METODE NUMERICE DE REZOLVARE A SISTEMELOR DE ECUAŢII DIFERENŢIALE

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Se consideră un sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare cu condiţiile iniţiale de mai jos, această problemă fiind cunoscută după cum ştim ca o problemă Cauchy sau problemă cu condiţii iniţiale:

$$y'_i = \frac{dy_i}{dx} = f\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_r\right) \qquad y_i\left(x_0\right) = y_{i0} \quad i = 1,2,\ldots,r$$

Se cere determinarea funcţiilor $y_i(x)$ care verifică sistemul şi condiţiile iniţiale, adică determinarea valorilor $y_{i,1}, y_{i,2}, y_{i,3}, \ldots, y_{i,n}$ care să aproximeze cu o acurateţe cât mai mare valorile exacte $y_i(x_1), y_i(x_2), \ldots, y_i(x_n)$ ale funcţiilor $y_i(x)$.

Observaţie: Punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt echidistante pasul fiind egal cu *h*:

$$x_{j+1} - x_j = h$$

Metoda lui Euler

Metodele de rezolvare rămân aceleaşi ca şi la ecuaţiile diferenţiale. În continuare se prezintă o adaptare a acestor metode pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii diferenţiale.

Metoda lui Euler (metoda clasică)

Se aplică în n paşi, valorile corespunzătoare ale funcţiilor $y_i(x)$, $i = 1,2,\dots,r$ la un pas j, $j = 1,2,\dots,n$ se determină cu relaţiile:

$$y_{i,j} = y_{i,j-1} + h \cdot f_i\left(x_{j-1}, y_{1,j-1}, y_{2,j-1}, \dots, y_{r,j-1}\right) = y_{i,j-1} + h \cdot f_{i,j-1}$$

$y_{i,j}$ i – identifică ecuaţia; j – identifică punctul intermediar

Metoda lui Euler modificată

$$y_{i,j} = y_{i,j-1} + \frac{h}{2} \cdot \left[f_{i,j-1} + f_i\left(x_j, y_{1,j-1} + h \cdot f_{1,j-1}, y_{2,j-1} + h \cdot f_{2,j-1}, \dots, y_{r,j-1} + h \cdot f_{r,j-1}\right)\right]$$

$$y'_i = \frac{dy_i}{dx} = f_i\left(x, y_1, y_2, \dots, y_r\right)$$

$$f_{i,j} = f_i\left(x_j, y_{1,j}, y_{2,j}, \dots, y_{r,j}\right)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Metoda lui Euler

Se dă sistemul de ecuaţii diferenţiale cu condiţii iniţiale Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}y0(x) = \sin(x) - \dfrac{y1(x)}{4} & y0(0) = \dfrac{\pi}{5} \\ \dfrac{d}{dx}y1(x) = \dfrac{3}{4}y0(x) - 2\cos(x) & y1(0) = \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$$

Să se determine valorile funcţiilor , *y0(x), y1(x)* pe intervalul [0,10π].

Pasul 1. Se definesc funcţiile caracteristice asociate ecuaţiile diferenţiale ce formează sistemul studiat.

$$f_1(x, y0, y1) := \sin(x) - \frac{y1}{4}$$

$$f_2(x, y0, y1) := \frac{3}{4} \cdot y0 - 2 \cdot \cos(x)$$

Metoda lui Euler

Pasul 2. Se definesc capetele intervalului, numărul de puncte intermediare de calcul şi se determină pasul de parcurgere al intervalului de definiţie:

$$a := 0 \qquad b := 10\pi \qquad N := 100 \qquad h := \frac{b-a}{N} \qquad h = 0.314$$

Pasul 3. Se determină şirul x_i de intermediare în care se doreşte calcularea valorilor funcţiilor necunoscute $y_i(x)$:

$$i := 0..N \qquad x_i := a + h \cdot i$$

Pasul 4. Se introduc condiţiile iniţiale Cauchy care descriu soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale:

$$y0_0 := \frac{\pi}{5} \qquad y1_0 := \frac{3\pi}{4}$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Pasul 5. Se calculează valoarea funcţiilor necunoscute în punctele intermediare x_i folosindu-se metoda lui Euler (forma clasică):

$$Rez := \left\| \begin{array}{l} Y_{0,0} \leftarrow y0_0 \\ Y_{1,0} \leftarrow y1_0 \\ \text{for } j \in 1..N \\ \quad \left\| \begin{array}{l} Y_{0,j} \leftarrow Y_{0,j-1} + h \cdot f_1\left(x_{j-1}, Y_{0,j-1}, Y_{1,j-1}\right) \\ Y_{1,j} \leftarrow Y_{1,j-1} + h \cdot f_2\left(x_{j-1}, Y_{0,j-1}, Y_{1,j-1}\right) \end{array} \right. \\ Y \end{array} \right.$$

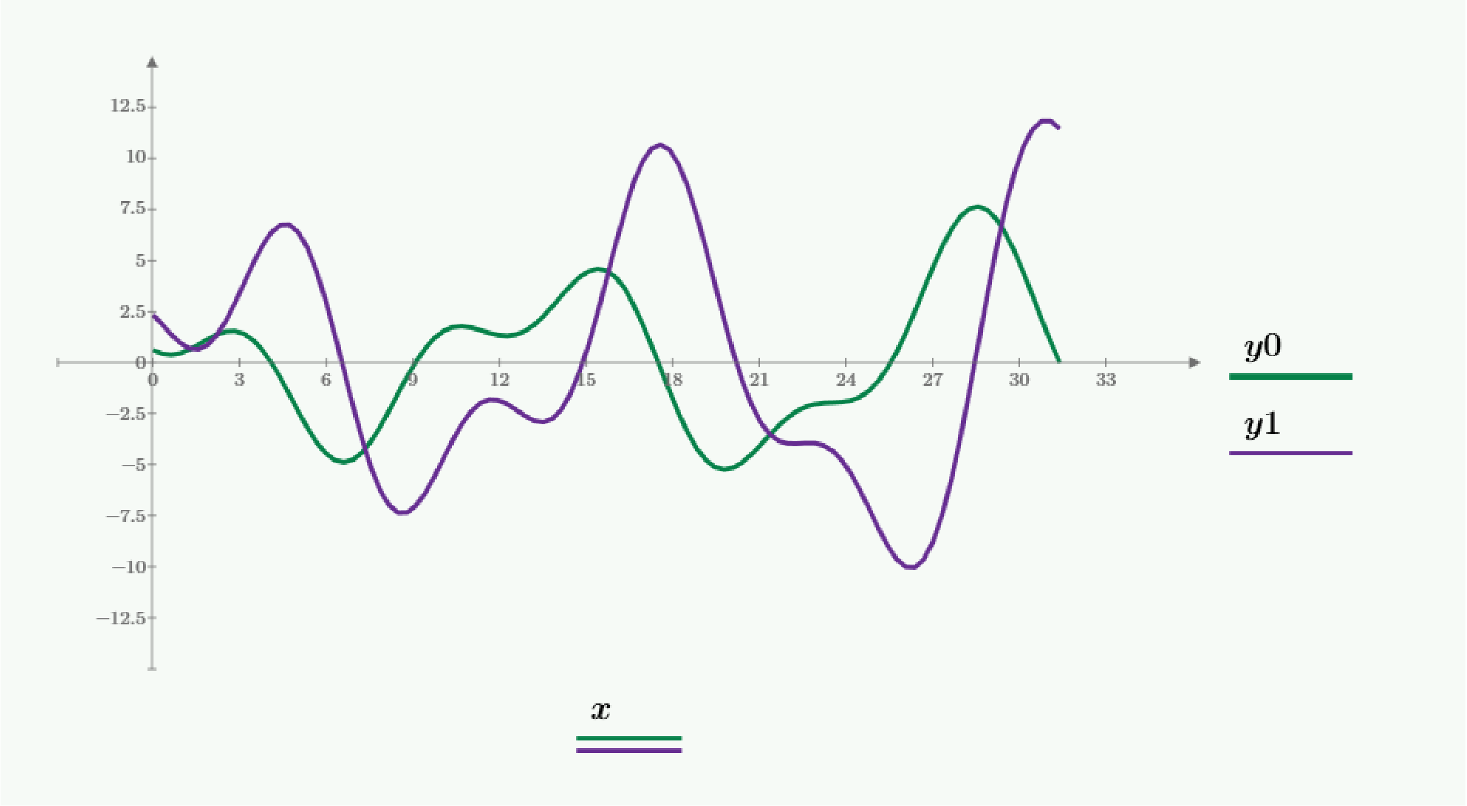
$$Rez = \begin{bmatrix} 0.628 & 0.443 & 0.393 & 0.469 & 0.647 & 0.89 & 1.152 & 1.382 & 1.531 & 1.556 & 1.424 & 1.12 & \\ 2.356 & 1.876 & 1.383 & 0.967 & 0.708 & 0.667 & 0.876 & 1.342 & 2.037 & 2.906 & 3.87 & 4.834 & \cdots \end{bmatrix}$$

Pasul 6. Se extrag valorile funcţiilor necunoscute y0(x), y1(x):

$$y0 := \left(Rez^{\mathrm{T}}\right)^{\langle 0 \rangle} \qquad y1 := \left(Rez^{\mathrm{T}}\right)^{\langle 1 \rangle}$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Pasul 7. Se reprezintă grafic soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale:



Metoda Runge-Kutta de ordinul IV:

$$k_{1,i} = h \cdot f_i\left(x_{j-1}, y_{1,j-1}, y_{2,j-1}, \ldots, y_{r,j-1}\right)$$

$$k_{2,i} = h \cdot f_i\left(x_{j-1} + \frac{1}{2}h, y_{1,j-1} + \frac{1}{2}k_{1,1}, y_{2,j-1}, \ldots, y_{r,j-1} + \frac{1}{2}k_{1,r}\right)$$

$$k_{3,i} = h \cdot f_i\left(x_{j-1} + \frac{1}{2}h, y_{1,j-1} + \frac{1}{2}k_{2,1}, y_{2,j-1}, \ldots, y_{r,j-1} + \frac{1}{2}k_{2,r}\right)$$

$$k_{4,i} = h \cdot f_i\left(x_j, y_{1,j-1} + k_{3,1}, y_{2,j-1} + k_{3,2}, \ldots, y_{r,j-1} + k_{3,k}\right)$$

$$y_{i,j} = y_{i,j-1} + \frac{1}{6}\left(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}\right)$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Funcţia predefinită „rkfixed”

Funcţia predefinită *rkfixed* rezolvă numeric un sistem de ecuaţii diferenţiale prin metoda Runge-Kutta cu pas fix.

$$y := rkfixed(init, x_i, x_f, N, D)$$

Funcţia predefinită „Rkadapt”

Funcţia predefinită *rkadapt* rezolvă numeric un sistem de ecuaţii diferenţiale prin metoda Runge-Kutta cu pas adaptativ.

$$y := Rkadapt(init, x_i, x_f, N, D)$$

Cele două funcţii returnează o matrice, care conţine pe prima coloană punctele intermediare de calcul, iar pe coloanele următoare valorile funcţiilor necunoscute în aceste puncte intermediare

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Problema 10.1: Să se rezolve circuitul în regim tranzitoriu ştiind că pentru t<0: i1(0)=0 şi i2(0)=0, respectiv E=V_0=100[V]; L_1=100[mH]; L_2=200[mH]; M=100[mH]; R_1=20[Ω]; R_2=10[Ω].

$E := 100$

$V_0 := 100$

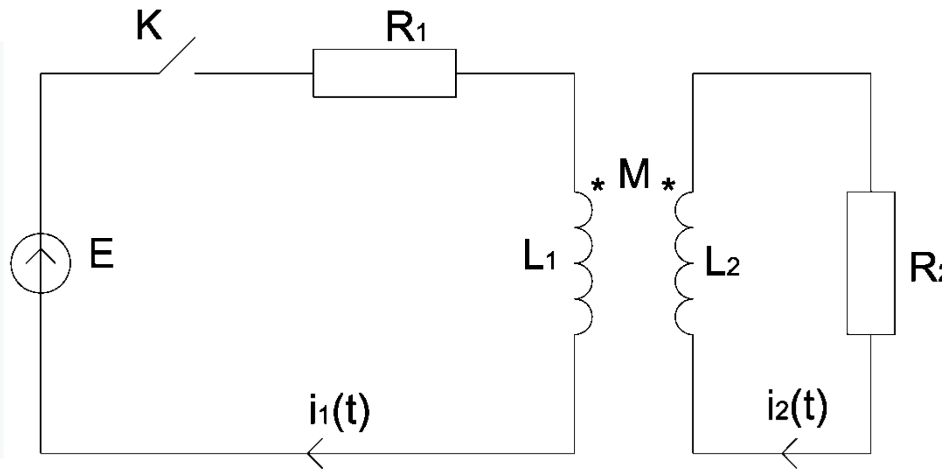
$L_1 := 100 \cdot 10^{-3}$

$L_2 := 200 \cdot 10^{-3}$

$M := 100 \cdot 10^{-3}$

$R_1 := 20$

$R_2 := 10$



Pasul 1. Se definesc teoremele lui Kirchhoff ce descriu circuitul studiat:

$$L_1 \cdot \frac{d}{dt} i_1(t) - M \cdot \frac{d}{dt} i_2(t) + R_1 \cdot i_1(t) = V_0$$

$$L_2 \cdot \frac{d}{dt} i_2(t) - M \cdot \frac{d}{dt} i_1(t) + R_2 \cdot i_2(t) = 0$$

Funcţia predefinită *"rkfixed"*

Pasul 2. Se extrage derivata lui *i1(t)* din prima ecuaţie şi se înlocuieşte în adoua ecuaţie:

$$\frac{d}{dt}i_1(t) = \frac{1}{L_1}\cdot\left(V_0 - R_1\cdot i_1(t) + M\cdot\frac{d}{dt}i_2(t)\right)$$

$$L_2\cdot\frac{d}{dt}i_2(t) - \frac{M}{L_1}\cdot\left(V_0 - R_1\cdot i_1(t) + M\cdot\frac{d}{dt}i_2(t)\right) + R_2\cdot i_2(t) = 0$$

Pasul 3. Se extrage derivata lui *i2(t)* din a doua ecuaţie şi se înlocuieşte în prima ecuaţie :

$$\frac{d}{dt}i_1(t) = \frac{1}{L_1}\left(V_0 - R_1\cdot i_1(t) + M\cdot\frac{d}{dt}i_2(t)\right)$$

$$L_2\cdot\frac{d}{dt}i_2(t) - \frac{M}{L_1}\cdot\left(V_0 - R_1\cdot i_1(t) + M\cdot\frac{d}{dt}i_2(t)\right) + R_2\cdot i_2(t) = 0$$

Funcţia predefinită “*rkfixed*”

Pasul 4. Se simplifică relaţiile de definiţie a derivatelor curenţilor i1(t) şi i2(t):

$$\frac{d}{dt} i_1(t) = \frac{1}{L_2 \cdot L_1 - M^2} \left(V_0 \cdot L_2 - \left(L_2 + M - \frac{M^2}{L_1} \right) \cdot R_1 \cdot i_1(t) - M \cdot R_2 \cdot i_2(t) \right)$$

$$\frac{d}{dt} i_2(t) = \frac{1}{L_2 \cdot L_1 - M^2} \cdot \left(M \cdot V_0 - L_1 \cdot R_1 \cdot i_1(t) - L_1 \cdot R_2 \cdot i_2(t) \right)$$

Pasul 5. Se defineşte vectorul de funcţii F(t,I) asociat membrului drept al sistemului de ecuaţii diferenţiale. Pentru indici 0,1 se foloseşte tasta „[”:

$$F(t,I) := \frac{1}{L_2 \cdot L_1 - M^2} \cdot \begin{bmatrix} V_0 \cdot L_2 - \left(L_2 + M - \frac{M^2}{L_1} \right) \cdot R_1 \cdot I_0 - M \cdot R_2 \cdot I_1 \\ M \cdot V_0 - L_1 \cdot I_0 - L_1 \cdot R_2 \cdot I_1 \end{bmatrix}$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Funcţia predefinită "*rkfixed*"

Pasul 6. Se definesc capetele intervalului de studiu şi numărul de puncte intermediare. Indicii *i* şi *f* se introduc cu tasta „.”:

$$t_i := 0 \qquad t_f := 0.2 \qquad N := 1000$$

Pasul 7. Se defineşte vectorul valorilor iniţiale:

$$I_0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pasul 8. Se apelează funcţia predefinită ***Rkfixed***:

$$sol := \mathrm{rkfixed}\left(I_0, t_i, t_f, N, F\right)$$

$$sol^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 2\cdot10^{-4} & 4\cdot10^{-4} & 6\cdot10^{-4} & 8\cdot10^{-4} & 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.002 & 0.002 & 0.002 & 0.002 & \\ 0 & 0.382 & 0.732 & 1.051 & 1.341 & 1.606 & 1.847 & 2.066 & 2.266 & 2.446 & 2.61 & 2.758 & \\ 0 & 0.198 & 0.391 & 0.579 & 0.763 & 0.943 & 1.119 & 1.291 & 1.459 & 1.624 & 1.785 & 1.942 & \dots \end{bmatrix}$$

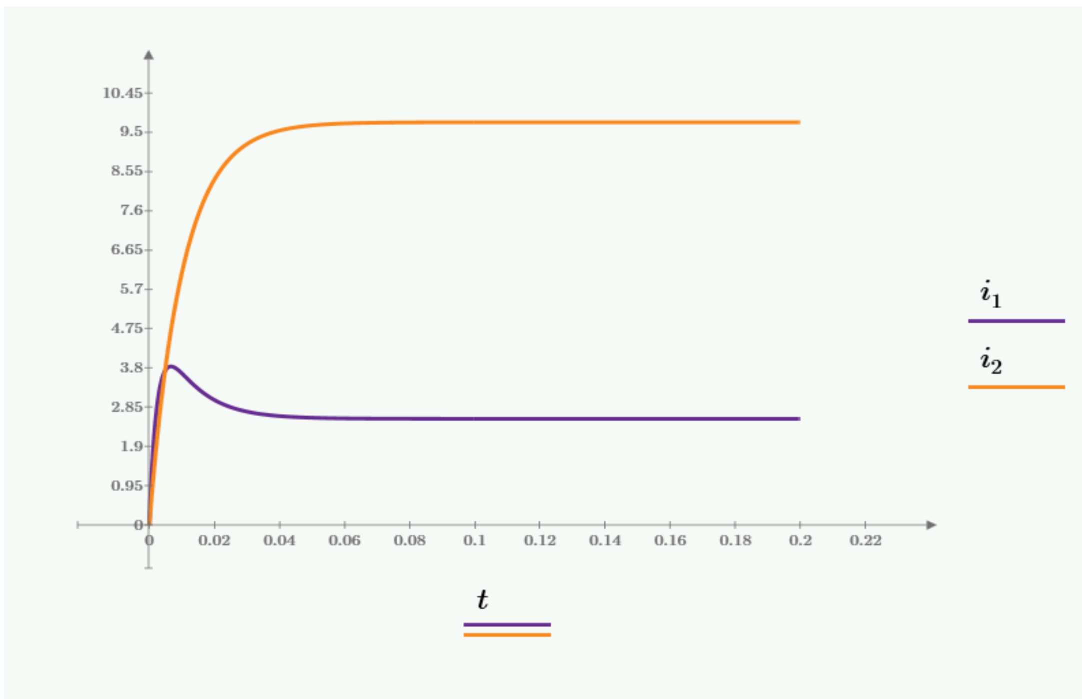
UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Funcţia predefinită "*rkfixed*"

Pasul 9. Se separă vectorul momentelor intermediare *t* şi al valorilor curenţilor *i1(x),* şi *i2(x)* la aceste momente de timp din matricea *Sol* rezultată. Separarea vectorilor *t*, *i1,* şi *i2* se face cu ajutorul comenzii Matrix Column din toolbar-ul Matrix (combinaţia de taste **"Ctrl+6"**):

$$t := sol^{\langle 0 \rangle} \qquad i_1 := sol^{\langle 1 \rangle} \qquad i_2 := sol^{\langle 2 \rangle}$$

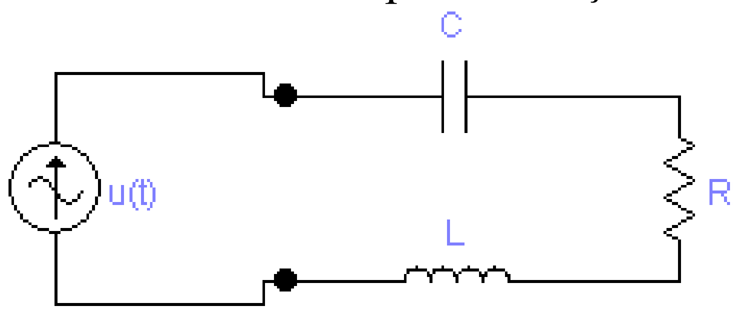
Pasul 10. Se reprezintă grafic curenţii din cele două circuite cuplate magnetic:



UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale de ordin superior

Se consideră un circuit R,L,C serie alimentat de la o tensiune oarecare u(t). Să se determine variaţia sarcinii electrice şi a intensităţii curentului electric din circuit în intervalul de timp de 60 ms ce trece de la începerea funcţionării.



$L := 0.2 \ \ H$ $\quad C := 30 \cdot 10^{-6} \ \ F$ $\quad R := 12 \ \ \Omega$ $\quad u(t) := 24 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot t)$

Se scrie teorema a doua a lui Kirchhoff pentru circuitul R,L,C serie de mai sus:

$$L \cdot \frac{d}{dt} i(t) + R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int i(t)dt = u(t)$$ - ecuaţie integro diferenţială

Se aplică legea conservării sarcinii electrice:

$$i(t) = \frac{d}{dt} q(t) \Rightarrow q(t) = \int i(t)dt \quad \text{şi} \quad \frac{d}{dt} i(t) = \frac{d^2}{dt^2} q(t)$$

Rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale de ordin superior

Se rescrie ecuaţia integro-diferenţială obţinută din teorema a doua a lui Kirchhoff sub formă de ecuaţie diferenţială de ordinul II:

$$L \cdot \frac{d^2}{dt^2} q(t) + R \cdot \frac{d}{dt} q(t) + \frac{1}{C} \cdot q(t) = u(t)$$

Se transformă ecuaţia diferenţială de ordinul II într-un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul I prin aplicarea următoarelor notaţii *q0(t)=q(t)* şi *q1(t)=q0'(t)*

$$\begin{cases} q1(t) = \frac{d}{dt} q0(t) \\ L \cdot \frac{d}{dt} q1(t) + R \cdot q1(t) + \frac{1}{C} \cdot q0(t) = u(t) \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} q0(t) = q1(t) & q0(0) = 0 \\ \frac{d}{dt} q1(t) = \dfrac{u(t) - R \cdot q1(t) - \frac{1}{C} \cdot q0(t)}{L} & q1(0) = 0 \end{cases}$$

UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

Funcţia predefinită "*Rkadapt*"

Pasul 1. Se defineşte vectorul de funcţii D(t,Q) asociat membrului drept al sistemului de ecuaţii diferenţiale. Pentru indici 0,1 şi 2 se foloseşte tasta „[”:

$$D(t,Q) := \begin{bmatrix} Q_1 \\ \dfrac{u(t) - R \cdot Q_1 - \dfrac{1}{C} \cdot Q_0}{L} \end{bmatrix}$$

Pasul 2. Se definesc capetele intervalului de studiu şi numărul de puncte intermediare. Indicii *i* şi *f* se introduc cu tasta „.”:

$$t_i := 0 \qquad t_f := 60 \cdot 10^{-3} \qquad N := 1000$$

Pasul 3. Se defineşte vectorul valorilor iniţiale:

$$Q_0 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pasul 4. Se apelează funcţia predefinită ***Rkadapt***:

$$sol := \mathrm{Rkadapt}\left(Q_0, t_i, t_f, N, D\right)$$

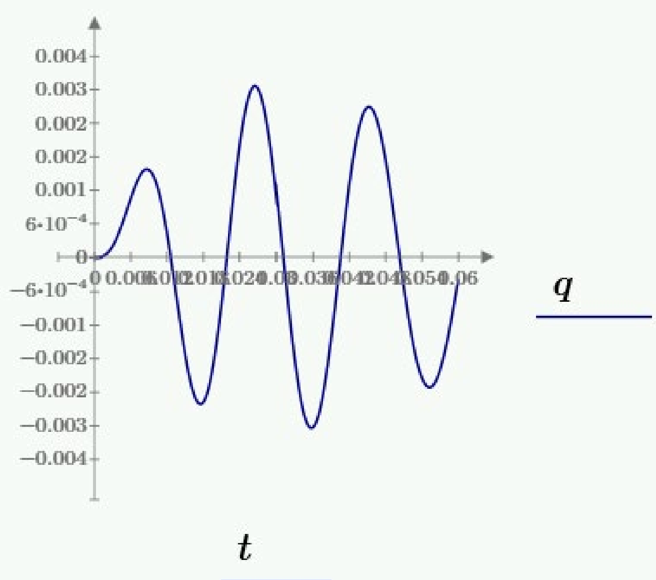
UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

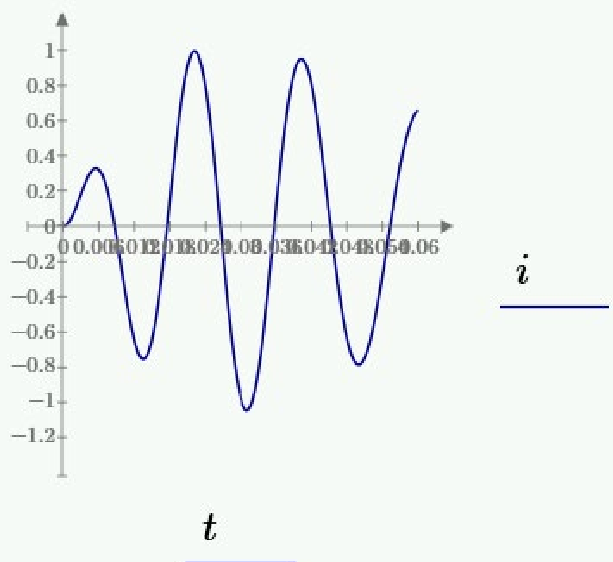
Funcţia predefinită "*rkfixed*"

Pasul 5. Se separă vectorul punctelor intermediare *t* şi al valorilor funcţiilor necunoscute *q(t)* şi *i(i)* în aceste puncte din matricea *Sol* rezultată. Separarea vectorilor *x*, *y0, y1* şi *y2* se face cu ajutorul comenzii Matrix Column din toolbar-ul Matrix (combinaţia de taste "**Ctrl+6**"):

$$t := sol^{\langle 0 \rangle} \qquad q := sol^{\langle 1 \rangle} \qquad i := sol^{\langle 2 \rangle}$$

Pasul 6. Se reprezintă grafic soluţiile sistemului de ecuaţii diferenţiale:





UNIVERSITATEA TEHNICĂ CLUJ-NAPOCA

METODE NUMERICE DE REZOLVARE A SISTEMELOR DE ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE