

Aproximarea Numerică a Funcțiilor



Laboratorul de Cercetare
în METODE NUMERICE
NUMERICAL METHODS
Research Laboratory

Technical University of Cluj-Napoca

Ș.l. Dr. ing. Levente CZUMBIL

E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro

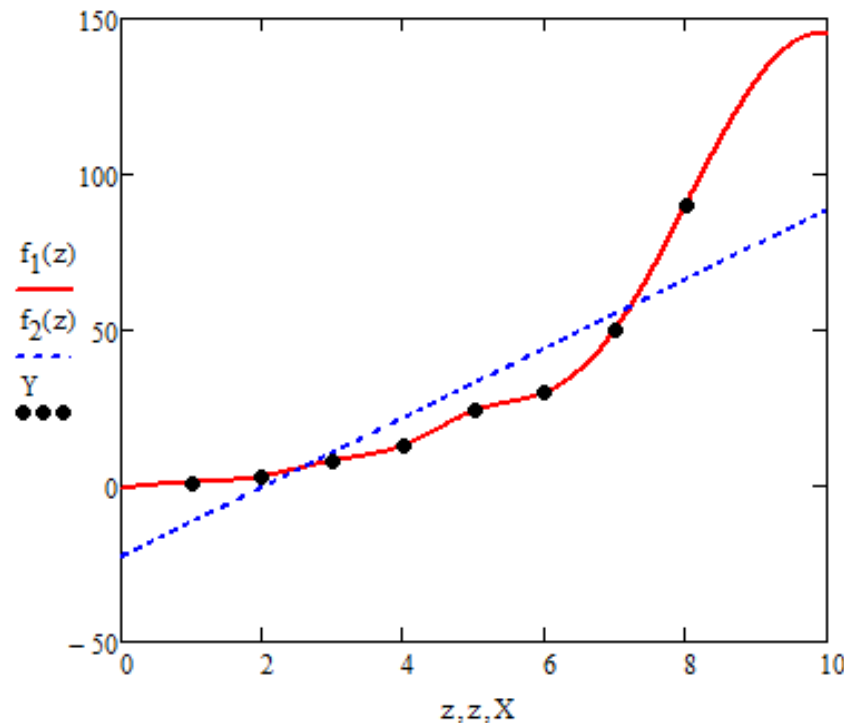
WebPage: <http://users.utcluj.ro/~czumbil>

Introducere

În general în aplicațiile din domeniul electrotehnic **nu se cunoaște expresia analitică** a funcției care trebuie aproximată ci **doar valorile** ei într-un anumit număr de puncte.

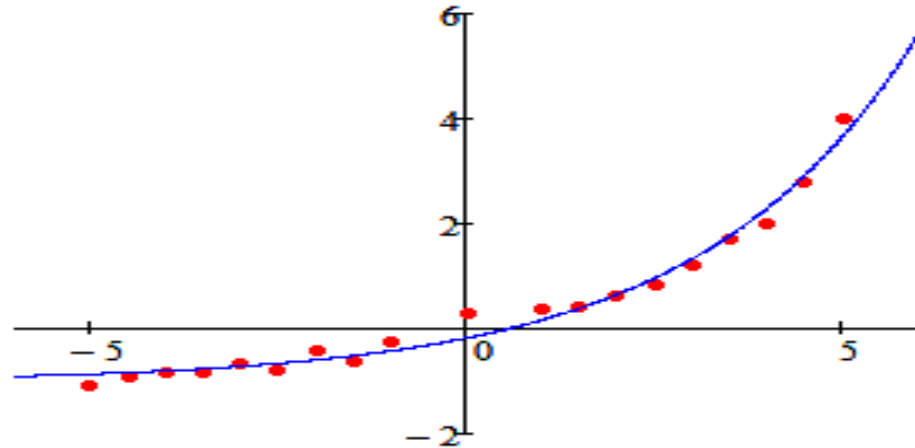
În cadrul procesului de aproximare numerică se pot utiliza două tipuri de funcții:

- funcții de **interpolare**, care **trec prin toate punctele cunoscute**;
- funcții de **aproximare**, care **nu trec prin toate punctele cunoscute**, dar au o formă predefinită;



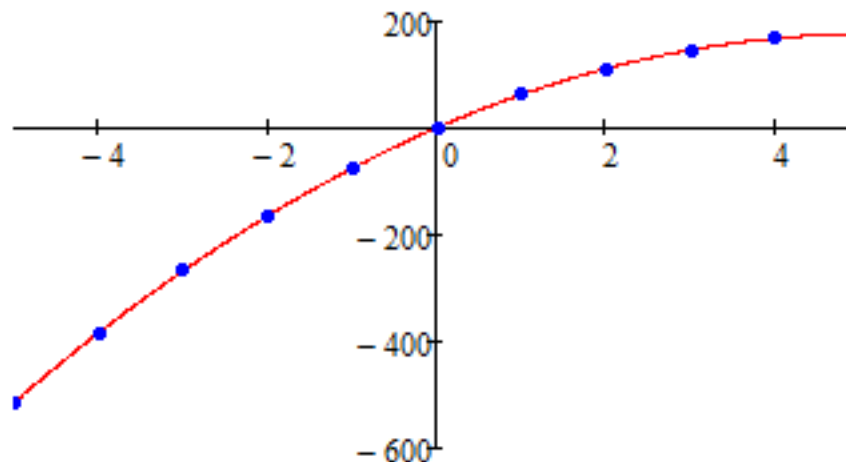
Aproximarea bazată pe funcții având o anumită formă predefinită:

- **line**
- **medfit**
- **linfit**
- **logfit**
- **expfit**
- **genfit**



Interpolarea folosind funcțiile predefinite de tip **spline** din Mathcad:

- **interp**
- **linterp**
- **lspline**
- **pspline**
- **cspline**



Aproximarea cu abatere medie pătratică minimă

Se utilizează pentru aproximarea funcțiilor definite prin noduri ale căror coordonate prezintă un oarecare grad de incertitudine. Este cazul funcțiilor ce exprimă dependențe obținute experimental prin măsurători sau ca urmare a unor calcule care folosesc rezultatele măsurătorilor.

Funcția de aproximare $f(x)$ nu trece prin toate cele n noduri sau chiar prin nici unul dar este cel mai aproape de toate acestea. Metoda urmărește minimizarea erorii calculate de norma euclidiană (suma pătratelor abaterilor dintre datele experimentale și cele determinate teoretic).

$$f(x) = m \cdot x + b$$

$$F(m, b) = \sum_{k=1}^n [y_k - f(x_k)]^2$$

Determinarea aproximării în sensul celor mai mici pătrate se reduce la rezolvarea unui sistem de ecuații algebrice liniare cu un număr de ecuații mai mare decât numărul de necunoscute, care este supradeterminat.

$$\begin{cases} m \cdot \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) + b \cdot \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) = \sum_{k=1}^n x_k \cdot y_k \\ m \cdot \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) + b \cdot \left(\sum_{k=1}^n 1 \right) = \sum_{k=1}^n y_k \end{cases}$$



Aproximarea cu abatere medie pătratică minimă

Fie un șir de puncte $x(i)$ cărora le corespund valorile $y(i)$. Să se aproximeze printr-un polinom de gradul 2 funcția de legătură dintre cele două șiruri de valori.

Pasul 1. Se definesc cele două șiruri $x(i)$, respectiv $y(i)$. Pentru definirea șirului de valori $y(i)$ se folosește funcția: $f(x) = -6.78 \cdot x^2 + 69 \cdot x + 1$

$$f(x) := -6.78x^2 + 69x + 1$$

$$n := 9 \quad i := 0..n \quad x_i := i - 5 \quad y_i := f(x_i)$$

$$x^T = (-5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$$

$$y^T = (-513.5 \quad -383.48 \quad -276.02 \quad -164.12 \quad -74.78 \quad 1 \quad 63.22 \quad 111.88 \quad 146.98 \quad 168.52)$$

Pasul 2. Polinom de gradul 2 care trebuie să aproximeze funcția de legătură dintre șirurile $x(i)$ și $y(i)$ are forma: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

Pe baza acestui polinom eroarea medie pătratică va fi definită de următoarea formulă:

$$ErrMedPat(a, b, c) := \sum_{k=0}^n \left[y_k - \left[a \cdot (x_k)^2 + b \cdot x_k + c \right] \right]^2$$



Aproximarea cu abatere medie pătratică minimă

Pasul 3. Condiția de minimizare a abaterii medii pătratice este dată sistemul de ecuații reprezentate de derivatele parțiale ale acestei abateri în funcție de coeficienții a , b și c ai polinomului de aproximare:

$$\frac{d}{da} ErrMedPat(a, b, c) = 0 \quad \frac{d}{db} ErrMedPat(a, b, c) = 0 \quad \frac{d}{dc} ErrMedPat(a, b, c) = 0$$

Pasul 4. Acest sistem de ecuații se rezolvă folosindu-se blocul SOLVE, funcția **MINERR**: (sau FIND)



Aproximarea cu abatere medie pătratică minimă

Guess Values

$$\begin{aligned}a &:= 1 \\ b &:= 1 \\ c &:= 1\end{aligned}$$

Constraints

$$a \cdot \left[\sum_{k=0}^n (x_k)^4 \right] + b \cdot \left[\sum_{k=0}^n (x_k)^3 \right] + c \cdot \left[\sum_{k=0}^n (x_k)^2 \right] = \sum_{k=0}^n \left[(x_k)^2 \cdot y_k \right]$$

$$a \cdot \left[\sum_{k=0}^n (x_k)^3 \right] + b \cdot \left[\sum_{k=0}^n (x_k)^2 \right] + c \cdot \left(\sum_{k=0}^n x_k \right) = \sum_{k=0}^n (x_k \cdot y_k)$$

$$a \cdot \left[\sum_{k=0}^n (x_k)^2 \right] + b \cdot \left[\sum_{k=0}^n x_k \right] + c \cdot \left(\sum_{k=0}^n 1 \right) = \sum_{k=0}^n y_k$$

Solver

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} := \text{minerr}(a, b, c)$$



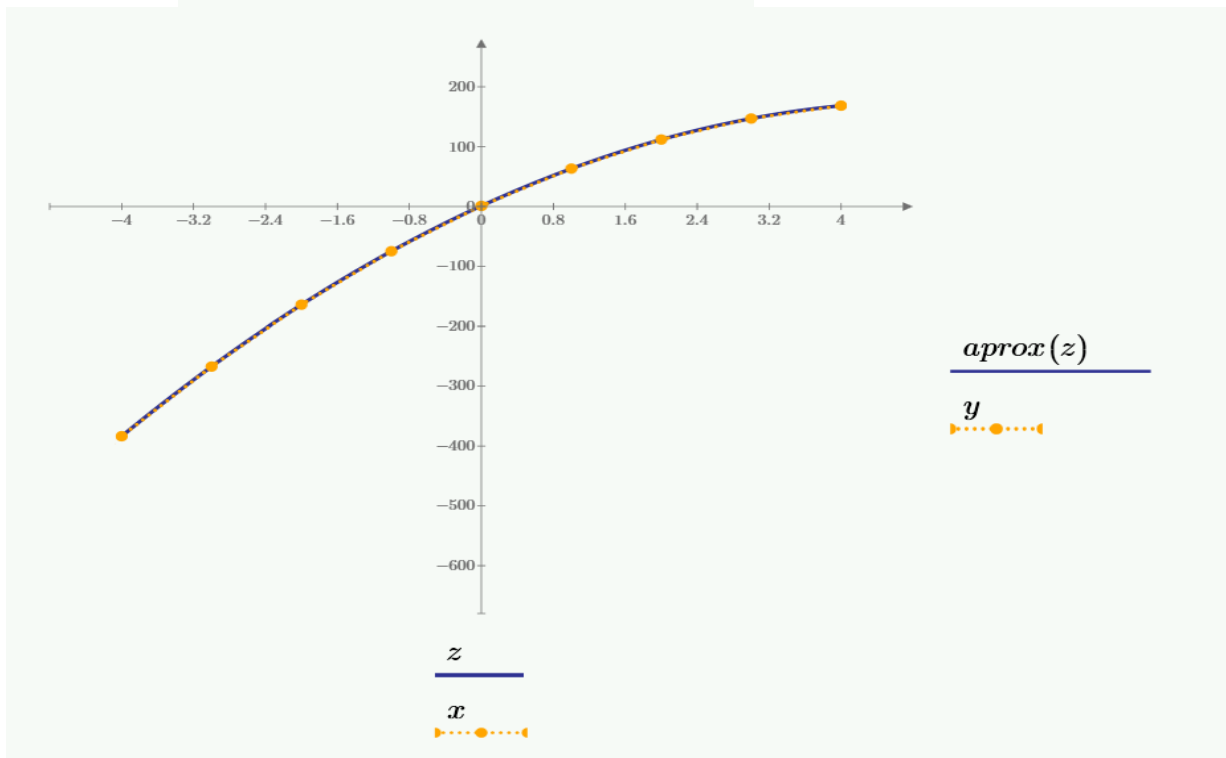
Aproximarea cu abatere medie pătratică minimă

Pasul 5. Astfel coeficienții polinomului de aproximare vor fi egali cu:

$$a = -6.78 \quad b = 69 \quad c = 1$$

Pasul 6. Pe baza coeficienților a , b și c se reconstituie polinomul de aproximare și se reprezintă grafic:

$$\text{aprox}(z) := a \cdot z^2 + b \cdot z + c$$



Aproximarea folosind funcții predefinite din Mathcad

În timpul unui experiment de laborator, se execută niște măsurători în punctele x_i , care aparțin vectorului \mathbf{X} . Rezultatele măsurătorilor y_i se trec în vectorul \mathbf{Y} . Să se aproximeze funcția exponențială de legătură dintre mărimile de intrare și rezultatele obținute.

Pasul 1. Se definesc vectori \mathbf{X} și \mathbf{Y} .

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Y} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 9 \\ 24 \\ 45 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Pasul 2. Pentru aproximarea legăturii dintre rezultatele obținute și mărimile de intrare se folosește o funcție exponențială de forma:

$$f(x) = \text{coef}_0 \cdot e^{\text{coef}_1 \cdot x} + \text{coef}_2$$

a cărei coeficienți se determină cu ajutorul funcției **expfit**.

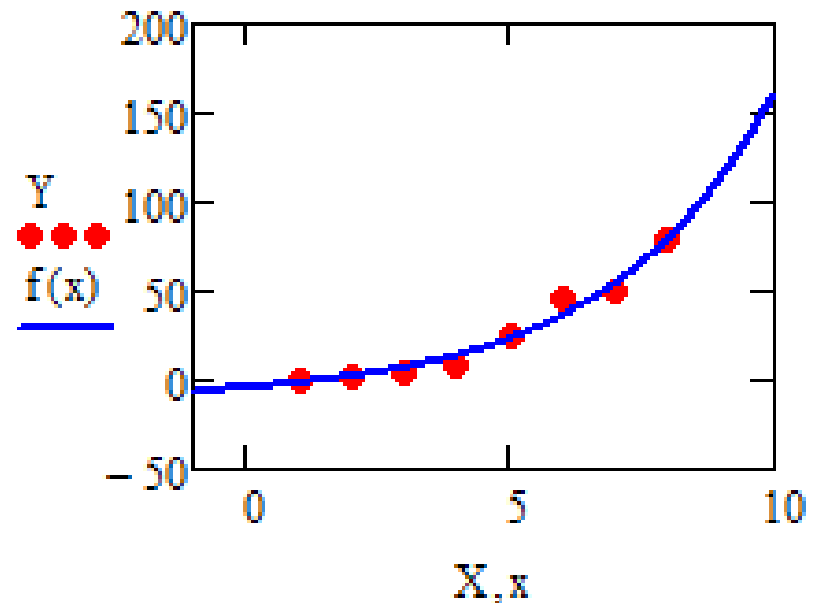
Aproximarea folosind funcții predefinite din Mathcad

Această funcție primește ca și parametrii vectorii **X** și **Y** respectiv **vectorul coeficienților funcției exponențiale** care trebuie predefiniți:

$$\text{coef} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{coef} := \text{expfit}(X, Y, \text{coef}) \quad \text{coef} = \begin{pmatrix} 5.13 \\ 0.354 \\ -7.651 \end{pmatrix}$$

Pasul 3. Se definește și se reprezintă grafic funcția exponențială de aproximare. Limitele de afișare pentru axa OX se setează de la -1 la 10.

$$f(x) := \text{coef}_0 \cdot e^{\text{coef}_1 \cdot x} + \text{coef}_2$$



Aproximarea folosind funcții predefinite din Mathcad

Să se aproximeze funcția de legătură dintre mărimile de intrare și rezultatele obținute prin măsurători de la problema anterioară, folosind funcțiile predefinite din MathCad: **line**, **medfit**, **linfit**, **logfit**, **expfit** și **genfit** și să se compare rezultatele obținute.

$$X := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$Y := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 9 \\ 24 \\ 45 \\ 50 \\ 80 \end{bmatrix}$$

Pasul 2. Se definesc pe rând funcțiile de interpolare, bazate pe diferitele metode de calcul a coeficienților:

$$coef := [1 \ 1 \ 1]^T$$

$$coef := \text{logfit}(X, Y, coef)$$

$$f_{\text{logfit}}(z) := coef_0 \cdot \ln(z + coef_1) + coef_2$$

Aproximare logaritmică

Aproximarea folosind funcții predefinite din Mathcad

$$coef := \text{line}(X, Y)$$

$$f_{line}(z) := coef_1 \cdot z + coef_0$$

Aproximare liniară – bazată pe eroarea minimă pătratică

$$coef := [1 \ 1 \ 1]^T$$

$$coef := \text{expfit}(X, Y, coef)$$

$$f_{expfit}(z) := coef_0 \cdot e^{coef_1 \cdot z} + coef_2$$

Aproximare exponențială

$$coef := \text{medfit}(X, Y)$$

$$f_{medfit}(z) := coef_1 \cdot z + coef_0$$

Aproximare liniară – bazată pe regresione mediană-mediană



Aproximarea folosind funcții predefinite din Mathcad

Aproximare **generalizată liniară**: funcția de aproximare este o combinație liniară de funcții de aproximare:

$$f(x) = \text{coef}_0 \cdot f_0(x) + \text{coef}_1 \cdot f_1(x) + \dots + \text{coef}_n \cdot f_n(x)$$

$$f(x) := (\ln(x) \quad \sqrt{x} \quad 1)^T$$

$$\text{coef} := \text{linfit}(X, Y, f)$$

$$f_{\text{linfit}}(z) := \text{coef} \cdot f(z)$$

Aproximare **generalizată neliniară**, după model:

Model general adoptat pentru funcția de aproximare:

$$f(x, u) = e^{u_0 + u_1 \cdot x + \dots + u_n \cdot x^n}$$



Aproximarea folosind funcții predefinite din Mathcad

Un vector identifică parametri $u_0 \dots u_n$, care în cazul de față sunt pentru un exponent polinomial de gradul al doilea (are 3 elemente).

$$G := \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ -1 \end{bmatrix} \quad f(x, u) := \begin{bmatrix} e^{u_0 + u_1 \cdot x + u_2 + x^2} \\ e^{u_0 + u_1 \cdot x + u_2 + x^2} \\ x \cdot e^{u_0 + u_1 \cdot x + u_2 + x^2} \\ x^2 \cdot e^{u_0 + u_1 \cdot x + u_2 + x^2} \end{bmatrix}$$

Se definește o funcție vectorială având ca elemente derivatele parțiale după parametrii modelului.

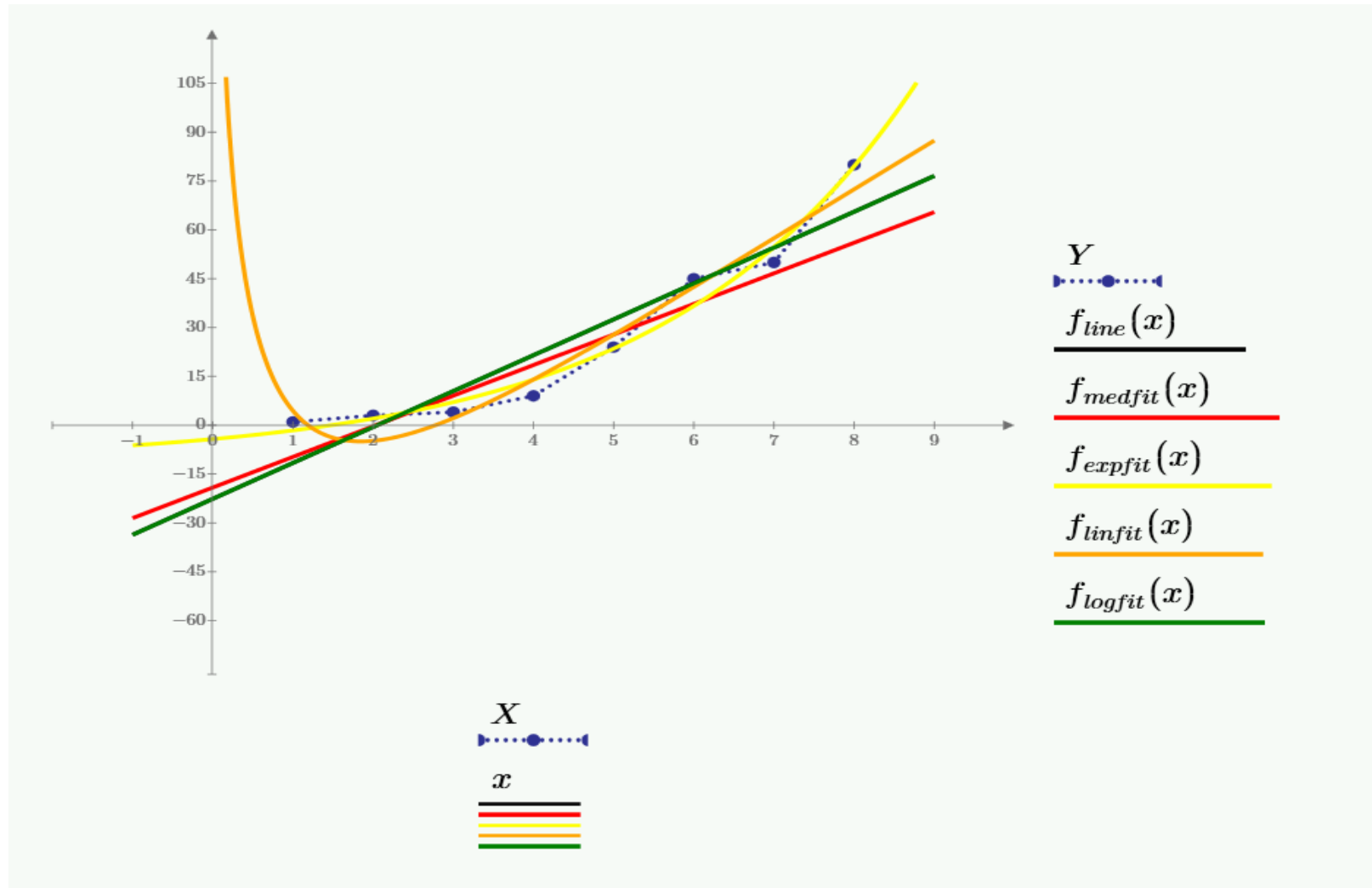
$$coef := \text{genfit}(X, Y, G, f)$$

$$f_{\text{genfit}}(z) := f(z, coef)_0$$



Aproximarea folosind funcții predefinite din Mathcad

Pasul 3. Se reprezintă pe același grafic toate funcțiile obținute. Limitele de afișare pentru axa OX se setează de la -1 la 9, respectiv la axa OY la -50, 100.



Aproximarea Numerică a Funcțiilor



Ș.I. Dr. Ing. Levente CZUMBIL