Calculul Aproximativ al Derivatelor Funcțiilor Numerice

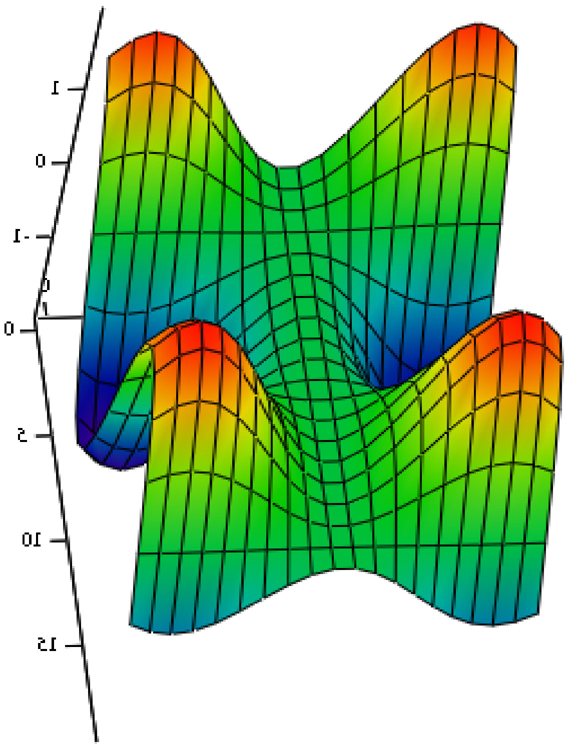
UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Laboratorul de Cercetare în METODE NUMERICE
NUMERICAL METHODS Research Laboratory
Technical University of Cluj-Napoca

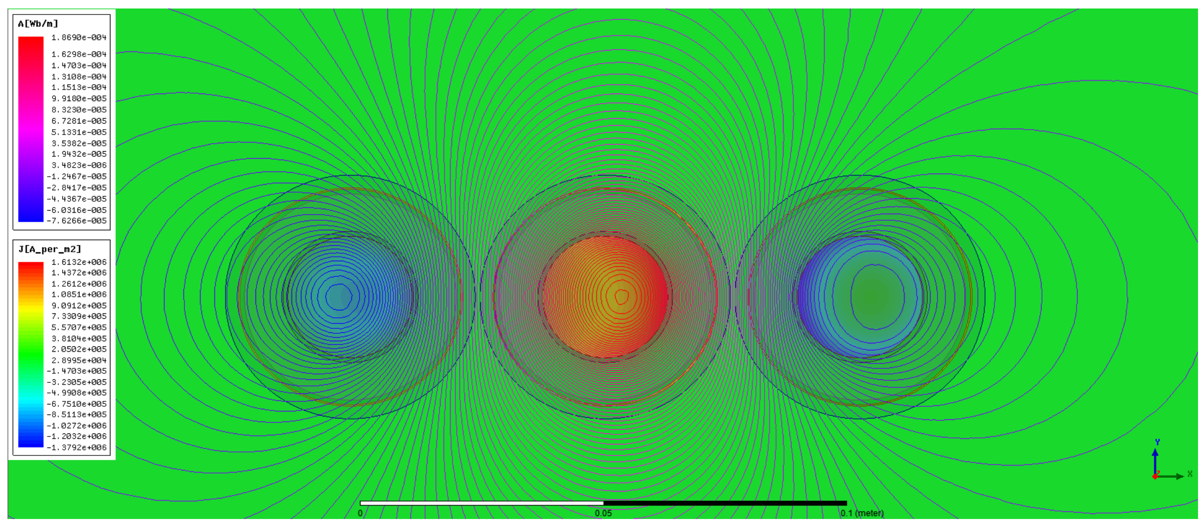
Ș.l. Dr. ing. Levente CZUMBIL
E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro WebPage: http://users.utcluj.ro/~czumbil

Aplicaţii

- Determinarea distribuţiei de sarcină electrică



- Calculul intensităţii câmpurilor electromagnetice



UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Derivarea Numerică pe baza Polinomului de Interpolare de Ordinul I

❖ Să se calculeze valoarea derivatei funcției ***f(x)*** pe intervalul **[5, 10]**:

$$f(x) := e^x + \sin(x) - x^6 - 5x^3 + 2x - 8$$

Pasul 1. Se definesc capetele domeniului de derivare și numărul puntelor intermediare în care se dorește determinarea valorii numerice a derivatelor funcției ***f(x)***:

$$a := 5 \qquad b := 10 \qquad N := 10$$

Pasul 2. Se determină pasul de discretizare ***h*** (distanța dintre două puncte intermediare de calcul consecutive):

$$h := \frac{b - a}{N} \qquad h = 0.5$$

Pasul 3. Se definesc punctele de discretizare x_i (punctele de calcul ale valorii derivatelor):

$$i := 0 .. N \qquad x_i := a + h \cdot i$$

$$x^T = [5 \;\; 5.5 \;\; 6 \;\; 6.5 \;\; 7 \;\; 7.5 \;\; 8 \;\; 8.5 \;\; 9 \;\; 9.5 \;\; 10]$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

Pasul 4. Se definește setul de puncte pentru care se poate aplica formula de calcul a derivatelor obținută pe baza polinomului de interpolare de ordinul I:

$$j := 1..N$$

Pasul 5. Se calculează valoarea derivatei funcției ***f(x)*** pentru fiecare punct intermediar $\boldsymbol{x_j}$:

$$D1_j := \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{h}$$

Pasul 6. Pentru a calcula valoarea derivatei și în punctul $\boldsymbol{x_0}$ (punct în care nu se poate aplica direct formula de calcul) se consideră un pas de discretizare negativ, ***h = -h***:

$$D1_0 := \frac{f(x_0) - f(x_1)}{-h}$$

Pasul 7. Se vizualizează rezultatele numerice obținute în urma aplicării formulei de calcul a valorii derivatei rezultată pe baza polinomului de interpolare de ordinul I:

$$D1^T = \left[-2.433 \cdot 10^4 \quad -2.433 \cdot 10^4 \quad -3.813 \cdot 10^4 \quad -5.759 \cdot 10^4 \quad \ldots\right]$$

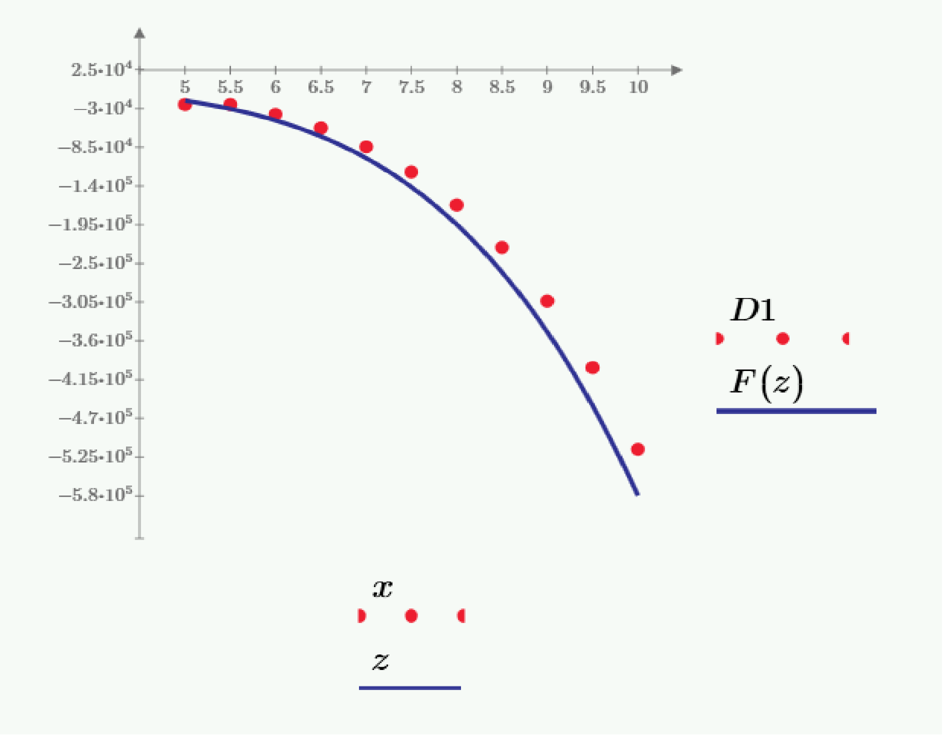
Derivarea Numerică pe baza Polinomului de Interpolare de Ordinul I

Pasul 8. Se definește derivata funcției ***f(x)*** prin intermediul operatorului de derivare:

$$F(x) := \frac{d}{dx}f(x) \qquad F(z) \rightarrow \cos(z) + e^{z} - 15\cdot z^{2} - 6\cdot z^{5} + 2$$

Pasul 9. Se realizează o comparați grafică între valorile derivatei evaluate numeric și funcția ***F(x)*** obținută prin derivarea analitică a funcției ***f(x)***:

$$z := 5, 5.1 .. 10$$



Derivarea Numerică pe baza Polinomului de Interpolare de Ordinul I

Pasul 10. Se calculează valoarea medie procentuală a erorii cu care s-a realiza evaluarea valorii derivatei funcției ***f(x)*** pe intervalul **[5,10]** studiat:

$$Err1 := \frac{1}{N+1}\cdot\left(\sum_i \left|\frac{F(x_i) - D1_i}{F(x_i)}\right|\right) \qquad Err1 = 16.259\cdot\%$$

!!Eroare mult prea mare!!

Pasul 11. Pentru a micșora eroarea de calul ar trebui redus pasul ***h*** dintre două puncte consecutive $\boldsymbol{x_i}$ și $\boldsymbol{x_{i+1}}$ în care se face evaluarea numerică a derivatei, adică trebui mărit numărul *N* de puncte intermediare de calcul:

- dacă la începutul fișierului se schimbă valoarea lui *N* în 50
- eroarea de calcul se va reduce la: $Err1 = 3.365\cdot\%$

Derivarea Numerică pe baza Polinomului de Interpolare de Ordinul II

❖Să se calculeze valoarea derivatei funcției ***f(x)***

$$f(x) := e^{x} + \sin(x) - x^{6} - 5x^{3} + 2x - 8$$

Pasul 1. Se definesc capetele domeniului de derivare și numărul puntelor intermediare în care se dorește determinarea valorii numerice a derivatelor funcției ***f(x)***:

$$a := 5 \qquad b := 10 \qquad N := 10$$

Pasul 2. Se definește pasul de discretizare :

$$h := \frac{b - a}{N} \qquad h = 0.5$$

Pasul 3. Se definesc punctele de discretizare xi :

$$i := 0..N \qquad x_{i} := a + h \cdot i$$

Pasul 4. Se calculeaza valoarea derivatei pentru fiecare punct intermediar

$$j := 0 .. N-2 \qquad D2_j := \frac{1}{2\cdot h}\cdot\left(-3\,f\left(x_j\right) + 4\cdot f\left(x_{j+1}\right) - f\left(x_{j+2}\right)\right)$$

Pasul 5. Pentru ultimele doua puncte pentru care nu se poate aplica formula se face acelasi artificiu de calcul :

$$j2 := N .. N-1$$

$$D2_{j2} := \frac{1}{2\cdot h}\cdot\left(-3\,f\left(x_{j2}\right) + 4\cdot f\left(x_{j2-1}\right) - f\left(x_{j2-2}\right)\right)$$

Pasul 6. Calculam eraorea metodei. Se compra Err1 cu Err2

$$Err2 := \frac{1}{N+1}\cdot\left(\sum_i \left|\frac{F\left(x_i\right) - D2_i}{F\left(x_i\right)}\right|\right)$$

$$Err1 = 16.259\cdot\%$$

$$Err2 = 3.828\cdot\%$$

Pasul 6. Evaluarea derivatei in cazul in care se folosesc valorile functiei intre doi vecini vecin-valoare-vecin :

$$k := 1 .. N - 1 \qquad D3_k := \frac{1}{2 \cdot h} \cdot \left(f\left(x_{k+1}\right) - f\left(x_{k-1}\right) \right)$$

Pasul 7. Se calculeaza eroare metodei :

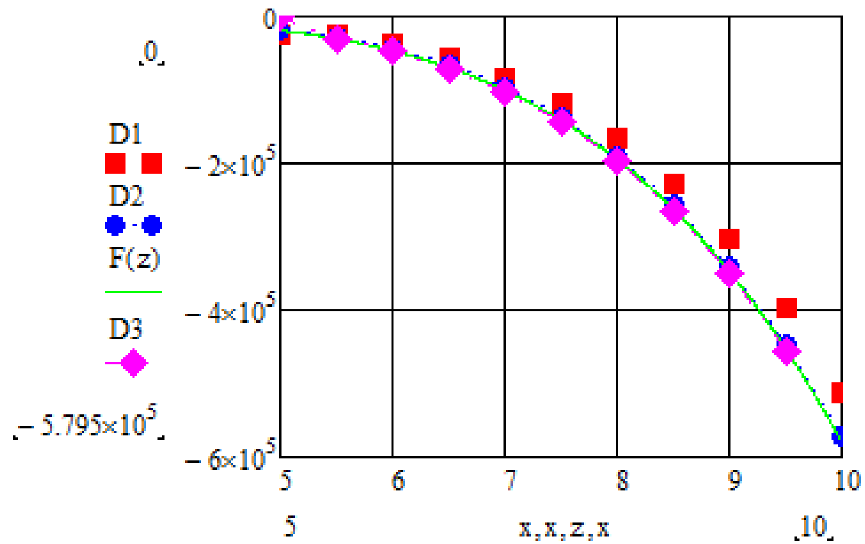
$$Err3 := \frac{1}{N - 1} \cdot \left(\sum_k \left| \frac{F\left(x_k\right) - D3_k}{F\left(x_k\right)} \right| \right)$$

Pasul 8. Se compara erorilor celor trei metode prezentate anterior si se reprezinta grafic D1j , D2j, D3k pe acelasi grafic cu F(z) . Concluzii

$Err3 = 0.016 \qquad Err3 = 1.573 \cdot \%$

$Err2 = 0.038 \qquad Err2 = 3.828 \cdot \%$

$Err1 = 0.163 \qquad Err1 = 16.259 \cdot \%$



Aplicație

Enunțul aplicației

Pasul 1. Se introduc datele initiale : vectorul “deplasare” si vectorul “lucru mecanic” .

$$X := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{deplasarea} \qquad L := \begin{bmatrix} 18 \\ 36 \\ 49 \\ 58 \\ 64 \\ 72 \\ 78 \\ 82 \\ 84 \end{bmatrix}$$

Pasul 2. Se definesc limitele intervalului , numarul de puncte si pasul de discretizare **.**

$$a := 0 \qquad b := 8 \qquad N := 8 \qquad h := \frac{b - a}{N} \qquad h = 1$$

$$j := 1 .. N$$

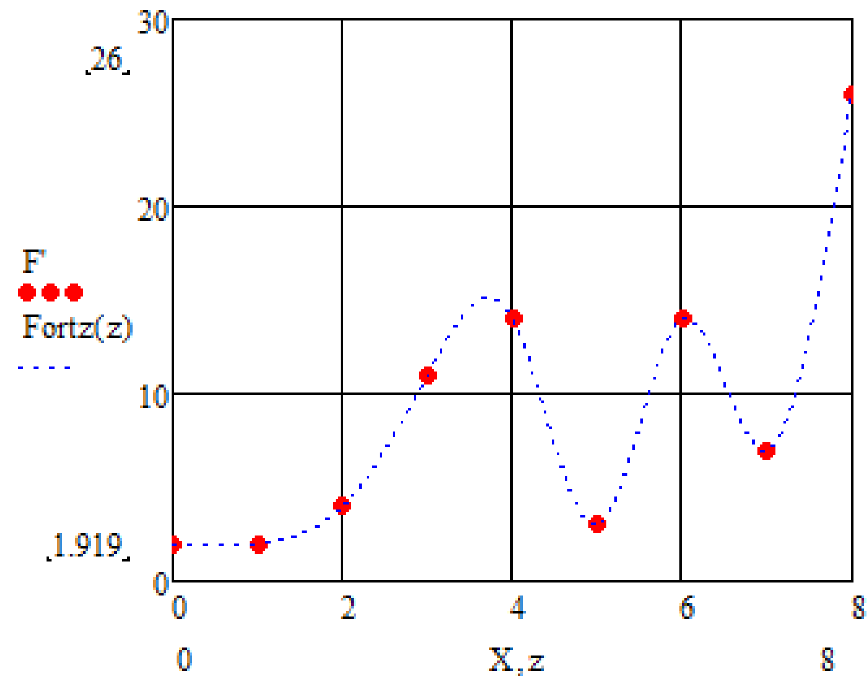
Pasul 3. Se definesc expresiile derivatele Fj si Fo (se execută același artificiu de calcul h =-h)

$$F`_j := \frac{L_j - L_{j-1}}{h} \qquad F`_0 := \frac{L_0 - L_1}{-h} \qquad i := 0..N$$

Pasul 4. Pentru a vedea cum variaza forta, F aplicam o interpolare liniara :

$$M := \text{lspline}(X, F')$$

$$\text{Fortz}(z) := \text{interp}(M, X, F', z)$$



Derivata a doua a funcţiei

❖Se aplică pt punctele din mjiloc, fără capete.

Pasul 1. Se definesc punctele de discretizare :

$$k := 1..N-1$$

Pasul 2. Se defineste derivata a doua a functiei :

$$F``_k := \frac{1}{h^2}\left(f\left(x_{k-1}\right) - 2 \cdot f\left(x_k\right) + f\left(x_{k+1}\right)\right)$$

Pasul 3. Se apeleaza operatorul de derivare de ordin 2 din tabela "Calculus ":

$$G(z) := \frac{d^2}{dz^2} f(z)$$

Pasul 4. Din tabela Symbolic se apleaza "Symbolic Evaluation →" pentru calculul derivatei de ordin 2 si eroarea metodei :

$$G(t) \rightarrow e^t - 30 \cdot t - \sin(t) - 30 \cdot t^4 \qquad Err := \frac{1}{N-1}\left(\sum_k \left|\frac{G\left(x_k\right) - F``_k}{G\left(x_k\right)}\right|\right)$$

$$Err = 0.444\%$$

Reprezentarea Grafică a Gradientului

Se introduce funcția f(x,y): $f(x,y) := 2 \cdot [\sin(x)]^2 \cdot \cos(y-2)$

Se introduc valorile de capăt (punctele finale) pentru *x* și *y*:

$$x_{\min} := -2 \qquad x_{\max} := 2 \qquad y_{\min} := -4 \qquad y_{\max} := 4$$

Se introduc numărul valorilor lui *x* și *y* în șir: $N_x := 20 \quad N_y := 20$

$$i := 0..N_x - 1 \qquad j := 0..N_y - 1$$

$$xind_i := x_{\min} + i \cdot \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N_x - 1} \qquad yind_i := y_{\min} + i \cdot \frac{y_{\max} - y_{\min}}{N_y - 1}$$

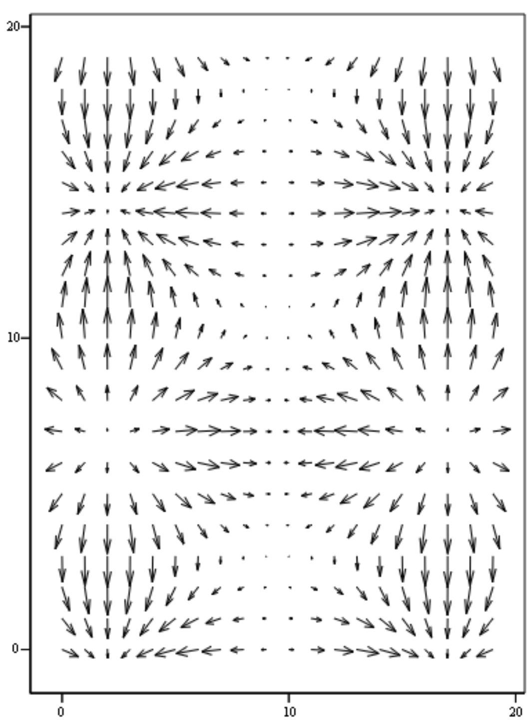
Gradientul funcției va fi:

$$grad(x,y) := \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} f(x,y) \\ \frac{d}{dy} f(x,y) \end{bmatrix}$$

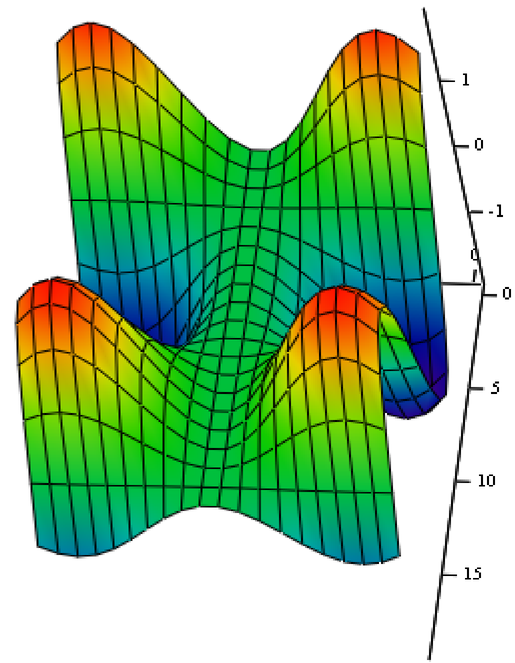
Se stochează într-o matrice valorile gradientului în punctele de calcul ale funcției:

$$V_{i,j} := grad(xind_i, yind_j) \qquad M_{i,j} := (V_{i,j})_0 \qquad N_{i,j} := (V_{i,j})_1$$

$$F_{i,j} := f(xind_i, yind_j)$$



(M,N) (câmpul vectorial)



F (reprezentarea grafică pe suprafață)

Calculul Aproximativ al Derivatelor Funcțiilor Numerice

Ș.l. Dr. Ing. Levente CZUMBIL

UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA