Metode Numerice de Integrare a Funcțiilor date Numeric

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Laboratorul de Cercetare în METODE NUMERICE
NUMERICAL METHODS Research Laboratory
Technical University of Cluj-Napoca

Ș.l. Dr. ing. **Levente CZUMBIL**
E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro WebPage: http://users.utcluj.ro/~czumbil

Fromula Trapezelor

Formula clasică a trapezelor rezultă prin particularizarea cea mai simplă a versiunii clasice a metodei Newton-Côtes, pentru n=1. Deci este o aplicaţie directă a interpolării liniare Lagrange în două puncte. Se cunoaşte funcţia în două noduri $x_0 = a,\ x_1 = b \Rightarrow f(x_0),\ f(x_1);\ \ h = (b-a)$, şi se doreşte calculul aproximativ al integralei definite $\int_a^b f(x)dx$, utilizând polinomul liniar de interpolare Lagrange adică scriind funcţia $f(x) = L_1(x) + R_1(x)$. Deci integrala calculată cu formula trapezului este:

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{I_{Trapez}(f)} = \underbrace{\int_a^b L_1(x)dx}_{I_{Trapez}(L_1)} + \underbrace{\int_a^b R_1(x)dx}_{Eroare_{Trapez}}$$

Deci integrând polinomul Lagrange şi restul se obţine formula trapezului:

$$I_{Trapez}(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2}\cdot[f(a)+f(b)]\underbrace{-\frac{(b-a)^3}{12}\cdot f''(\xi)}_{Eroare_{Trapez}}$$

Deci formula trapezelor generalizată cu $\xi \in (a,b)$, este:

$$I_{TrapezGen}(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left[f(a)+f(b)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]\underbrace{-\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi)}_{Eroare_{TrapezGen}}$$

Formula de integrare Generalizată a Trapezelor

P1. Fie funcția $f(x) = ln\left(\frac{x^2-4x+17}{2x+3}\right)$ definită pe intervalul $[2,9], f: [2,9] \rightarrow \mathbb{R}$. Se cere calculul valorii integralei definite pe intervalul [2,9], utilizând formula trapezelor și să se estimeze eroarea de calcul aferentă acestei metode.

Pasul 1. Se introduce funcţia $f(x)$:

$$f(x) := \ln\left(\frac{x^2 - 4\,x + 17}{2\,x + 3}\right)$$

Pasul 2. Se definesc capetele intervalului de definire a funcţiei, numărul N de puncte intermediare de calcul şi se fixează pasul de integrare h (distanţa dintre două puncte intermediare vecine pentru a fixa lungimea subintervalelor echidistante pe intervalul $[a,b]$):

$$a := 2 \qquad b := 9 \qquad N := 20 \qquad h := \frac{b-a}{N} \qquad h = 0.35$$

Pasul 3. Se introduce vectorul x a cărui elemente sunt valorile absciselor x_i care reprezintă capetele subintervalelor echidistante în care a fost împărţit intervalul $[a,b]$. Elementele acestui vector se definesc utilizându-se tasta ([) pentru indicele i al variabilei x.

$$i := 0..N \qquad x_i := a + h \cdot i$$

$$x^{T} = [2 \;\; 2.14 \;\; 2.28 \;\; 2.42 \;\; 2.56 \;\; 2.7 \;\; 2.84 \;\; 2.98 \;\; 3.12 \;\; 3.26 \;\; 3.4 \;\; 3.54 \;\; \ldots]$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Fromula Trapezelor

Pasul 4. Se calculează valoarea integralei definite pe intervalul [a,b] utilizând formula trapezelor. Indicele formal *trapez* se introduce cu tasta (ctrl + -), iar suma prin intermediul comenzii *Summation* din toolbar-ul *Operators, Calculus:*

$$I_{trapez} := \frac{h}{2} \cdot \left(f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{j=1}^{N-1} f\left(x_j\right) \right) \qquad I_{trapez} = 4.634690271$$

Pasul 5. Se evaluează eroarea metodei conform formulei:

$$Er := \frac{-h}{24} \left(3 \cdot f\left(x_{N-1}\right) - 4 \cdot f\left(x_{N-2}\right) + f\left(x_{N-3}\right) + 3 \cdot f\left(x_0\right) - 4 \cdot f\left(x_1\right) + f\left(x_2\right) \right)$$

$$Er = -0.004$$

Pasul 6. Se calculează integrala definită pe intervalul [a,b] cu ajutorul operatorului de integrare din *Mathcad* prin apelarea comenzii *Integral* din toolbar-ul *Operators, Calculus* (sau ctrl+shift+I)

$$I_{def} := \int_a^b f(x)\, dx \qquad I_{def} = 4.630441677$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Fromula lui Simpson

Formula clasică a lui Simpson rezultă prin particularizarea versiunii generale a metodei Newton-Côtes, pentru n=2. Se cunosc valorile funcţie f(x) în trei noduri echidistante:

$$x_0 = a,\ x_1 = c = \frac{a+b}{2},\ x_2 = b \Rightarrow f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),\ x_1 = x_0 + h,\ \ x_2 = x_0 + 2h\,,$$

$$h = b - c = c - a = \frac{(b-a)}{2}$$

Iar polinomul de interpolare Lagrange de ordin doi este cel cu care se aproximează funcţia de sub integrala definită, $f(x) = L_2(x) + R_2(x)$. Deci integrala definită va fi:

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{I_{Simpson}(f)} = \underbrace{\int_a^b L_2(x)dx}_{I_{Simson}(L_2)} + \underbrace{\int_a^b R_2(x)dx}_{Eroare_{Simpson}}$$

Deci formula lui Simpson se va scrie:

$$I_{Simpson}(f) = \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4\cdot f(c) + f(b)\right) \underbrace{- \frac{(b-a)^5}{2880}\cdot f'''(\xi)}_{Eroare_{Simpson}}$$

Aplicând pentru fiecare subinterval formula clasică a lui Simpson se obţine:

$$I_{SimpsonGen}(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}\left[f(x_0) + f(x_{2m}) + 4\cdot\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1}) + 2\cdot\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k})\right] \underbrace{- \frac{(b-a)^5}{2880\cdot m^4}\cdot f^{(4)}(\xi)}_{Eroarea_{Simpson}}$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Fromula lui Simpson

Fie funcţia, $f(x) = e^{-x^2} \cdot \sin(x)$ definită pe intervalul $[a,b]$; $f : [a,b] \to R$. Se cere calculul valorii integralei definite pe intervalul $[a,b]$, utilizând formula lui Simpson şi să se evalueze eroarea de calcul a acestei formule.

Pasul 1. Se defineşte funcţia $f(x)$: $f(x) := e^{x} \cdot \cos(x)$

Pasul 2. Se definesc limitele intervalului, numărul $2N$ de puncte intermediare de calcul şi se determină pasul de integrare h :

$$a := 1 \qquad b := 3 \qquad N := 50 \qquad h := \frac{b-a}{2N} \qquad h = 0.02$$

Pasul 3. Se introduce vectorul x a cărui elemente sunt valorile absciselor x_i care reprezintă capetele subintervalelor echidistante în care a fost împărţit intervalul $[a,b]$.

$$i := 0..\,2N \qquad x_i := a + h \cdot i$$

Pasul 4. Se calculează valoarea integralei definite pe intervalul $[a,b]$ utilizând formula lui Simpson. Sumele se introduc prin intermediul operatorului *Range Varible Summation* din toolbar-ul *Calculus* (**$**):

$$j := 1, 3..\,2 \cdot N - 1 \qquad k := 2, 4..\,2 \cdot N - 2$$

$$I_{Simpson} := \frac{h}{3} \cdot \left(f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{k} f\left(x_k\right) + 4 \cdot \sum_{j} f\left(x_j\right) \right) \qquad I_{Simpson} = 10.950170275748054$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Exemplu Practic

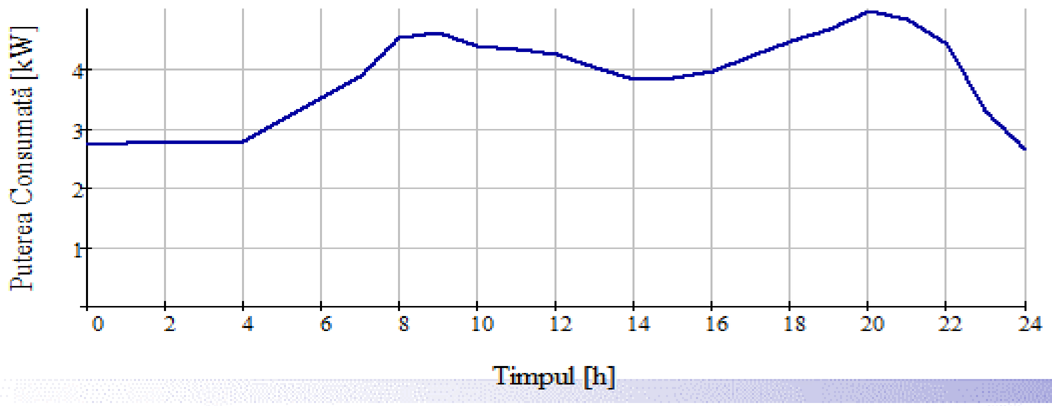
❖ **Stabilirea cantităţilor de energie consumate, pe baza înregistrărilor de putere – *(prelucrarea curbelor de sarcină prin integrare numerică).***

Se consideră un receptor de energie electrică pentru care se cunoaşte curba de sarcină zilnică referitoare la puterea activă consumată.

Se cere să se determine energia activă consumată de receptor, pe durta unei zile, pe baza prelucrării curbei de sarcină prin integrare numerică.

i	n/a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_i = t_i$	[h]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$y_i = P_i$	[kW]	2.73	2.74	2.77	2.76	2.78	3.14	3.52	3.88	4.53	4.61	4.37	4.32	4.25

i	n/a	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$x_i = t_i$	[h]	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$y_i = P_i$	[kW]	4.03	3.83	3.86	3.95	4.20	4.46	4.67	4.98	4.84	4.42	3.29	2.64



$$E_{zi} = \int_0^{24} P(t) \cdot dt$$

Calculul Integralei Duble

Fie funcţia de două variabile $f(x,y) = x + y \cdot |\sin(x)| + e^{-3y}$ definită pe intervalele $x \in [a,b]$ şi $y \in [c,d]$. Se cere calculul integralei duble pe întreg domeniul de definiţie.

Pasul 1. Se defineşte funcţia $f(x,y)$:

$$f(x,y) := x + y \cdot |\sin(x)| + e^{-3y}$$

Pasul 2. Se definesc limitele domeniului de definiţie a funcţiei $f(x,y)$. Se ia un număr de $2Nx$, respectiv $2Ny$ de puncte de calcul pe cele două intervale :

$a := 0$ $\quad$ $b := 5$ $\quad$ $c := -2$ $\quad$ $d := 4$ $\quad$ $Nx := 10^2$ $\quad$ $Ny := 10^2$

Pasul 3. Se determină paşii integrare pe intervalele $[a,b]$ şi $[c,d]$:

$$h_x := \frac{b-a}{2 \cdot Nx} \qquad h_y := \frac{d-c}{2 \cdot Ny} \qquad h_x = 0.025 \qquad h_y = 0.03$$

Calculul Integralei Duble

Pasul 4. Se determină punctele intermediare x_i și y_j de calcul pe cele două intervale:

$$i := 0 \,..\, 2 \cdot Nx \qquad j := 0 \,..\, 2\, Ny \qquad x_i := a + i \cdot h_x \qquad y_j := c + j \cdot h_y$$

Pasul 5. Se integrează funcția *f(x,y)* după varibila *y* utilizând formula lui Simpson pentru fiecare punct intermediar y:

$$k := 2,4 \,..\, 2 \cdot Ny - 2 \qquad l := 1,3 \,..\, 2\, Ny - 1$$

$$I_{x_i} := \frac{h_y}{3} \cdot \left[f\left(x_i, y_0\right) + f\left(x_i, y_{2 \cdot Ny}\right) + 2 \cdot \left(\sum_k f\left(x_i, y_k\right) \right) + 4 \cdot \sum_l f\left(x_i, y_l\right) \right]$$

Pasul 6. Se integrează funcția *f(x,y)* după variabila x utilizând formula lui Simpson pentru fiecare punct intermediar x:

$$k := 2,4 \,..\, 2 \cdot Nx - 2 \qquad l := 1,3 \,..\, 2 \cdot Nx - 1$$

$$I_d := \frac{h_x}{3} \cdot \left(I_{x_0} + I_{x_{2 \cdot Nx}} + 2 \cdot \sum_k I_{x_k} + 4 \cdot \sum_l I_{x_l} \right)$$

$I_d = 767.0839468763276$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Pasul 7. Se evaluează valoarea integralei duble a funcției f(x,y) după variabilele x și y folosindu-se operatorul de integrare din Mathcad (dacă s-ar cunoaște forma analitică a funcției):

$$I_{def} := \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \qquad I_{def} = 767.08333189106$$

Pasul 8. Se determină eroarea absolută dintre rezultatul obținut prin formula lui Simpson și cel returnat de operatorul din *Mathcad:*

$$Er := \left|I_{def} - I_d\right| \qquad Er = 6.15 \cdot 10^{-4}$$

Metode Numerice de Integrare a Funcțiilor date Numeric

Ș.l.Dr.Ing. Levente CZUMBIL

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA