit – vedere de sus

Forţa de respingere dintre cele două piese se exprimă integral cu formula:

$$F_m(x) = \frac{\mu_0 \cdot i^2 \cdot \ell}{2 \cdot \pi \cdot \ell_0^2} \cdot \int_{\frac{L}{2}-x}^{\frac{L}{2}-x+\ell_0} \int_{\frac{L}{2}-x}^{\frac{L}{2}-x+\ell_0} \frac{1}{x_1 + x_2} dx_1 dx_2$$

Iar din ecuaţia de echilibru a forţelor $F_e(x) - F_m(x) = 0$

şi după înlocuirile numerice se deduce o ecuaţie transcendentă:

$$(9.936 - 17.28 \cdot x) \cdot \ln(23 - 40 \cdot x) + (34.56 \cdot x - 15.55) \cdot \ln(9 - 20 \cdot x) +$$
$$+ (5.616 - 17.28 \cdot x) \cdot \ln(13 - 40 \cdot x) + (23.95 \cdot x - 12.896) = 0$$

În această ecuaţie necunoscuta este **distanţa maximă de pătrundere** a pieselor în interiorul condensatorului, în condiţiile în care sunt fixate mărimile electrice de alimentare.

Pentru a determina valoarea variabilei x care verifică ecuaţia neliniară de mai sus, se notează membrul stâng al ecuaţiei cu o funcţie:

$$f(x) = (9.936 - 17.28 \cdot x) \cdot \ln(23 - 40 \cdot x) + (34.56 \cdot x - 15.55) \cdot \ln(9 - 20 \cdot x) +$$
$$+ (5.616 - 17.28 \cdot x) \cdot \ln(13 - 40 \cdot x) + (23.95 \cdot x - 12.896)$$

-se dezvoltă în serie Taylor funcţia *f(x)* în jurul unui punct x_0 reţinând doar primii doi termeni

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

-considerând pe x_0 ca o aproximaţie iniţială a soluţiei ecuaţiei de la care s-a pornit, dacă în expresia dezvoltării Taylor de mai sus se înlocuieşte variabila x cu o nouă aproximare a soluţiei, x_1, pentru care se presupune că *f(x)* se anulează, atunci rescriem:

$$0 = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) \;\Rightarrow\; x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

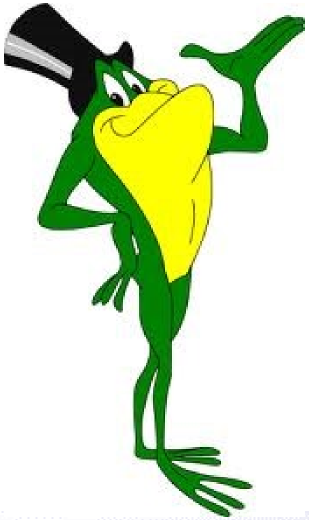
-în acest fel aproximaţia x_1 devine calculabilă în raport cu prima aproximaţie, şi mai departe pentru a afla o aproximaţie cu o precizie sporită, efectuăm succesiv calculele

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \Rightarrow \ldots \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- ajungem astfel la o aproximaţie x_{n+1} a soluţiei, pe care în funcţie de numărul de iteraţii parcurse o vom adopta ca fiind soluţia căutată a problemei.

Numeric, pornind de la o aproximaţie iniţială $x_0 = 0.2\ m$, se ajunge după $n = 9$ iteraţii la $x_9 = 0.3\ m$.

Modalitatea prin care s-a soluţionat ecuaţia neliniară este aplicarea **metodei numerice a lui Newton**.



Caracterul general al metodei lui Newton

Fie o ecuaţie de forma f(x)=0, cu variabila x din [a,b], iar funcţia continuă şi de două ori derivabilă pe intervalul dat. Dezvoltarea în serie Taylor în jurul unui punct x_n, în cazul în care se reţin doar primii doi termeni ai dezvoltării şi restul, este:

$$f(x) = f(x_n) + (x - x_n)\cdot f'(x_n) + \frac{1}{2!}\cdot(x - x_n)^2 \cdot f''(\xi_n) \quad cu \ \xi_n \in [x; x_n]$$

Înlocuirea în expresia de mai sus, a unei aproximaţii x_{n+1} în locul lui x, şi succesivă lui x_n, pentru care presupunem că se anulează $f(x)$ conduce la relaţiile:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}\cdot(x - x_n)^2 \cdot \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} \underset{\text{neglijarea restului}}{\overset{x = x_{n+1}}{\Longrightarrow}} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

S-a generat astfel o formulă de calcul a soluţiilor ecuaţiilor, în care apare o <u>eroare de metodă</u> datorată neglijării restului seriei Taylor şi care se bazează pe un calcul recursiv.

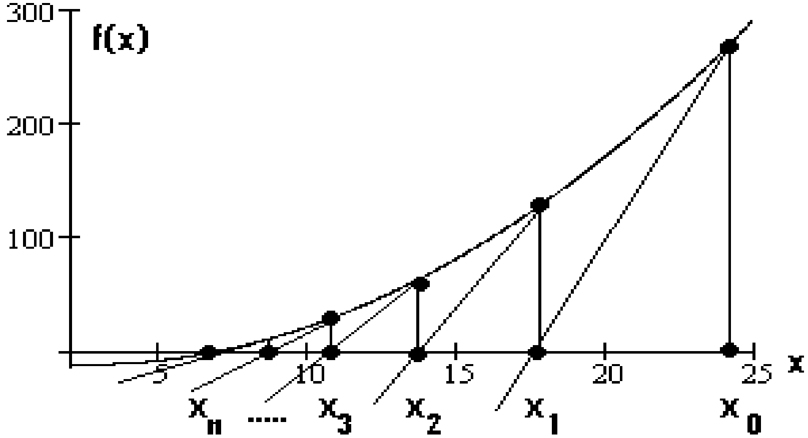


Fig. 9 Interpretare geometrică

Dacă se admite că reprezentarea grafică a funcţiei arată ca în figura 9, iar derivata lui *f(x)* se reprezintă ca o dreaptă care trece succesiv prin punctele

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$$

ALGORITM:

1. Se iniţializează soluţia cu x_0 ($b=x_0$)
2. La un pas oarecare k al procesului iterativ se calculează $f(x_k)$, $f'(x_k)$ rezultând noua valoare a soluţiei aproximative x_{k+1}
3. Calculul se consideră terminat dacă:

$$\left|x_{k+1} - x_k\right| \leq \varepsilon$$

➢Metoda lui Newton poate fi **interpretată geometric:** trasare repetată a tangentelor la funcţie!

➢Procesul continuă până când se ajunge, în limita unei precizii, la soluţia considerată optimă.

➢Formula de oprire a procesului iterativ, confirmată numeric şi grafic de faptul că după un anumit număr de iteraţii, soluţia calculată trebuie să se stabilizeze

Forme îmbunătăţite ale metodei lui Newton

➢ Pentru a spori **convergenţa iterativă a soluţiei**, pentru a **creşte precizia**, ori pentru a **reduce efortul de calcul** din metoda iniţială a lui Newton au fost deduse alte forme îmbunătăţite sau simplificate.

Metoda Newton simplificată

În cazul în care evaluarea derivatei funcţiei, în fiecare nou punct de aproximare, este costisitoare, formula lui Newton poate fi adaptată, în sensul reţinerii valorii calculate a derivatei în primul punct de aproximare pe parcursul unui număr de iteraţii, şi, eventual, schimbarea acestei valori a derivatei prin recalcularea într-un nou punct de aproximare cu :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}$$

Se reduce simţitor efortul computaţional, cu dezavantajul reducerii concomitente a convergenţei; sunt necesare mai multe iteraţii până la obţinerea unei soluţii dorite.

Metoda lui Halley

Din dezvoltarea în serie Taylor, dacă se reţine şi cel de-al doilea termen, se deduce o formulă de aproximare a soluţiei, care prezintă convergenţă ridicată, cu preţul unui efort de calcul de luat în seamă, datorită evaluării la fiecare iteraţie atât a primei derivate cât şi a celei de-a doua:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{2 \cdot f(x_n)}{f'(x_n) \pm \sqrt{\left[f'(x_n)\right]^2 - 2 \cdot f(x_n) \cdot f''(x_n)}}$$

Metoda secantei

Dacă se urmăreşte eliminarea evaluării derivatei, aceasta se aproximează cu formula de mai jos, ştiut fiind că ecuaţia dreptei care trece prin două puncte ale funcţiei, este o dreaptă care poate înlocui tangenta la funcţie:

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

care se introduce în expresia iniţială a lui Newton:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \left[\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right]$$

Pentru aplicarea acestei metode trebuie cunoscute primele două aproximaţii iniţiale x_0 şi x_1!!!

Concluzii asupra metodei lui Newton

- Metoda lui Newton este o ***metodă locală***, în sensul că procesul iterativ converge doar dacă aproximaţia iniţială este aleasă suficient de aproape de valoarea adevărată;

- **Convergenţa metodei lui Newton** şi a variantelor alternative este mai rapidă decât a metodei bisecţiei. S-a observat că soluţia s-a identificat cu o precizie satisfăcătoare în primele trei iteraţii;

- Convergenţa metodei lui Newton este mai rapidă decât a metodei bisecţiei, mai ales în apropierea soluţiei;

- Convergenţa metodei este sigură dacă derivata funcției are semn constant în intervalul;

- Dezavantajul metodei constă în faptul că la fiecare iteraţie trebuie evaluată derivata în fiecare nod ceea ce poate necesită un efort mare de calcul;

- Semnul constant pe intervalul [a,b] a derivatei a doua a funcţiei asigură o viteză mai mare a convergenţei metodei;

- Convergenţa depinde şi de aproximaţia iniţială aleasă a soluţiei x_0, pentru reducerea numărului de iteraţii recomandându-se satisfacerea condiţiei;

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) \geq 0$$

- Metoda are performanţe foarte bune din punct de vedere al numărului de iteraţii şi al timpului de calcul

- În alegerea uneia sau alteia dintre metodele numerice de soluţionare a ecuaţiilor trebuie să se estimeze **efortul de calcul** implicat pentru atingerea unei precizii, **dificultatea de evaluare repetată** a funcţiei şi a derivatelor ei.