Curs 11 - 12

Metode Numerice de Rezolvare a Ecuațiilor și Sistemelor de Ecuații Diferențiale

Ș.l. Dr. ing. **Levente CZUMBIL**

Laboratorul de Cercetare în Metode Numerice
Departamentul de Electrotehnică, Inginerie Electrică
E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Introducere

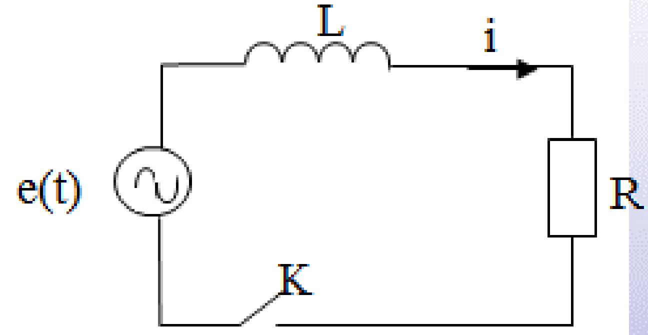
Comportarea dinamică a sistemelor fizice conduce la **modele matematice formate din ecuaţii diferenţiale ordinare sau sisteme de ecuaţii diferenţiale** care nu pot fi rezolvate pe cale analitică (funcţii complicate ca formă sau funcţii cunoscute doar pe baza unor valori în puncte date tabelar şi obţinute pe cale experimentală). Din acest motiv se recurge la **rezolvarea numerică** a acestora.

Metodele numerice de aproximare a soluţiilor conduc la tabele de valori ale funcţiei necunoscute. Valorile tabelate se calculează utilizând o valoare deja calculată cu un pas înainte (***metode unipas***) sau câteva valori calculate deja (***metode multipas***).

Aplicaţii

❖**Circuit R-L serie în regim tranzitoriu**. Se consideră un circuit format dintr-un rezistor de rezistenţă *R* şi o bobină de inductivitate *L*, alimentate în serie la o tensiune electromotoare *e(t) = E·cos(ω·t)*

Se studiază variaţia curentului în circuit la închiderea întreruptorului K.



Circuitul R-L Serie

Se scriu teoremele lui Kirchhoff şi rezultă o ecuaţie diferenţială de ordinul I:

$$e(t) = e_R(t) + e_L(t) = R \cdot i(t) + \omega L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) = E \cdot \cos(\omega t)$$

Aplicații

❖ Ecuaţia liniilor de câmp create de o sarcină în mişcare în planul *xoy* sub acțiunea unui câmp de forțe, este o ecuație diferențială totală exactă;

❖ Mişcarea unui electron supus unui câmp electric $\bar{E}$ și a unui câmp magnetic $\bar{H}$ satisface ecuația diferențială vectorială:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{|e|}{m} \cdot \left(\vec{E} + \mu_0 \cdot \vec{v} \cdot \Delta \overrightarrow{H}\right)$$

❖ Rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale asociate unui circuit electric de ordin I sau II excitat cu un impuls – regim tranzitoriu;

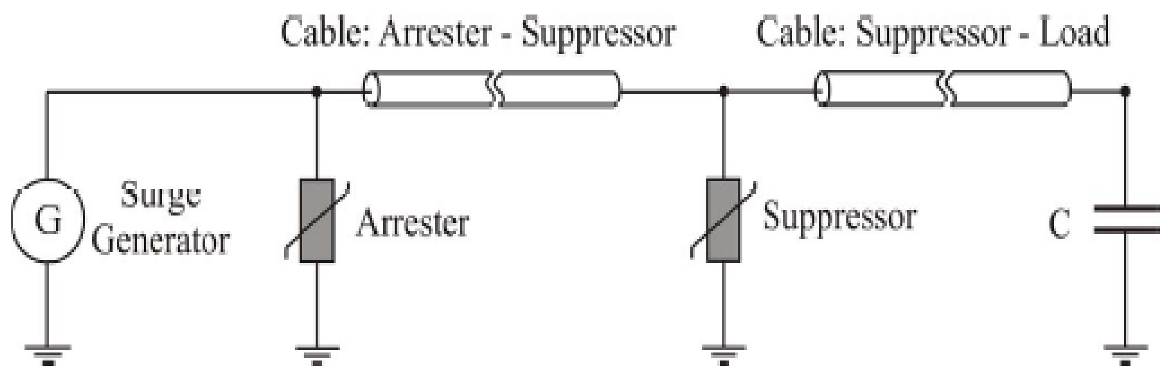
❖ Condensator de capacitate *C* care se încarcă de la o sursă de tensiune continuă *E*, printr-un rezistor de rezistență *R*.

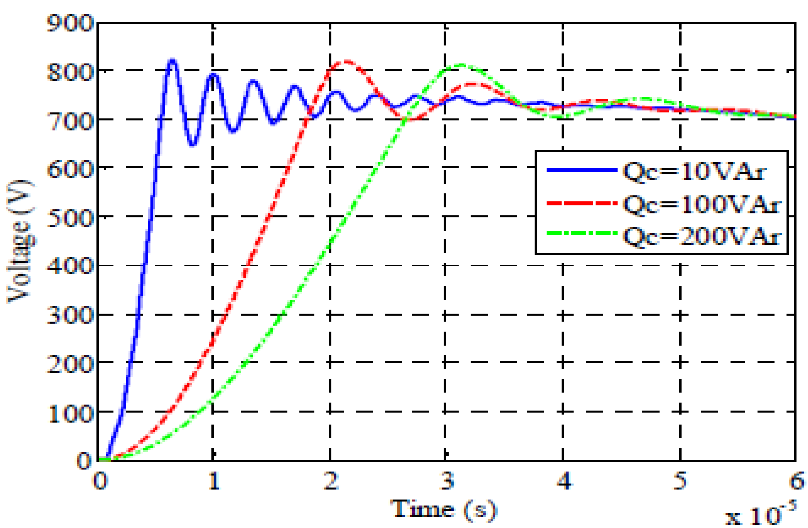
❖ Descărcare unui condensator de capacitate *C*, încărcat iniţial la tensiunea *E*, pe un rezistor de rezistență *R*.

Aplicaţii

❖ **Analiza comportării descarcătoarelor de supratensiuni**, datorate comutării liniilor electrice cu sarcină capacitivă, presupune modelarea liniei ca şi circuit, ţinând cont de prezenţa sursei de energie, de amplasarea descărcătoarelor (surge-arresters) şi de natura sarcinii electrice (capacitivă):

Modelul de cricuit electric





Soluţionarea numerică a ecuaţiei diferenţiale corespunzătoare circuitului, cu variabilă necunoscută – tensiunea la bornele descărcătorului, indică variaţiile care apar pentru diferite sarcini capacitive:

Curs 11

Metode Numerice de Rezolvare a Ecuațiilor Diferențiale de Ordinul I

Aplicații în Ingineria Electrică

Ș.l. Dr. ing. Levente CZUMBIL
Laboratorul de Cercetare în Metode Numerice
Departamentul de Electrotehnică, Inginerie Electrică
E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro

Generalităţi

Modelul matematic cel mai des întâlnit al fenomenelor care stau la baza majorităţii aplicaţiilor electrotehnice este **ecuaţia diferenţială**. Rezolvarea exactă a ecuaţiilor diferenţiale ordinare este posibilă pentru o **clasă foarte restrânsă de aplicații**!!!

O ecuaţie diferenţială este o ecuaţie care conţine pe lângă variabilele independente şi funcţiile necunoscute şi derivatele acestor funcţii (sau diferenţialele lor) până la ordinul n inclusiv (numărul n reprezintă ordinul ecuaţiei diferenţiale).

O **ecuaţie diferenţială se numeşte ordinară** dacă conţine o singură variabilă independentă şi are forma generală:

$$f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

Ecuaţiile diferenţiale cu derivate parţiale conţin mai multe variabile independente şi derivatele parţiale ale funcţiilor necunoscute.

$$y\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = 0$$

Rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale de ordin ***n*** implică impunerea a ***n*** condiţii iniţiale. Există următoarele situaţii:

- Dacă toate cele ***n*** condiţii (valori) sunt date pentru aceeaşi valoare a variabilei independente, integrarea se face cu condiţii iniţiale impuse la început în problemă (problema Cauchy).

- Atunci când intevin diverse valori ale variabilei independente, rezolvarea se face cu condiţii la limită

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

I. Metoda dezvoltării în serie Taylor

Fie $f : I \times R \rightarrow R$ o funcție continuă dată, care descrie ecuația diferențială de oridinul I care urmează a fi rezolvată, unde I este un interval real, iar y_0 este valoarea iniţială a funcției care statisface acestă ecuație diferențială – provenită din condiția inițială a problemei.

Se propune determinaea funcţiei $y : I \rightarrow R$ care satisface problema cu valori (condiţii) iniţiale (problemă Cauchy), adică evaluarea funcţiei $y(x)$ în nodurile $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ aparținând intervalului de definiţie I.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x_0 \in I$$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b, \ [a, b] \subset I$$

Demonstratia 1 – pe tablă

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!} \cdot f'(x_i, y_i) + \ldots + \frac{h^n}{n!} \cdot f^{(n-1)}(x_i, y_i) + R_n(x_i)$$

$$R_n(x_i) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n)}(\xi, y(\xi)), \quad x_i < \xi < x_{i+1}$$

Aproximaţia este cu atât mai bună cu cât numărul de termeni luaţi în considerare în dezvoltarea Taylor este mai mare. Metoda este directă întrucât pentru calculul lui y_{i+1} sunt necesare informaţii numai despre punctul anterior (x_i, y_i).

Dacă se consideră doar primii trei termeni din descompunerea în serie Taylor $n = 2$ ($R_n(x)=0$) atunci se obține următoarea formulă aproximativă de calcul:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \left[f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} \cdot \left[f_x(x_i, y_i) + f(x_i, y_i) \cdot f_y(x_i, y_i) \right] \right]$$

Metoda dezvoltarii in serie Taylor

Fie circuitul **R-L serie** din cadrul aplicaţiei prezentate pentru care avem cunoscute parametrii electrici: *E = 12V, R = 4Ω* şi *L = 3,2uH*. Să se determine curentul prin bobina de inductivitate *L* după închiderea întrerupătorului *K* (t ia valori pe intervalul [0;40ms])

Pasul 1. Se definesc parametri electric ai circuitului **R-L serie**:

$E := 12 \qquad R := 4 \qquad L := 32\cdot 10^{-6} \qquad f := 50 \qquad \omega := 2\cdot\pi\cdot f \qquad \omega = 314.159$

Pasul 2. Se scrie ecuaţia diferenţial ce descrie funcţionarea circuitului **R-L serie**:

$$\omega\cdot L\cdot\frac{d}{dt}i(t) + R\cdot i(t) = E\cdot\cos(\omega\cdot t)$$

Pasul 3. Se extrage derivata curentului din ecuaţia diferenţială corespunzătoare circuitului:

$$\frac{d}{dt}i(t) = \frac{1}{\omega\cdot L}\cdot(E\cdot\cos(\omega\cdot t) - R\cdot i(t))$$

Pasul 4. Se defineşte funcţia asociată membrului drept a ecuaţiei diferenţiale:

$$F(t,i) := \frac{1}{\omega\cdot L}\cdot\left(E\cdot\cos(\omega\cdot t) - R\cdot i\right)$$

Pasul 5. Se definesc capetele intervalului, numărul de puncte de calcul şi se determină pasul de parcurgere al intervalului de definiţie:

$$t_i := 0 \qquad t_f := 40 \cdot 10^{-3} \qquad N := 500 \qquad h := \frac{t_f - t_i}{N} \qquad h = 8 \times 10^{-5}$$

Pasul 6. Se determină şirul de puncte intermediare t_k în care se evaluează valoarea curentului:

$$k := 0 .. N \qquad t_k := t_i + h \cdot k$$

Pasul 7. Se definesc derivatele parţiale ale funcţiei ataşate, *F*, ecuaţiei diferenţiale:

$$F_t(t,i) := \frac{d}{dt}F(t,i) \qquad F_i(t,i) := \frac{d}{di}F(t,i)$$

Pasul 8. Din condiţia iniţială Cauchy a problemei (întrerupătorul *K* deschis), reiese că valoarea curentului în momentul $t = 0s$ este egală cu $0A$:

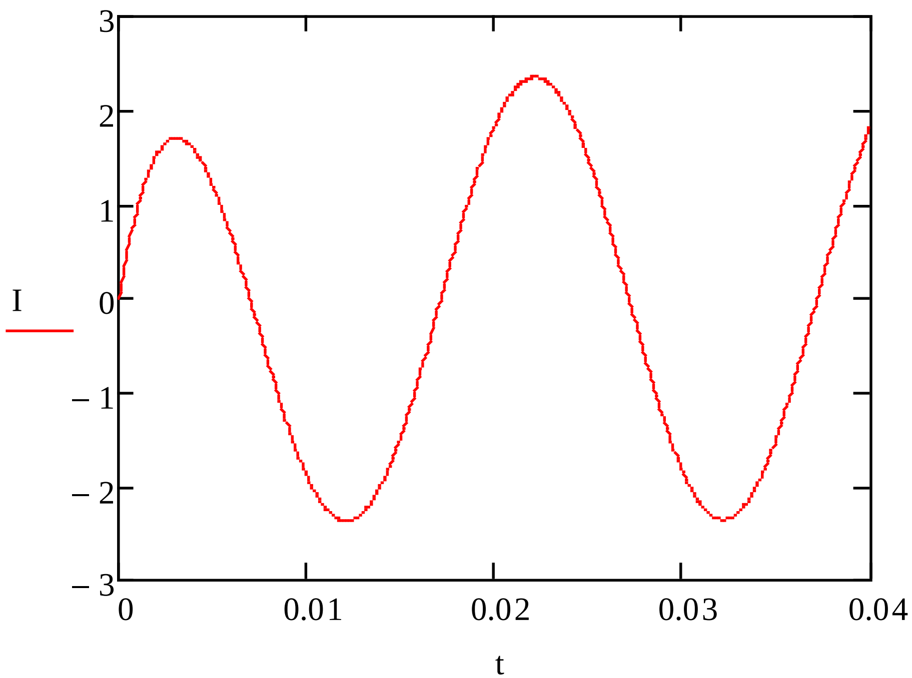
$$I_0 := 0$$

Pasul 9. Se implementează formula recursivă de calcul a valorilor funcţiei, pe baza descompunerii în serie Taylor până la elementul de gradul al II-lea:

$$I_{k+1} := I_k + h\cdot\left[F(t_k, I_k) + \frac{h}{2}\cdot\left(F_t(t_k, I_k) + F(t_k, I_k)\cdot F_i(t_k, I_k)\right)\right]$$

Pasul 10. Se vizualizează valoarea curentului la momentele de timp t_k:

$$I^T = (0 \quad 0.094 \quad 0.185 \quad \cdots \quad 1.811 \quad 1.848 \quad 1.884)$$



II.1 Metoda lui Euler (forma clasică)

Este cea mai simplă metodă de integrare numerică a ecuaţiilor diferenţiale ordinare. Se obţine din metoda Taylor pentru *n=1*, adică se reţin numai primii doi termeni din dezvoltare rezultând forma explicită a **metodei lui Euler**:

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)} \qquad i = 0,\ 1,\ \ldots \qquad \varepsilon \le \frac{h^2}{2!} y''(\xi), \quad x_i < \xi < x_{i+1}$$

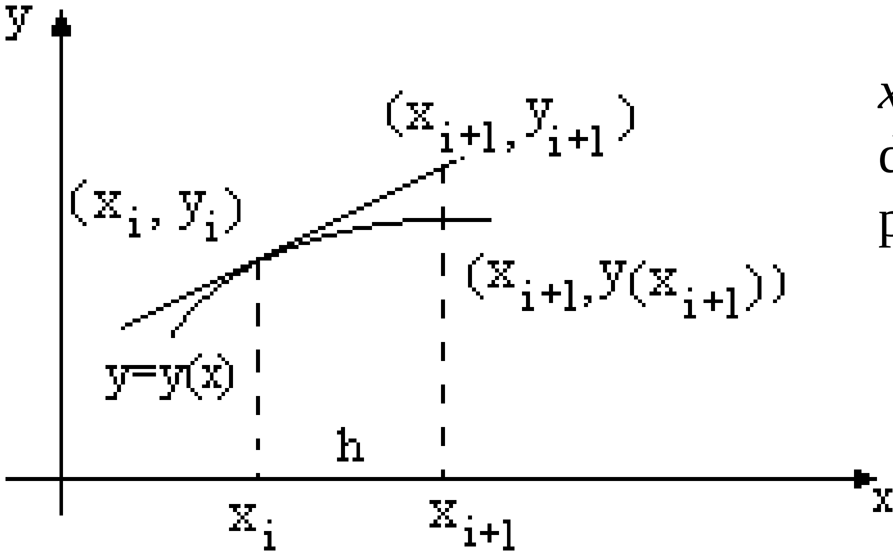
Interpretare geometrică: se alege un pas de integrare *h* astfel încât intervalul de definiţie $[x_0, b]$ să fie împărţit în paşi egali:

$$h = \frac{b - x_0}{N}$$

Astfel avem aceeaşi problemă de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale cu condiţii iniţiale:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

și curba soluției: $y = y(x)$



Prin metoda lui Euler soluţia în nodul x_{i+1} se aproximează cu ordonata punctului de intersecţie a tangentei la curbă în punctul (x_i, y_i) cu dreapta $x=x_{i+1}$.

Ecuaţia tangentei:

$$y = y_i + (x - x_i) \cdot y'(x)$$

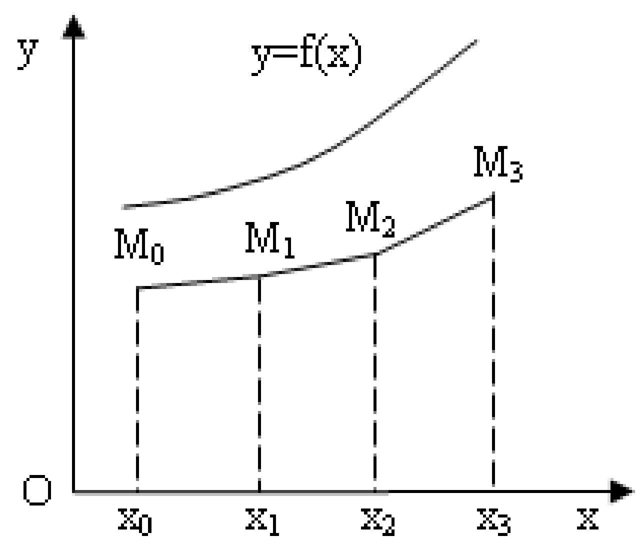
$$y'(x) = f(x_i, y_i)$$

rezultă formula de recurenţă a algoritmului Euler:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

Astfel metoda lui Euler se numeşte şi **metoda liniilor poligonale** pentru că curba *y=y(x)* se înlocuieşte prin linia poligonală M_0, M_1,… conform figurii alăturate.

Dreapta care trece prin M_0 cu coeficientul unghiular $f(x_0,y_0)$ - conform ipotezei prin care ecuaţia diferenţială care formează problema Cauchy dă în orice punct (x,y) **panta curbei**!!!



II.2 Metoda lui Euler (forme îmbunătăţite)

Observaţie: În aplicaţiile electrotehnice utilizarea metodei lui Euler duce la unele dificultăţi din punct de vedere a preciziei metodei.

De aceea se folosesc variante ale metodei lui Euler cu precizie mai mare care folosesc relaţii de recurenţă de forma:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \Phi(x_i, y_i, h)$$

❖ **Metoda lui Euler îmbunătățită (formula Euler-Huen)**

$$\Phi(x_i, y_i, h) = \frac{1}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h \cdot y'_i) \right]$$

unde în dezvoltarea în serie Taylor se reţin primii trei termeni: $y'_i = f(x_i, y_i)$

❖ Metoda lui Euler modificată (formula Euler-Cauchy)

$$\Phi(x_{i-1}, y_{i-1}, h) = f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{h}{2} \cdot y'_{i-1} \right) \qquad y'_i = f(x_i, y_i)$$

În această metodă y' nu se mai aproximează pe intervalul [x_i, x_{i-1}] cu valoarea de la începutul intervalului ci cu o aproximație a valorii de la mijlocul acestui interval.

❖ Metoda lui Euler modificată „predictor – corector”

Rezultă din reuniunea versiunii metodei lui Euler clasică (relaţia predictor) şi a versiunii modificate (relaţia corector).

Cu metoda lui Euler clasică se calculează o primă aproximaţie (valoarea prezisă a soluţiei în punctul următor) adică se iniţializează valoarea lui y_i cu o relaţie:

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + h \cdot f\left(x_i, y_i\right)$$

După aceea la un pas k ($k = 1,2,3,\ldots$) al procesului iterativ de calcul noua valoare a lui y_i rezultă prin aplicarea unei relaţii de recurenţă de forma:

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i^{(k)} + h \cdot \frac{f\left(x_i, y_i^{(k)}\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)}\right)}{2}$$

Calculul se consideră terminat când y_i a fost determinat cu o precizie impusă aprioric, cu alte cuvinte iteraţiile se repetă până când diferenţa dintre două aproximaţii succesive $y_i^{(k)}$ şi $y_i^{(k-1)}$ este mai mică decât o eroare stabilită dinainte, primind atunci ultima valoare calculată.

$$\left| y_i^{(k)} - y_i^{(k-1)} \right| < \varepsilon$$ – eroarea maximă admisibilă impusă

Observaţie: La aceeaşi valoare a pasului de integrare h aceste metode modificate, îmbunătăţite a metodei lui Euler asigură o precizie mai bună şi o soluţionare mai rapidă a ecuaţiilor diferenţiale.

Exemplu Pratic

Fie ecuaţia diferenţială de ordinul I: $y'(x)+3y(x)-\cos\left(x-\frac{\pi}{9}\right)=5-x$ cu condiţia iniţială Cauchy *y(7)=6*, unde *x* ia valori pe intervalul [7,15]. Să se determine valorile funcţiei *y(x)* folosindu-se metoda lui Euler îmbunătăţită (Euler-Heun), respectiv varianta modificată (versiunea Cauchy).

Pasul 1. Se scrie ecuaţia diferenţială ce urmează a fi rezolvată:

$$y'(x) + 3\,y(x) - \cos\left(x - \frac{\pi}{9}\right) = 5 - x$$

Pasul 2. Se extrage derivate funcţiei necunoscute:

$$y'(x) = 5 - x - 3\,y(x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{9}\right)$$

Pasul 3. Se defineşte funcţia asociată ecuaţiei diferenţiale:

$$f(x,y) := 5 - x - 3y + \cos\left(x - \frac{\pi}{9}\right)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Pasul 4. Definirea funcţiei caracteristice metodei îmbunătăţite Euler-Huen:

$$\Phi_{EH}(x,y,h) := \frac{1}{2}\cdot(f(x,y) + f(x+h, y + h\cdot f(x,y)))$$

Pasul 5. Definirea funcţiei caracteristice metodei îmbunătăţite Euler-Huen:

$$\Phi_{EC}(x,y,h) := f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}\cdot f(x,y)\right)$$

Pasul 6. Se definesc capetele intervalului, numărul de puncte de calcul şi se determină pasul de parcurgere al intervalului de definiţie:

$$a := 7 \qquad b := 15 \qquad N := 100 \qquad h := \frac{b-a}{N} \qquad h = 0.08$$

Pasul 7. Se determină şirul de puncte intermediare x_i în care se evaluează valoarea funcţiei necunoscute:

$$i := 0..N \qquad x_i := a + h\cdot i$$

Pasul 8. Se impune condiţia iniţială Cauchy *y(7)=5*:

$$y_{EH_0} := 5 \qquad y_{EC_0} := 5$$

Pasul 9. Se evaluează valorile funcţiei necunoscute conform metodei lui Euler îmbunătăţite (Euler-Heun) :

$$y_{EH_{i+1}} := y_{EH_i} + h\cdot\Phi_{EH}\left(x_i, y_{EH_i}, h\right)$$

Pasul 10. Se evaluează valorile funcţiei necunoscute conform metodei lui Euler modificată (versiunea Cauchy) :

$$y_{EC_{i+1}} := y_{EC_i} + h\cdot\Phi_{EC}\left(x_i, y_{EC_i}, h\right)$$

Pasul 11. Se vizualizează valorile funcţiei necunoscute determinate în punctele x_i:

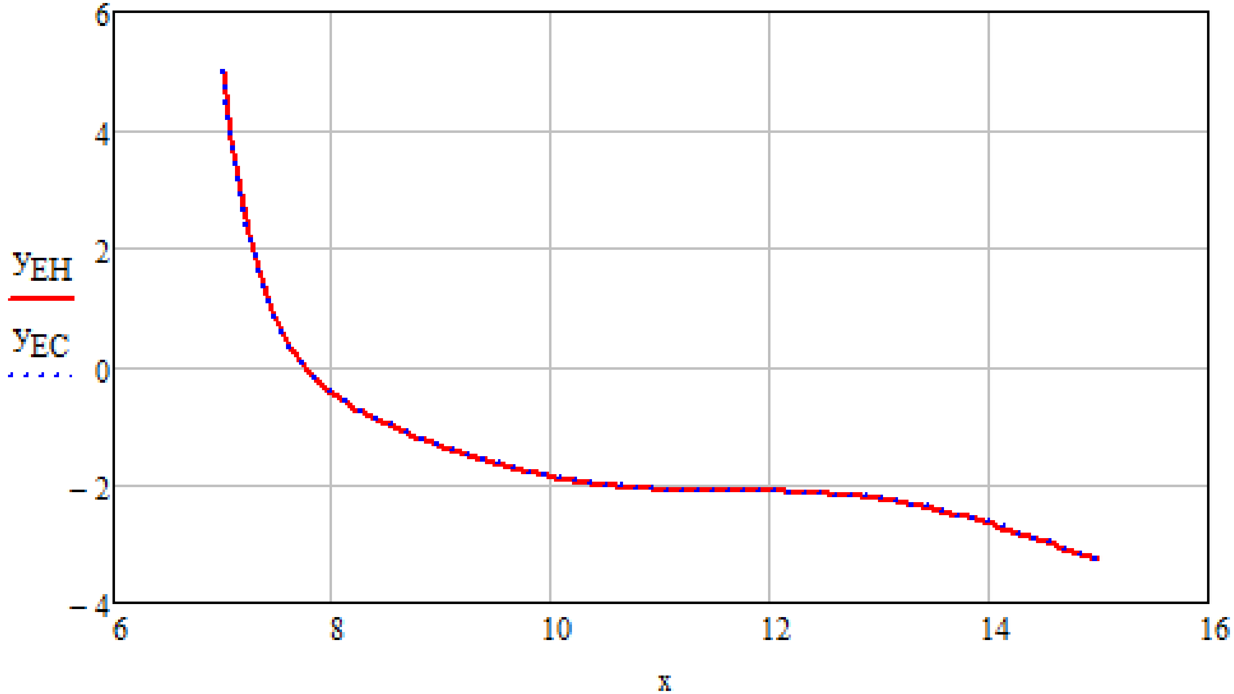
$y_{EH}^T =$

	0	1	2	3	4	5	6
0	5	3.864	2.961	2.239	1.661	1.196	...

$y_{EC}^T =$

	0	1	2	3	4	5	6
0	5	3.864	2.961	2.239	1.661	1.196	...

Pasul 12. Se reprezintă grafic alura funcţiei determinate cu cele două metode:



Pasul 13. Se evaluează abaterea procentuală dintre cele două metode:

$$Err := \frac{1}{N} \cdot \left(\sum_i \frac{\left| y_{EH_i} - y_{EC_i} \right|}{\left| y_{EH_i} \right|} \right) \qquad Err = 0.015\,\%$$

III Metode de tip Runge - Kutta

Metodele lui Euler implică necesitatea evaluării derivatelor de ordin superior ale funcţiei *y(x)* respectiv ale funcţiei *f(x,y)* care duc la **dificultăţi în aproximarea numerică a derivatelor de ordin superior**.

În schimb **metodele de tip Runge – Kutta** evită în totalitate utilizarea derivatelor de ordin superior ele folosind numai derivatele de ordin I ale funcţiei *y(x)*, adică valorile funcţiei *f(x,y)*.

Se calculează valorile funcţiei *f(x,y)* într-un număr de puncte intermediare ale intervalului $[x_i, x_{i+1}]$ pentru determinarea lui y_i cu o eroare minimă.

Cu alte cuvinte metodele Runge – Kutta de integrare numerică a unei ecuaţii diferenţiale, înlocuiesc calculul derivatelor funcţiei *f(x,y)* prin evaluări ale sale în diverse puncte.

Fie ecuaţia diferenţială ordinară cu condiţii iniţiale de forma: $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \qquad x_i = a + h \cdot i,\ i = \overline{1, N} \qquad h = \frac{b-a}{N}$$

o diviziune echidistantă a intervalului [a, b]!!!

Din raţiuni de simplificare a calculelor considerăm combinaţii liniare de valori ale funcţiei în anumite puncte ale intervalului $[x_i, x_{i+1}]$, soluţia calculându-se cu o relaţie unipas de forma:

$$y_{i+1} = y_i + a_0 \cdot k_0 + a_1 \cdot k_1 + \ldots + a_n \cdot k_n$$

unde, din condiţia ca dezvoltarea în serie Taylor a membrului drept (în funcţie de *h*) să coincidă cu membrul drept al formulei lui Taylor de ordinul $n+1$, avem şi formula dedusa şi toţi coeficienţii după particularizări:

Particularizând parametrul *n* se determină diverse formule:

- **Runge – Kutta de orinul I (n=0):** y_0 – dat

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)}$$

-- fomula lui Euler clasică

- **Runge – Kutta de orinul II (n=1):** y_0 – dat

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_0 + k_1)}$$

$$k_0 = h \cdot f(x_i, y_i) \qquad k_1 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_0)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h \cdot f(x_i, y_i))\right]$$

fomula modificată a lui Euler (Euler-Huen)

- **Runge – Kutta de orinul III (n=2):** $y_0 - \text{dat}$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_0 + 4k_1 + k_2\right)$$

$$k_0 = h \cdot f\left(x_i, y_i\right) \quad k_1 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}\right) \quad k_2 = h \cdot f\left(x_i + h, y_i + 2k_1 - k_0\right)$$

- **Runge – Kutta de orinul IV (n=3):** $y_0 - \text{dat}$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_0 + 2k_1 + 2k_2 + k_3\right)$$

$$k_0 = h \cdot f\left(x_i, y_i\right) \quad k_1 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}\right) \quad k_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = h \cdot f\left(x_i + h, y_i + k_2\right)$$

Aceste formule sunt foarte utilizate în aplicaţiile din domeniul electrotehnic - complicate şi pretenţioase din punct de vedere a preciziei!!!

Curs 12

Metode Numerice de Rezolvare a Sistemelor de Ecuații Diferențiale

Ș.l. Dr. ing. **Levente CZUMBIL**

Laboratorul de Cercetare în Metode Numerice

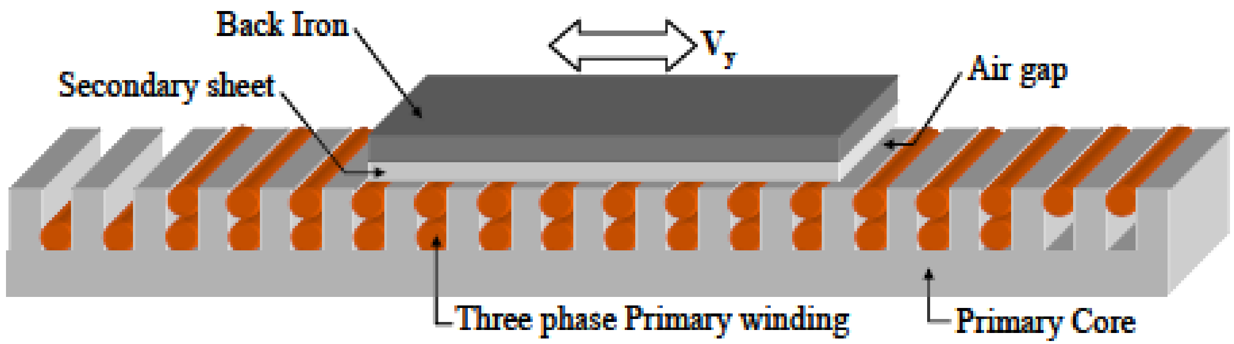
Departamentul de Electrotehnică, Inginerie Electrică

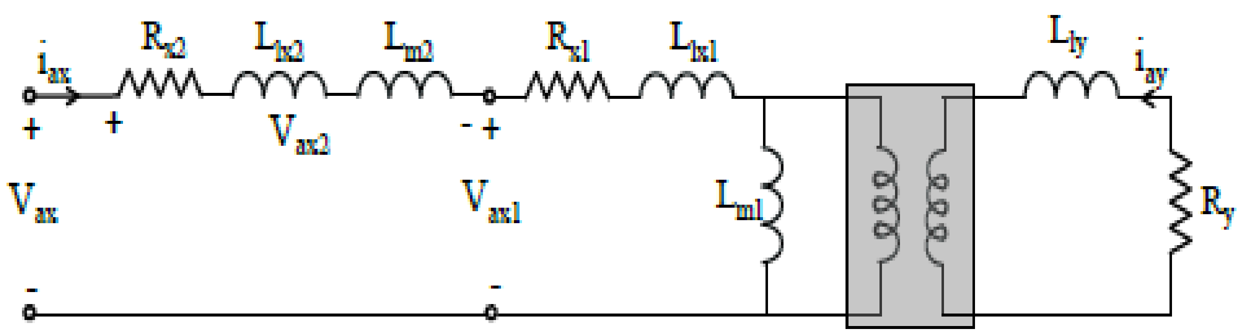
E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

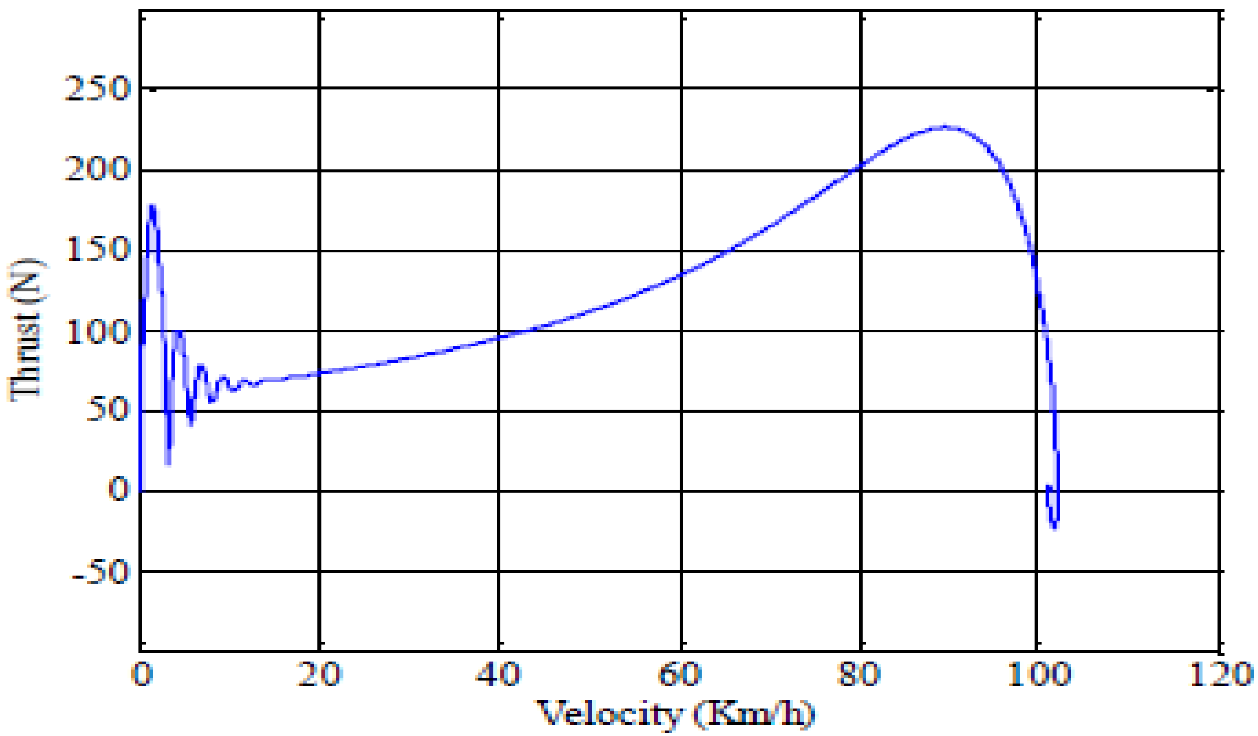
Aplicaţii

❖ **Studiul performanţelor dinamice ale motoarelor liniare de inducţie**, atunci când se realizează compensarea serie este o problemă studiată în domeniul proiectării maşinilor electrice, acolo unde este necesar să să obţină cupluri de pornire şi acceleraţii ridicate. Aplicaţii: **utilaje industriale**, **tracţiune electrică**.





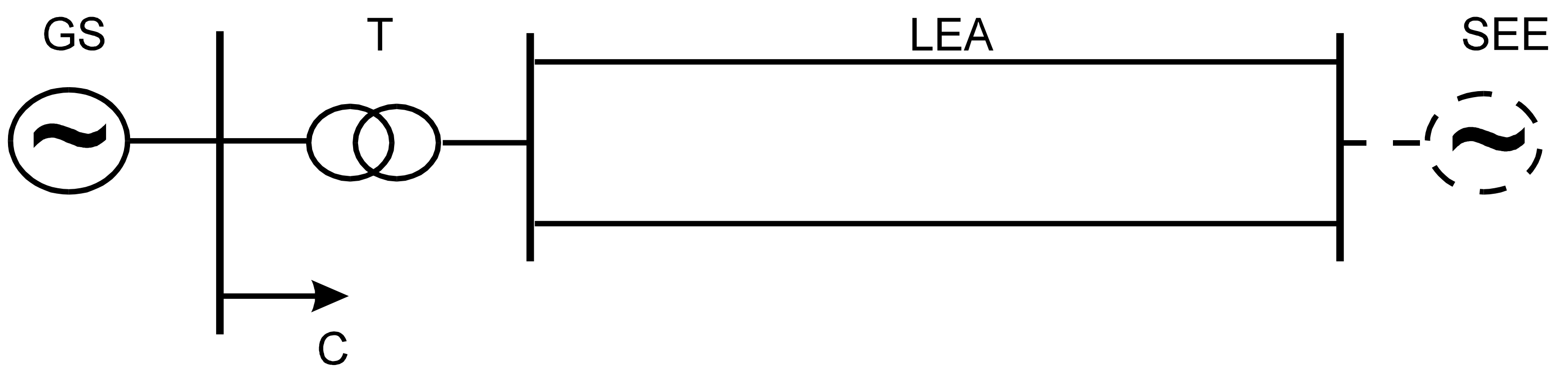
Modelul matematic al acestui circuit este constituit dintr-un sistem de ecuaţii diferenţiale, de unde rezultă variaţia curentului în condiţii dinamice. Pe baza expresiei numerice a curentului, se deduce variaţia cuplului, în raport cu reglajul vitezei maşinii liniare:



Aplicaţii

- Calculul regimului tranzitoriu al unui motor electric asincron; sistem de ecuaţii diferenţiale;
- **Studiul efectului de stimulare magnetică a ţesuturilor nervoase;**
- Determinarea caracteristicilor magnetice neliniare ale unor dispozitive electromagnetice, prin testarea experimentală cu semnale alternative sinusoidale, sau în trepte;
- Caracterizarea comportării în regim dinamic a motoarelor cu reluctanţă variabilă (SRM), în vederea îmbunătăţirii parametrilor constructivi pentru reducerea variaţiilor rapide de cuplu;
- **Reprezentarea ca şi circuit şi simularea funcţională a unei celule nervoase;**
- Proiectarea cuplajelor motor – maşină de lucru, care utilizează fluide magneto-rheologice, cu proprietăţi de orientare sub acţiunea unui câmp magnetic;

❖ **Analiza stabilităţii la mari perturbaţii a unui generator electric racordat la un Sistem ElectroEnergetic (SEE)**



Cunoscând parametrii elementelor de sistem şi datele referitoare la un anumit regim de funcţionare, se cere să se elaboreze un program de calcul pentru analiza stabilităţii la mari perturbaţii a generatorului sincron (GS) prin rezolvarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale care descriu funcţionarea în regim tranzitoriu a SEE.

Analiza stabilităţii la mari perturbaţii se face prin integrarea ecuaţiei **diferenţiale de mişcare a ansamblului rotoarelor generatorului şi turbinei**:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \frac{1}{M} \cdot \left(P_m - P_e - H \cdot \omega\right)$$

rezultând **curba de variaţie în timp** a unghiului intern δ al generatorului (curba de oscilaţie) şi cea a vitezei unghiulare ω (reprezentând, de fapt, abaterea vitezei unghiulare faţă de turaţia sincronă ω_s = 314 rad/s la 50 Hz)

Analiza formei acestor curbe oferă informaţii în privinţa stabilităţii sau a instabilităţii generatorului la perturbaţia considerată.

- M - constanta mecanică a ansamblului turbină-generator;
- P_m - puterea mecanică a GS;
- P_e - puterea electrică a GS;
- H - constanta de amortizare (înglobând efectele tuturor surselor de amortizare a oscilaţiilor).

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Rezolvarea Sistemelor de Ecuaţii Diferenţiale de ordinul I

Se consideră un sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare cu condiţiile iniţiale de mai jos, această problemă fiind cunoscută după cum ştim ca problema Cauchy sau problema cu condiţii iniţiale:

$$y'_i = \frac{dy_i}{dx} = f\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_r\right) \qquad y_i\left(x_0\right) = y_{i0}, \; i = 1,2,\ldots,r$$

Se cere determinarea funcţiilor $y_i(x)$ care verifică sistemul şi condiţiile iniţiale, adică determinarea valorilor $y_{i,1}$, $y_{i,2}$, …, $y_{i,n}$ care să aproximează cât mai bine valorile exacte $y_i(x_1), y_i(x_2),\ldots, y_i(x_n)$ ale funcţiilor $y_i(x)$.

Observaţie: Punctele $x_1, x_2,\ldots, x_n$ sunt echidistante pasul h fiind: $h = x_{j+1} - x_j$.

Metodele de rezolvare rămân aceleaşi ca şi la ecuaţiile diferenţiale noi prezentând aici doar o adaptare a acestor metode pentru sistemele de ecuaţii diferenţiale.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

❖ Metoda lui Euler (formula clasică):

Se aplică în *n* pași, valorile corespunzătoare ale funcţiilor $y_i(x)$, i=1,2,…,r la un pas j, j=1,2,…,n se determină cu relațiile:

$$y_{1,j} = y_{i,j-1} + h \cdot f_i\left(x_{j-1}, y_{1,j-1}, y_{2,j-1}, \ldots, y_{r,j-1}\right) = y_{i,j-1} + h \cdot f_{i,j-1}$$

i – numărul ecuaţiei; j – numărul intervalului (pasului punctului de la finele intervalului).

❖ Metoda lui Euler (formula modificată):

$$y_{i,j} = y_{i,j-1} + \frac{h}{2}\left[f_{i,j-1} + f_i\left(x_j, y_{1,j-1} + hf_{1,j-1}, y_{2,j-1} + hf_{2,j-1}, \ldots, y_{r,j-1} + hf_{r,j-1}\right)\right]$$

❖ Metoda lui Runge – Kutta de ordinul IV:

$$y_{i,j} = y_{i,j-1} + \frac{1}{6}\left(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}\right)$$

$$k_{1,i} = h \cdot f\left(x_{j-1}, y_{1,j-1}, y_{2,j-1}, \ldots, y_{r,j-1}\right)$$

$$k_{2,i} = h \cdot f\left(x_{j-1} + \frac{1}{2}h, y_{1,j-1} + \frac{1}{2}k_{1,1}, y_{2,j-1}, \ldots, y_{r,j-1} + \frac{1}{2}k_{1,r}\right)$$

$$k_{3,i} = h \cdot f\left(x_{j-1} + \frac{1}{2}h, y_{1,j-1} + \frac{1}{2}k_{2,1}, y_{2,j-1}, \ldots, y_{r,j-1} + \frac{1}{2}k_{2,r}\right)$$

$$k_{4,i} = h \cdot f\left(x_j, y_{1,j-1} + k_{3,1}, y_{2,j-1} + k_{3,2}, \ldots, y_{r,j-1} + k_{3,k}\right)$$

Exemplu Practic

Se dă sistemul de ecuaţii diferenţiale cu condiţii iniţiale Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx} y0(x) = \sin(x) - \dfrac{y1(x)}{4} & y0(0) = \dfrac{\pi}{5} \\ \dfrac{d}{dx} y1(x) = \dfrac{3}{4} y0(x) - 2\cos(x) & y1(0) = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Să se determine valorile funcţiilor , *y0(x), y1(x)* pe intervalul [0,10π].

Pasul 1. Se definesc funcţiile caracteristice asociate ecuaţiile diferenţiale ce formează sistemul studiat.

$$f_1(x, y0, y1) := \sin(x) - \frac{y1}{4}$$

$$f_2(x, y0, y1) := \frac{3}{4} \cdot y0 - 2\cos(x)$$

Pasul 2. Se definesc capetele intervalului, numărul de puncte intermediare de calcul şi se determină pasul de parcurgere al intervalului de definiţie:

$$a := 0 \qquad b := 10\pi \qquad N := 100 \qquad h := \frac{b - a}{N} \qquad h = 0.314$$

Pasul 3. Se determină şirul x_i de intermediare în care se doreşte calcularea valorilor funcţiilor necunoscute $y_i(x)$:

$$i := 0..N \qquad x_i := a + h \cdot i$$

Pasul 4. Se introduc condiţiile iniţiale Cauchy care descriu soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale:

$$y0_0 := \frac{\pi}{5} \qquad y1_0 := \frac{3\pi}{4}$$

Pasul 5. Se calculează valoarea funcţiilor necunoscute în punctele intermediare x_i folosindu-se metoda lui Euler (forma clasică):

$$\begin{array}{l|l} \text{Rez} := & Y_{0,0} \leftarrow y0_0 \\ & Y_{1,0} \leftarrow y1_0 \\ & \text{for } j \in 1..N \\ & \quad \left| \begin{array}{l} Y_{0,j} \leftarrow Y_{0,j-1} + h \cdot f_1\left(x_{j-1}, Y_{0,j-1}, Y_{1,j-1}\right) \\ Y_{1,j} \leftarrow Y_{1,j-1} + h \cdot f_2\left(x_{j-1}, Y_{0,j-1}, Y_{1,j-1}\right) \end{array} \right. \\ & Y \end{array}$$

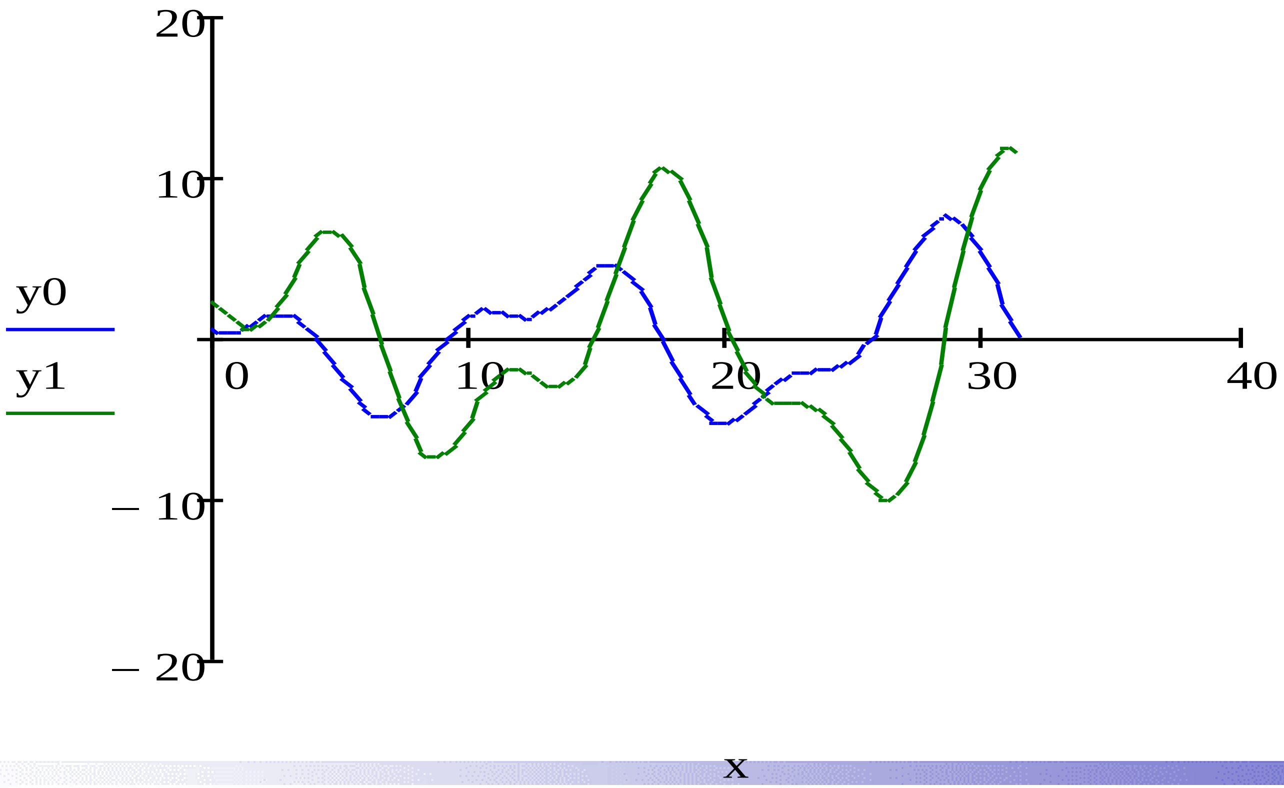
Pasul 6. Se extrag valorile funcţiilor necunoscute y0(x), y1(x):

Rez =

	0	1	2	3	4	5	6
0	0.628	0.443	0.393	0.469	0.647	0.89	1.152
1	2.356	1.876	1.383	0.967	0.708	0.667	...

$$y0 := \left(Rez^T\right)^{\langle 0\rangle} \qquad y1 := \left(Rez^T\right)^{\langle 1\rangle}$$

Pasul 7. Se reprezintă grafic soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale:



Rezolvarea Ecuaţiilor Diferenţiale de ordin Superior

Fie ecuaţia diferenţială de ordin *r*: $$\frac{d^r y}{dx^r} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{r-1} y}{dx^{r-1}}\right)$$

cu condițiile inițiale: $$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(r-1)}(x_0) = y_0^{(r-1)} \end{cases}$$

Se dorește determinarea valorilor $y_1, y_2, \dots, y_n$ care să aproximeze cât mai bine valorile exacte $y(x_1), y(x_2), \dots, y(x_n)$ ale lui $y(x)$, punctele $x_0, x_1, \dots, x_N$ fiind echidistante.

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Se transformă ecuaţia diferenţială de ordin *r* într-un sistem de *r* ecuaţii diferenţiale ordinare care se rezolvă cu metodele cunoscute din paragraful precedent:

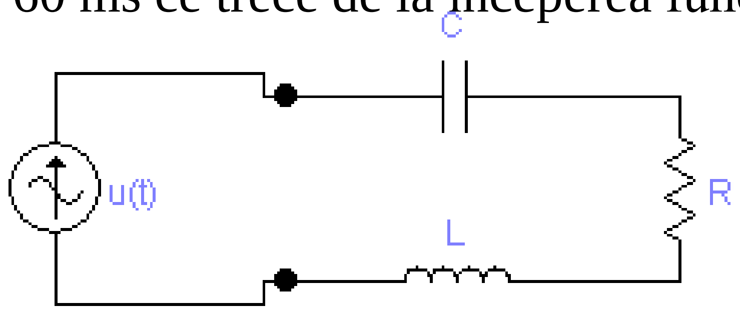
$$\begin{cases} y'_1 = \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ y'_2 = \dfrac{dy_2}{dx} = y_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y'_r = \dfrac{dy_r}{dx} = f\left(x, y_1, y_2, \dots, y_r\right) \end{cases}$$

cu condițiile inițiale:

$$\begin{cases} y_{1,0} = y_0 = y\left(x_0\right) \\ y_{2,0} = y'_0 = y'\left(x_0\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{r,0} = y_0^{(r-1)} = y^{(r-1)}\left(x_0\right) \end{cases}$$

Exemplu Practic

Se consideră un circuit R,L,C serie alimentat de la o tensiune oarecare *u(t)*. Să se determine variaţia sarcinii electrice şi a intensităţii curentului electric din circuit în intervalul de timp de 60 ms ce trece de la începerea funcţionării.



$L := 0.2 \;\; \mathrm{H} \qquad C := 30 \cdot 10^{-6} \;\; \mathrm{F} \qquad R := 12 \;\; \Omega \qquad u(t) := 24 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t)$

Se scrie teorema a doua a lui Kirchhoff pentru circuitul R,L,C serie de mai sus:

$$L \cdot \frac{d}{dt} i(t) + R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int i(t)dt = u(t)$$

Se aplică legea conservării sarcinii electrice:

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t) \Rightarrow q(t) = \int i(t)dt \quad \text{şi} \quad \frac{d}{dt} i(t) = \frac{d^2}{dt^2} q(t)$$

Se rescrie ecuaţia integro-diferenţială obţinută din teorema a doua a lui Kirchhoff sub formă de ecuaţie diferenţială de ordinul II:

$$L \cdot \frac{d^2}{dt^2} q(t) + R \cdot \frac{d}{dt} q(t) + \frac{1}{C} \cdot q(t) = u(t)$$

Se transformă ecuaţia diferenţială de ordinul II într-un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul I prin aplicarea următoarelor notaţii *q0(t)=q(t)* şi *q1(t)=q0'(t)*

$$\begin{cases} q1(t) = \dfrac{d}{dt} q0(t) \\ L \cdot \dfrac{d}{dt} q1(t) + R \cdot q1(t) + \dfrac{1}{C} \cdot q0(t) = u(t) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} q0(t) = q1(t) & q0(0) = 0 \\ \dfrac{d}{dt} q1(t) = \dfrac{u(t) - R \cdot q1(t) - \dfrac{1}{C} \cdot q0(t)}{L} & q1(0) = 0 \end{cases}$$

Pasul 1. Se defineşte vectorul de funcţii D(t,Q) asociat membrului drept al sistemului de ecuaţii diferenţiale. Pentru indici 0,1 şi 2 se foloseşte tasta „[”:

$$D(t,Q) := \begin{pmatrix} Q_1 \\ \dfrac{u(t) - R \cdot Q_1 - \dfrac{1}{C} \cdot Q_0}{L} \end{pmatrix}$$

Pasul 2. Se definesc capetele intervalului de studiu şi numărul de puncte intermediare. Indicii *i* şi *f* se introduc cu tasta „.”:

$$t_i := 0 \qquad t_f := 60 \cdot 10^{-3} \qquad N := 1000$$

Pasul 3. Se defineşte vectorul valorilor iniţiale: $Q0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pasul 4. Se apelează funcţia predefinită ***Rkadapt***:

$$Sol := Rkadapt\left(Q0, t_i, t_f, N, D\right)$$

Pasul 5. Se separă vectorul punctelor intermediare *t* şi al valorilor funcţiilor necunoscute *q(t)* şi *i(i)* în aceste puncte din matricea *Sol* rezultată. Separarea vectorilor *x*, *y0*, *y1* şi *y2* se face cu ajutorul comenzii Matrix Column din toolbar-ul Matrix (combinaţia de taste ”**Ctrl+6**”):

$$t := Sol^{\langle 0 \rangle} \qquad q := Sol^{\langle 1 \rangle} \qquad i := Sol^{\langle 2 \rangle}$$

Pasul 6. Se reprezintă grafic soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale: