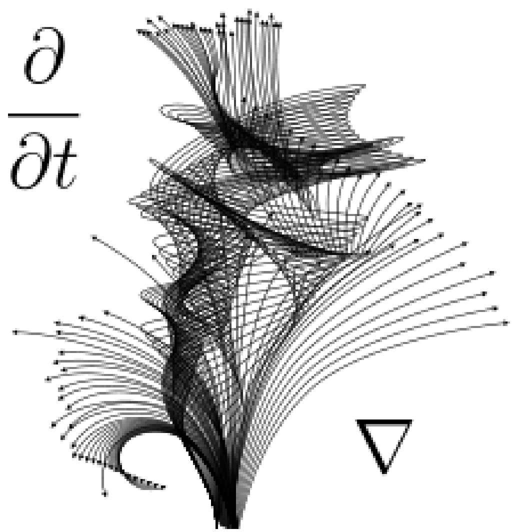
# Metode Numerice de Rezolvare a Ecuaţiilor Diferenţiale de Ordinul I



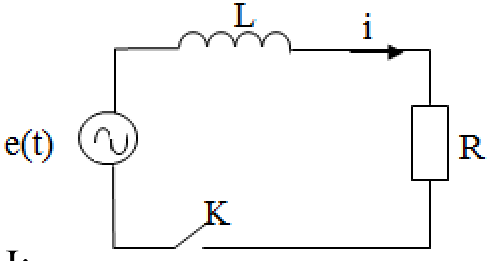
***Ș.l. Dr. ing.*** **Levente CZUMBIL**

**E-mail: Levente.Czumbil@ethm.utcluj.ro  WebPage: http://users.utcluj.ro/~czumbil**

# Aplicaţie

**Circuitul R-L serie în regim tranzitoriu**

Se consideră un circuit format dintr-un rezistor de rezistenţă R şi o bobină de inductivitate L, alimentate în serie la o tensiune electromotoare $e = E \cdot \cos \omega t$.



**Circuitul R-L Serie**

Se studiază variaţia curentului în circuit la închiderea întreruptorului K.

Se scriu teoremele lui Kirchhoff şi rezultă o ecuaţie diferenţială de ordinul I:

$$e = e_R + e_L = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} \Rightarrow L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i = E \cdot cos\, \omega t$$

Ţinând cont de dependenţa de timp (t) : $u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$ unde *i(t)* - curentul din circuit la momentul t

$$u_R(t) = R \cdot i(t)$$

$u_{L,R}(t)$ - tensiunea la bornele bobinei respectiv rezistenţei la momentul t ecuaţia diferenţială se va rescrie :

$$\omega L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) = E \cos \omega t$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

## Generalităţi

O ecuaţie diferenţială este o ecuaţie care conţine pe lângă variabilele independente şi funcţiile necunoscute şi derivatele acestor funcţii. Ordinul ecuaţiei diferenţiale, *n*, este dată de ordinul maxim al derivatelor funcţiei necunoscute din cadrul aceste ecuaţii.

$$f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

Ecuaţiile diferenţiale cu derivate parţiale conţin mai multe variabile independente şi derivatele parţiale ale funcţiilor necunoscute.

$$y\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$$

Rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale de ordin $n$ implică impunerea a $n$ condiţii iniţiale.

# Metoda dezvoltării în serie Taylor

Fie funcţia, $f(x):I \times R \rightarrow R$ unde $I$ este un interval real, $f$ fiind o funcţie continuă dată, iar y0 fiind valoarea iniţială a acesteia.

Evaluam funcţia $y:I \rightarrow R$ în nodurile intervalului de definiţie, funcţie care satisface problema cu condiţia iniţială Cauchy impusă:

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b \qquad \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \; x_0 \in I$$

Se dezvoltă în serie Taylor soluţia ecuaţiei în jurul punctului $x_0$:

$$y\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$$

Dacă se înlocuieşte $x=x_0+h$ şi restul $R_n(x)=0$ atunci neglijând ultimul termen al seriei Taylor atunci se poate estima valoarea aproximativă a lui $y_1$ :

$$y(x_0) = y_0 \qquad y'' = f_x + f \cdot f_y$$

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0) \qquad y''' = f_{xx} + (2f_{xy} + f \cdot f_{yy}) \cdot f + (f_x + f \cdot f_y) \cdot f_y$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

# Metoda dezvoltării în serie Taylor

unde: $$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}; f_y = \frac{\partial f}{\partial y}; f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}; f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

iar: $$f^{(n)}(x,y) = f_x^{(n-1)}(x,y) + f_y^{(n-1)}(x,y) \cdot f(x,y)$$

$$y^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x, y(x))$$

Pentru *n=2* rezultă:

$$y_1 = y_0 + h \cdot \left[ f(x_0, y_0) + \frac{h}{2} \cdot \left( f_x(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) \cdot f_y(x_0, y_0) \right) \right]$$

Prin recurenţă $\Longrightarrow y_2, \ldots, y_n$

$$\boxed{y_i = y_{i-1} + h \cdot (f + \frac{h}{2} \cdot (f_x + f \cdot f_y))}$$

# Metoda dezvoltarii in serie Taylor

Fie circuitul **R-L serie** din cadrul aplicaţiei prezentate pentru care avem cunoscute parametrii electrici: *E = 12V, R = 4Ω* şi *L = 3,2uH*. Să se determine curentul prin bobina de inductivitate *L* după închiderea întrerupătorului *K* (t ia valori pe intervalul [0;40ms])

**Pasul 1.** Se definesc parametri electric ai circuitului **R-L serie**:

$$E := 12 \qquad R := 4 \qquad L := 32 \cdot 10^{-6} \qquad f := 50 \qquad \omega := 2 \cdot \pi \cdot f \qquad \omega = 314.159$$

**Pasul 2.** Se scrie ecuaţia diferenţial ce descrie funcţionarea circuitului **R-L serie**:

$$\omega \cdot L \cdot \frac{d}{dt} i(t) + R \cdot i(t) = E \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

**Pasul 3.** Se extrage derivata curentului din ecuaţia diferenţială corespunzătoare circuitului:

$$\frac{d}{dt} i(t) = \frac{1}{\omega \cdot L} \cdot (E \cdot \cos(\omega \cdot t) - R \cdot i(t))$$

**Pasul 4.** Se defineşte funcţia asociată membrului drept a ecuaţiei diferenţiale:

$$F(t, i) := \frac{1}{\omega \cdot L} \cdot (E \cdot \cos(\omega \cdot t) - R \cdot i)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

**Pasul 5.** Se definesc capetele intervalului, numărul de puncte de calcul şi se determină pasul de parcurgere al intervalului de definiţie:

$$t_i := 0 \qquad t_f := 40 \cdot 10^{-3} \qquad N := 500 \qquad h := \frac{t_f - t_i}{N} \qquad h = 8 \times 10^{-5}$$

**Pasul 6.** Se determină şirul de puncte intermediare $t_k$ în care se evaluează valoarea curentului:

$$k := 0..N \qquad t_k := t_i + h \cdot k$$

**Pasul 7.** Se definesc derivatele parţiale ale funcţiei ataşate, *F*, ecuaţiei diferenţiale:

$$F_t(t,i) := \frac{d}{dt}F(t,i) \qquad F_i(t,i) := \frac{d}{di}F(t,i)$$

**Pasul 8.** Din condiţia iniţială Cauchy a problemei (întrerupătorul *K* deschis), reiese că valoarea curentului în momentul $t = 0s$ este egală cu $0A$:

$$I_0 := 0$$

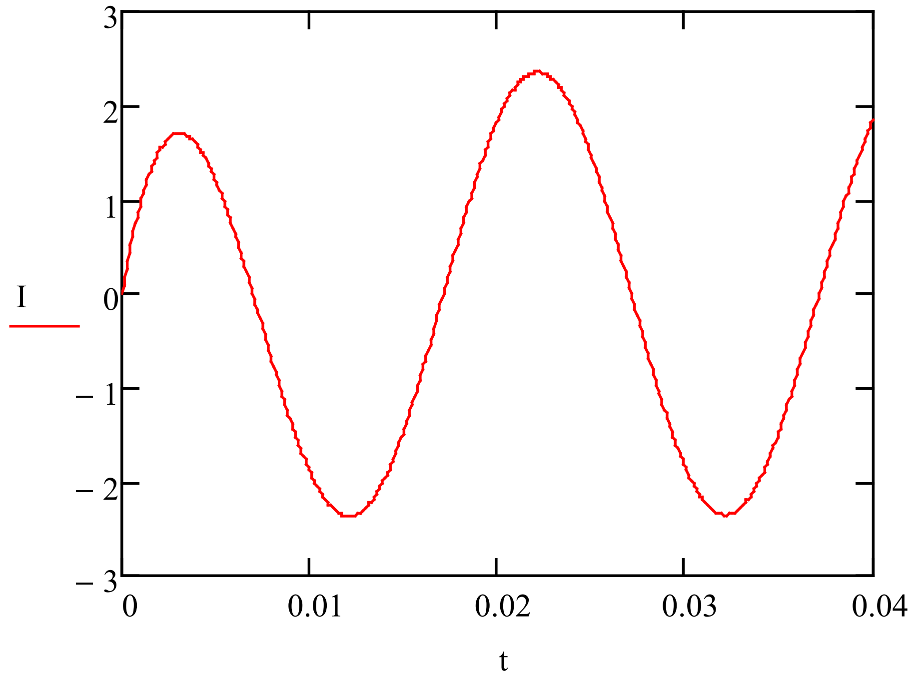
UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

**Pasul 9.** Se implementează formula recursivă de calcul a valorilor funcţiei, pe baza descompunerii în serie Taylor până la elementul de gradul al II-lea:

$$I_{k+1} := I_k + h \cdot \left( F\left(t_k, I_k\right) + \frac{h}{2} \cdot \left( F_t\left(t_k, I_k\right) + F\left(t_k, I_k\right) \cdot F_i\left(t_k, I_k\right) \right) \right)$$

**Pasul 10.** Se vizualizează valoarea curentului la momentele de timp $t_k$:

$$I^T = (0 \quad 0.094 \quad 0.185 \quad \cdots \quad 1.811 \quad 1.848 \quad 1.884)$$



# Metoda lui Euler

Se obţine din metoda Taylor pentru *n=1*, adică se reţin numai primii doi termeni din dezvoltare rezultând forma explicită a metodei lui Euler:

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}) \qquad i = 1,2,\ldots$$

Avem bineînţeles aceeaşi problemă de rezolvare a ecuaţiilor diferenţiale cu condiţii iniţiale:

$$y' = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0$$

Pentru variante ale metodei lui Euler cu precizie mai mare se folosesc relaţii de recurenţă de forma:

$$y_i = y_{i-1} + h \cdot \Phi(x_{i-1}, y_{i-1}, h)$$

unde în:

**a) Metoda lui Euler îmbunătăţită (Euler – Heun):**

$$\Phi(x_{i-1}, y_{i-1}, h) = \frac{1}{2}\left[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-1} + h, y_{i-1} + h \cdot y'_{i-1})\right]$$

cu $\quad y'_{i-1} = f(x_{i-1}, y_{i-1})$

**b) Metoda lui Euler modificată (versiunea Cauchy)**

$$\Phi(x_{i-1}, y_{i-1}, h) = f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}, y_{i-1} + \frac{h}{2} \cdot y'_{i-1}\right) \qquad y'_{i-1} = f\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right)$$

**c) Metoda Euler modificată "predictor – corector" (metoda implicită).**

Cu metoda lui Euler clasică se calculează o primă aproximaţie (valoarea prezisă a soluţiei în punctul următor) adică se iniţializează valoarea lui $y_i$ cu o relaţie:

$$y_i^{(0)} = y_{i-1} + h \cdot f\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right)$$

La un pas oarecare al procesului iterativ de calcul noua valoare a lui rezultă prin aplicarea unei relaţii:

$$y_i^{(k)} = y_{i-1} + h \cdot \frac{f\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right) + f\left(x_i, y_i^{(k-1)}\right)}{2}$$

Calculul se consideră terminat când se atinge o precizie impusă aprioric:

$$\left|y_i^{(k)} - y_i^{(k-1)}\right| < \varepsilon$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

# Metoda lui Euler

Fie ecuaţia diferenţială de ordinul întâi $y'(x) - 6y(x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{9}\right) = x^2 - 5$ cu condiţia iniţială Cauchy *y(7)=6*, unde *x* ia valori pe intervalul [7,15]. Să se determine valorile funcţiei *y(x)* folosindu-se metoda lui Euler îmbunătăţită (Euler-Heun), respectiv varianta modificată (versiunea Cauchy).

**Pasul 1.** Se scrie ecuaţia diferenţială ce urmează a fi rezolvată:

$$y`(x) - 6 \cdot y(x) + cos\left(x - \frac{\pi}{9}\right) = x^2 - 5$$

**Pasul 2.** Se extrage derivate funcţiei necunoscute:

$$y`(x) = x^2 - 5 + 6 \cdot y(x) - cos\left(x - \frac{\pi}{9}\right)$$

**Pasul 3.** Se defineşte funcţia asociată ecuaţiei diferenţiale:

$$f(x, y) := x^2 - 5 + 6 \cdot y - \cos\left(x - \frac{\pi}{9}\right)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

**Pasul 4.** Definirea funcţiei caracteristice metodei îmbunătăţite Euler-Huen:

$$\Theta_{EH}(x,y,h) := \frac{1}{2}\left(f(x,y) + f(x+h, y+h\cdot f(x,y))\right)$$

**Pasul 5.** Definirea funcţiei caracteristice metodei îmbunătăţite Euler-Huen:

$$\Theta_{EC}(x,y,h) := f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h}{2}\cdot f(x,y)\right)$$

**Pasul 6.** Se definesc capetele intervalului, numărul de puncte de calcul şi se determină pasul de parcurgere al intervalului de definiţie:

$$a := 7 \qquad b := 15 \qquad N := 100 \qquad h := \frac{b-a}{N} \qquad h = 0.08$$

**Pasul 7.** Se determină şirul de puncte intermediare $x_i$ în care se evaluează valoarea funcţiei necunoscute:

$$i := 0..N \qquad x_i := a + h\cdot i$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

**Pasul 8.** Se impune condiţia iniţială Cauchy *y(7)=5*:

$$y_{EH_0} := 5 \qquad\qquad y_{EC_0} := 5$$

**Pasul 9.** Se evaluează valorile funcţiei necunoscute conform metodei lui Euler îmbunătăţite (Euler-Heun) :

$$y_{EH_{i+1}} := y_{EH_i} + h \cdot \Theta_{EH}\left(x_i, y_{EH_i}, h\right)$$

**Pasul 10.** Se evaluează valorile funcţiei necunoscute conform metodei lui Euler modificată (versiunea Cauchy) :

$$y_{EC_{i+1}} := y_{EC_i} + h \cdot \Theta_{EC}\left(x_i, y_{EC_i}, h\right)$$

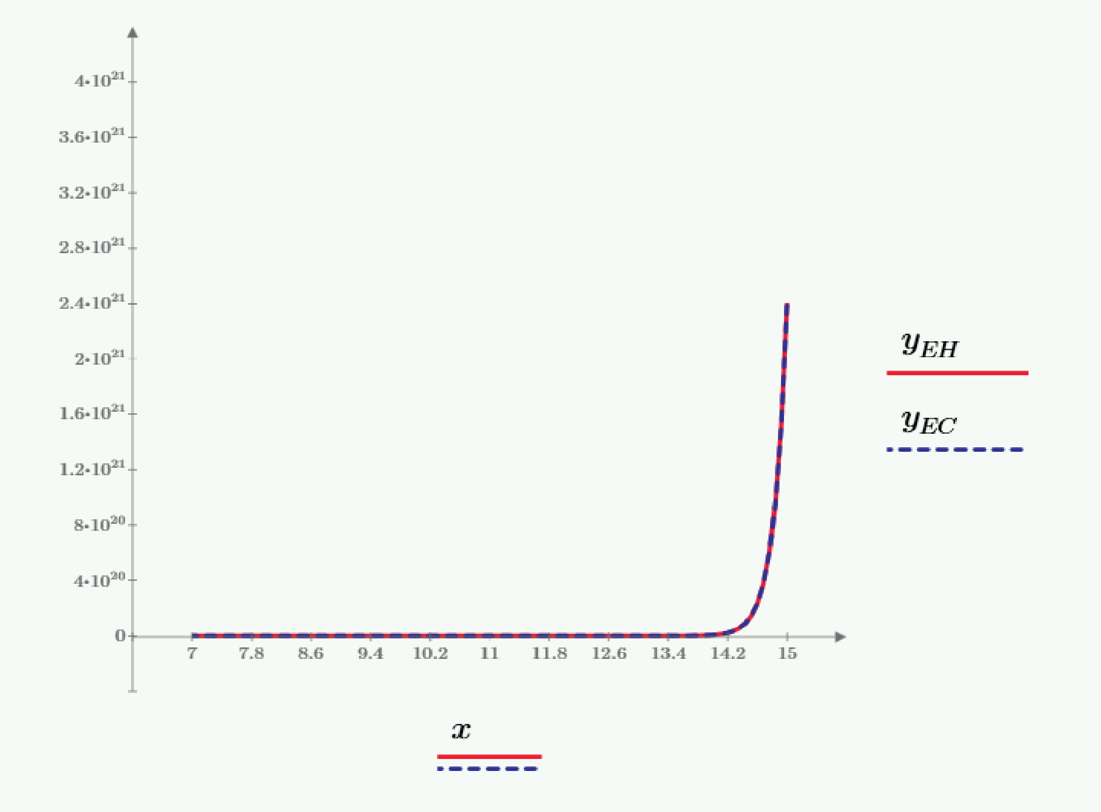
**Pasul 11.** Se vizualizează valorile funcţiei necunoscute determinate în punctele $x_i$:

$$y_{EH}{}^{T} = \begin{bmatrix} 5 & 12.295 & 24.046 & 42.911 & 73.122 & 121.436 & 198.629 & 321.893 & \ldots \end{bmatrix}$$

$$y_{EC}{}^{T} = \begin{bmatrix} 5 & 12.294 & 24.046 & 42.91 & 73.12 & 121.433 & 198.625 & 321.885 & \ldots \end{bmatrix}$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

**Pasul 12.** Se reprezintă grafic alura funcţiei determinate cu cele două metode:




**Pasul 13.** Se evaluează abaterea procentuală dintre cele două metode:

$$Err := \frac{1}{N} \cdot \sum_i \frac{\left| y_{EH_i} - y_{EC_i} \right|}{y_{EH_i}} \qquad Err = 0.002\%$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

# Metodele Runge-Kutta

Metodele Runge – Kutta de integrare numerică a unei ecuaţii diferenţiale, înlocuiesc calculul derivatelor funcţiei *f(x,y)* prin evaluări ale sale în diverse puncte.

Fie ecuaţia diferenţială cu condiţii iniţiale de forma: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

unde: $f(x):D \rightarrow R$, $D \supset \underline{R^2}$, este o funcţie cu derivatele parţiale $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^j}$ continue pe D, unde $i+j=k$, respectiv $k = \overline{1,m}$.

Soluţia calculându-se cu o relaţie unipas de forma:

$$y_{i+1} = y_i + a_0 \cdot k_0 + a_1 \cdot k_1 + \ldots + a_n \cdot k_n$$

Din condiţia ca dezvoltarea în serie Taylor a membrului drept (în funcţie de h) să coincidă cu membrul drept al formulei lui Taylor de ordinul (n+1) avem:

$$\begin{aligned}
k_0 &= h \cdot f(x_i, y_i) \\
k_1 &= h \cdot f(x_i + \mu_1 \cdot h, y_i + \lambda_{10} \cdot k_0) \\
k_2 &= h \cdot f(x_i + \mu_2 \cdot h, y_i + \lambda_{20} \cdot k_0 + \lambda_{21} \cdot k_1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
k_n &= h \cdot f(x_i + \mu_n \cdot h, y_i + \lambda_{n0} \cdot k_0 + \lambda_{n1} \cdot k_1 + \ldots + \lambda_{n,n-1} \cdot k_{n-1})
\end{aligned}$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

# Metodele Runge-Kutta

Particularizând parametrul *n* determinăm diverse formule de tip Runge – Kutta:

**a) *n=0* (Runge-Kutta de ordin II), $y_0$ – dat (formula lui Euler clasica):**

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

**b) *n=1* (Runge-Kutta de ordin II), $y_0$ – dat:**

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_0 + k_1) \qquad k_0 = h \cdot f(x_i, y_i) \qquad k_1 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_0)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + h \cdot f(x_i, y_i))\right]$$

**c) *n=2* (Runge-Kutta de ordin III), $y_0$ – dat:**

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_0 + 4k_1 + k_2) \qquad k_0 = h \cdot f(x_i, y_i) \qquad k_1 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_0}{2}\right)$$

$$k_2 = h \cdot f(x_i + h, y_i + 2k_1 - k_0)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

# Metoda Runge-Kutta de ordinul III

Să se rezolve ecuaţia diferenţială de ordinul I $y' = \dfrac{4 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + x \cdot y}$ cu condiţia iniţială Cauchy *y(0)=0* pe intervalul [0,2] cu pasul h=0.01 folosind metoda Runge-Kutta de ordinul III.

**Pasul 1.** Se defineşte funcţia asociată membrului drept a ecuaţiei diferenţiale:

$$f(x,y) := \frac{4 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + x \cdot y}$$

**Pasul 2.** Se definesc capetele intervalului de definiţie şi se determină numărul de puncte de calcul:

$h := 0.01 \qquad a := 0 \qquad b := 2 \qquad N := \dfrac{b - a}{h} \qquad N = 200$

**Pasul 3.** Se determină vectorul al punctelor din intervalul în care se calculează valorile funcţiei :

$i := 0..N \qquad x_i := a + h \cdot i$

# Metoda Runge-Kutta de ordinul III

**Pasul 4.** Din condiţia iniţială Cauchy a problemei, reiese că funcţia *y(x)* ia valoarea 1 în punctul 0 (în capătul *a* al intervalului):

$$y_0 := 0$$

**Pasul 5.** Se definesc coeficienţii Runge-Kutta de ordinul III:

$$k_0(x,y) := h \cdot f(x,y)$$

$$k_1(x,y) := h \cdot f\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{k_0(x,y)}{2}\right)$$

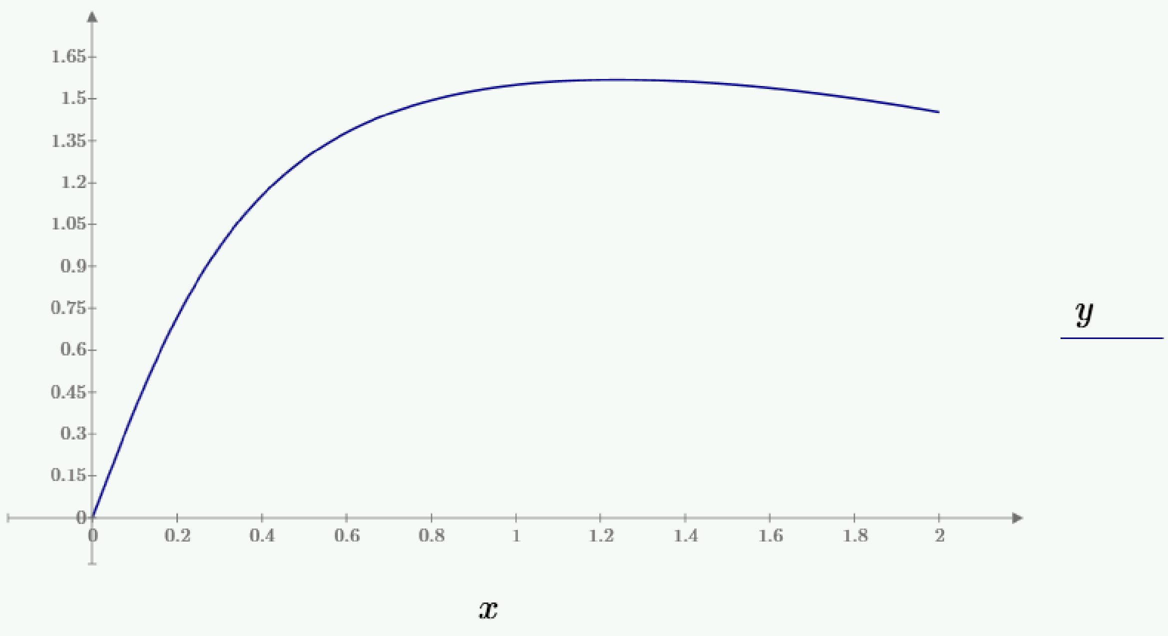
$$k_2(x,y) := h \cdot f\left(x+h, y+2 \cdot k_1(x,y) - k_0(x,y)\right)$$

**Pasul 6.** Se implementează formula recursivă Runge-Kutta pentru calculul valorilor funcţiei în punctele :

$$y_{i+1} := y_i + \frac{1}{6} \cdot \left(k_0\left(x_i, y_i\right) + 4 \cdot k_1\left(x_i, y_i\right) + k_2\left(x_i, y_i\right)\right)$$

**Pasul 7**. Se vizualizează valorile funcţiei *y(x)* pe intervalul [0,2] şi se reprezintă grafic:

$$y^{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0.04 & 0.08 & 0.12 & 0.159 & 0.198 & 0.237 & 0.276 & 0.314 & 0.351 & 0.388 & 0.425 & \ldots \end{bmatrix}$$



# Metode Numerice de Rezolvare a Ecuaţiilor Diferenţiale de Ordinul I

*Ș.l. Dr. ing.* Levente CZUMBIL

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

DIN CLUJ-NAPOCA