

Eficiența transmisiilor de date ce utilizează protocoale de comunicație de tip H-ARQ

1. Definiere

- protocoalele de tip H-ARQ (Hybrid ARQ) sunt protocoale ARQ care utilizează, alături de codul detector de erori ED, și un cod corector de erori, FEC (“forward error correction”).

- în cazul în care codul corector folosit este un cod bloc, „calitatea” cuvântului decodat este uneori determinată prin compararea sindromului cuvântului corectat cu sindromul nul; în aceste cazuri codul detector (CRC) nu mai este neapărat necesar. Trebuie însă ținut cont de probabilitatea de nedetectare a erorilor care poate apărea și în acest caz prin obținerea, în urma decodării, a unui alt cuvânt de cod în locul celui emis. Această probabilitate crește odată cu scăderea “puterii de corecție” a codului corector.

2. Tipuri de protocoale H-ARQ

– Există multe variante de protocoale de tip Hybrid ARQ; acest material prezintă o clasificare bazată pe trei tipuri generice, în funcție de natura mesajului folosit în cadrul retransmisiilor. Cele trei tipuri sunt:

I. H-ARQ tip I, cu repetarea mesajului codat (Repetition Redundancy - RR):

- Acest tip retransmite mesajul codat trimis în transmisia inițială de q ori. Codul este păstrat în toate retransmisiile, dar ordinul modulației acesta poate fi schimbat, în funcție de canal. Căpiile recepționate ale mesajului pot fi decodate independent sau combinat. Modalitatea de combinare a căpiilor mesajului la recepție este afectată de modulațiile utilizate, vezi considerentele de mai jos;

- dacă se folosește aceeași modulație în toate retransmisiile, în unele variante la fiecare retransmisie se schimbă regula de mapare. Pentru a înțelege rostul acestei operații, să ne reamintim că un fazor QAM este cel mai adesea eronat în favorii învecinați; dar multibiții mapați pe fazori învecinați diferă de obicei printr-un singur bit, plasat de obicei între ultimii doi biți. De aceea, în unele variante ale acestui tip de protocol, la fiecare retransmisie se rotesc între ei biții mapați pe un fazor dat.

- Decodarea unui bloc pentru care s-au recepționat mai multe „căpii” se face principial prin două metode:

- Decodare independentă a fiecărei transmisii. Aceasta implică ștergerea căpiei (căpiilor) care a(u) fost decodată(e) eronat și utilizarea doar a copiei recepționate la retransmisia curentă;
- Decodarea combinată a transmisiei curente, folosind căpiile blocului primite în transmisiile anterioare („soft-combining”). Combinarea căpiilor recepționate se face diferit în funcție de configurațiile utilizate în cele două transmisii:
 - prin combinare la nivel de simbol QAM, dacă s-a folosit aceeași modulație și aceeași regulă de mapare. Combinarea la nivel de simbol poate fi:
 - de tip Chase - se mediază valorile celor două căpii ale fiecărei coordonate recepționate pe o perioadă de simbol QAM
 - de tip SRC (Selective Ratio Combining) - pentru fiecare perioadă de simbol se alege căpia care are SNR-ul cel mai bun
 - de tip MRC (Maximum Ratio Combining) - nivelele semnalelor recepționate în fiecare perioadă de simbol în fiecare copie a blocului codat se sumează ponderat; factorii de ponderare sunt proporționali cu nivelul semnalului recepționat și invers proporționali cu dispresia zgomotului pe durata transmiterii copiei respective
 - prin sumarea LLR-urilor biților, obținute prin soft-demapping, dacă s-au folosit constelații și/sau mapări diferite.

- Abordările de tip “soft-combining” asigură un raport semnal/zgomot echivalent mai mare decât cel al transmisiilor independente, datorită diversității în timp a canalului.

II. H-ARQ tip II, cu redundanță incrementală (Incremental Redundancy -IR):

- Blocul de date este codat cu un cod părinte cu rată R_c ; acesta este puncturat la o rată $R_{c0} > R_c$ și se transmite. În unele variante blocul inițial se transmite necodat, $R_{c0} = 1$.

- În cadrul retransmisiilor se transmit doar biți de cod suplimentari, a.î. rata codării scade la fiecare retransmisie, de la R_{c0} pînă la $R_{cq} = R_c$.

- Acest tip de protocoale utilizează de obicei coduri convoluționale sau turbocoduri, iar decodarea se face utilizând utilizând probabilitățile a posteriori ale biților recepționați.

- În acest caz lungimea blocului trimis în timpul retransmisiilor e de obicei mai mică decât lungimea mesajului inițial, ceea ce ridică probleme la gestionarea resurselor radio ale schemei de transmisie.

- Dar această abordare are și următoarele avantaje:

- crește eficiența spectrală a transmisiei

- în schemele de transmisie punct-la-punct (cu acces individual la mediul de transmisie), scade întârzierea introdusă de retransmisii, datorită numărului mai mic de biți transmiși în cadrul acestora, pentru o aceeași probabilitate de retransmisie, față de protocoalele de tip I.
- în schemele de transmisie cu access multiplu, întârzierea este aceeași, dar scade necesarul de resurse timp-frecvență pentru achitarea unui bloc de date al unui utilizator. **Explicați principial!**

III. H-ARQ tip III, cu rată adaptivă a codării

- La prima transmisie blocul de date este codat cu un cod de rată R_0 , de obicei utilizându-se codul cu rata cea mai mare din setul de coduri selectat. La prima transmisie se poate trimite blocul necodat, $R_{c0} = 1$.

- În cele q retransmisii, se transmite din nou blocul de date codat cu coduri de rată din ce în ce mai mică (capacitate de corecție din ce în ce mai mare). Dar aceasta implică creșterea lungimii blocului transmis la fiecare retransmisie, ceea ce creează probleme de încadrare în capacitatea de transport a schemei de transmisie utilizate.

2. Calculul eficienței protocoalelor de H-ARQ de tip I (RR)

- Considerăm un protocol H-ARQ-SW în care blocul de date este codat cu un cod cu n biți/cuvântul de cod (bloc codat), k biți informaționali și rata $R_c = k/n$.

- Dacă mesajul protocolului are L biți iar confirmarea S biți, atunci numărul de cuvinte de cod (sau blocuri codate) pe care se transmit cele două mesaje este:

$$l_m = \lceil L/k \rceil + 1; \quad l_s = \lceil S/k \rceil + 1; \quad (1)$$

- Dacă blocurile de date nu sunt multiplii întregi ai lui k , fie se completează ultimul cuvânt de cod cu biți de tip „Pad”, fie se utilizează variante prescurtate ale codului.

- Eficiența intrinsecă a protocolului H-ARQ η_{ic} va fi exprimată în acest caz prin relația (2) fiind mai mică decât eficiența intrinsecă a unui protocol ARQ η_{in} datorită inserării biților suplimentari ai codului corector :

$$\eta_{ic} = \frac{L+S}{n(l_m + l_s) + N_d} \approx R_c \frac{L+S}{L+S+R_c \cdot N_d} < \frac{L+S}{L+S+N_d} = \eta_{in}; \quad (2)$$

- Pentru a determina eficiența transmisiei η_t avem nevoie de probabilitatea de recepționare corectabilă a unui cuvânt de cod (bloc codat) P_c care se calculează în mod specific în funcție de codul utilizat și de metoda de decodare folosită.

- În cazul general este mai întâi necesară calcularea probabilității de eroare de bit după decodare, p_b' ;

- Calculul acestei probabilități trebuie făcut diferențiat în funcție de modalitatea de decodare utilizată:

- decodare independentă a fiecărei retransmisii (côpii) a cuvântului de cod
 - decodare combinată folosind mai multe (toate) copii(le) ale cuvântului de cod recepționate
- În cazul decodării independente a cōpiilor mesajului probabilitatea p_b' se calculează în funcție de SNR prin modalități care depind de tipul codului și de algoritmul de decodare utilizat.

- În cazul decodărilor combinate, probabilitatea de eroare se calculează, în principiu, considerând o valoare echivalentă a SNR, așa cum s-a arătat în paragraful 1.1.

- Pentru decodarea independentă, o metodă aproximativă de calcul a p_b implică utilizarea relațiilor de calcul a BER pentru transmisiile necodate, în care raportul semnal/zgomot în exprimare liniară ρ se înlocuiește cu (3), în (3) cu C_G s-a notat câștigul codării modulației codate respective (metoda e aproximativă!):

$$\rho_{ech} = \rho + 10^{C_G/10}; \quad (3)$$

- Probabilitatea de recepție corectabilă a unui cuvânt de cod poate fi aproximată, în ipoteza distribuției binomiale a erorilor prin (4); trebuie însă reținut că valoarea furnizată de (4) este o limită inferioară a P_c .

$$P_c \geq (1-p_b)^n; \quad (4)$$

- Pentru cazul unor tipuri de coduri bloc (BCH, RS, Hamming, Fire) decodate cu algoritmi neiterativi, care urmăresc determinarea celui apropiat cuvânt de cod folosind sindromul (de ex. Berlekamp-Massey, Peterson-Chien), probabilitatea de decodare corectă a unui cod este dată de :

$$P_c = \sum_{j=0}^t C_n^j \cdot p_b^j \cdot (1-p_b)^{n-j}; \quad (5)$$

- Trebuie însă reținut că aceste metode de decodare sunt folosite mai rar în transmisiile moderne, deoarece asigură performanțe mai slabe decât algoritmii de decodare iterativi

- Pentru cazul codurilor decodate prin metode iterative (care nu urmăresc obținerea cuvântului de cod cel

mai apropiat de secvența recepționată, ci corectează fiecare bit), de exemplu codurile LDPC sau turbocodurile, vom nota cu P_c probabilitatea de decodare corectă a cuvântului de cod; pentru codurile convoluționale P_c va reprezenta probabilitatea de decodare corectă a blocului codat

- Apoi se calculează probabilitatea de achitare a mesajului și cea de retransmisie, utilizând relațiile:

$$P_{0c} = P_c^{l_m + l_s}; \quad P_{Rc} = 1 - P_{0c}; \quad (6)$$

- Probabilitățile de achitare după transmisia inițială și j retransmisii, $j \leq q$, și probabilitatea de intrare în count-timeout sunt:

$$P_j = P_{Rc}^j \cdot P_0; \quad P_T = 1 - \sum_{j=0}^q P_j = P_{Rc}^{q+1}; \quad (7)$$

- Numărul de biți transmiși pe durata unui count-timeout N_T poate fi echivalat prin factorul d' :

$$d' = \frac{N_T}{n(l_m + l_s) + N_d}; \quad (8)$$

- În cazul aplicațiilor care nu utilizează count-timeout, P_T reprezintă probabilitatea de pierdere a pachetului, iar d' devine nul.

- Eficiența transmisiei η_t asigurate de protocolul H-ARQ de tipul I (în varianta SW) se calculează similar cu cea a protocolului ARQ- SW, vezi relațiile (17) – (21) din cursul dedicat acestora.

- În urma acestor calcule eficiența protocolului H-ARQ de tipul I are expresia:

$$\eta_{HI-SW} = \frac{N_u}{N_t} = R_c \cdot \frac{L + S}{L + S + N_d} \cdot \frac{P_{0c}(1 - P_{Rc}^{q+1})}{1 - P_{Rc}^{q+1} + d' \cdot P_{0c} \cdot P_{Rc}^{q+1}} = \eta_{i-HI-SW} \eta_{t-HI-SW}; \quad (9)$$

- Debitul binar efectiv al transmisiei și eficiența spectrală se calculează cu relațiile:

$$\Theta_{HI-SW} = D_n \cdot \eta_{HI-SW}; \quad a. \quad \beta_{HI-SW} = \Theta_{HI-SW}/BW; \quad b. \quad (10)$$

- Dacă se elimină mecanismul protocolului, adică nu avem retransmisii ($q=0$) și nu avem count-timeout ($d'=0$), rezultă că $\eta_{tp} = P_{0c}$ care este eficiența transmisiei pentru legăturile fără protocol care folosesc același cod.

- Acesteia trebuie însă să i se asocieze probabilitatea de pierdere a unui pachet, egală cu $P_T = 1 - P_{0c}$.

- Pentru un număr infinit de retransmisii:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \eta_t = P_{0c} \quad (11)$$

- Dar pentru un protocol cu q foarte mare: $P_T \rightarrow 0 \leftrightarrow N_T = 0$ și $d' = 0$. Rezultă că:

$$\eta_{HI-SW} \rightarrow \frac{L + S}{n(l_m + l_s) + N_d} \cdot P_{0c} \approx R_c \frac{L + S}{L + S + R_c \cdot N_d} \cdot P_{0c}; \quad (12)$$

- Pentru $q > 3$ apar creșteri neglijabile ale eficienței exprimate de (9), sau eficiența nu se modifică deloc pentru conexiuni fără count time-out; este însă necesară creșterea dimensiunii bufferului la recepție pentru protocolele SR și GBn. Pe de altă parte, probabilitatea de pierdere a pachetului devine extrem de mică, vezi relația (7).

- Relația (12) combinată cu relația (10) arată că throughputul mediu al unei transmisii guvernate de un protocol H-ARQ tip I este mai mic decât cel al transmisiei neg guvernate de acest protocol care utilizează același cod corector de rată R_c , vezi relația (13):

$$\Theta_{HI-SW} = \eta_{HI-SW} \cdot D_n < P_{0L} \cdot R_c \cdot D_n = \Theta_{non-ARQ} \quad (13)$$

- În (13) prin P_{0L} s-a notat probabilitatea de recepție corectă a mesajului de lungime L , fără a mai considera și mesajul de confirmare S , adică:

$$P_{0L} = P_c^{l_m}; \quad (14)$$

- Scăderea throughputului și a eficienței spectrale este compensată creșterea probabilității de recepționare corectă a pachetelor, egală cu $(1 - P_T)$, care poate fi adusă foarte aproape de 1, prin creșterea numărului de retransmisii, adică $q \rightarrow \infty$. Fenomenul este similar cu cel ce apare în cazul transmisiilor necodate (ARQ).

Comparație între eficiențele asigurate de protocolele H-ARQ de tip I (SW) și ARQ-SW [studiu individual](#)

- Pentru a evidenția diferențele dintre eficiențele asigurate de protocolul ARQ-SW, relația (21) din cursul anterior, și protocolul H-ARQ tip I (SW), dată de (9), vom relua mai jos ambele relații:

$$\eta_{SW} = \frac{N_u}{N_t} = \frac{L+S}{L+S+N_d} \cdot \frac{P_0(1-P_R^{q+1})}{1-P_R^{q+1}+d \cdot P_0 \cdot P_R^{q+1}} = \eta_i \eta_t;$$

$$\eta_{HI-SW} \approx R_c \cdot \frac{L+S}{L+S+N_d} \cdot \frac{P_{0c}(1-P_{Rc}^{q+1})}{1-P_{Rc}^{q+1}+d' \cdot P_{0c} \cdot P_{Rc}^{q+1}} = \eta_{i-HI} \cdot \eta_{t-HI};$$
(15)

- Datorită capacității de corecție a codului, probabilitatea de achitare a mesajului din prima transmisie P_{0c} a variantei codate e mai mare decât cea a variantei necodate, P_0 ; similar pentru probabilitățile de achitare din cea de a j-a retransmisie. De asemenea probabilitatea de intrare în count timeout (sau de pierdere a pachetului) a variantei codate e mai mică decât ce a variantei necodate.

- Rezultă că eficiența transmisiei variantei codate η_{t-HI} e mai mare decât cea a variantei necodate η_t ;

- Dar numărul de biți transmiși în fiecare mesaj e mai mare datorită redundanței suplimentare introduse de cod, deci eficiența intrinsecă a variantei codate η_{i-HI} să fie mai mică decât cea a variantei necodate η_i .

- Deoarece eficiența globală a unui protocol e egală cu produsul celor două eficiențe, rezultă că:

a. La valori mici ale BER eficiența transmisiei este foarte apropiată de 1 pentru ambele variante, în timp ce η_{i-ARQ} va fi mai mare decât η_{i-HI} , și deci protocolul necodat va asigura eficiență mai mare

b. La valori mari ale BER, eficiența transmisiei protocolului codat va fi mult mai mare decât cea a protocolului necodat și va compensa valoarea mai scăzută a eficienței intrinseci, și drept urmare protocolul codat va asigura o eficiență mai ridicată.

- Cele două situații sunt rezumate în relațiile (16):

a. $\eta_{t-ARQ} = C_1 \cdot \eta_{t-HI} < \eta_{t-HI}$; $C_1 < 1$ (apropiat de 1); $\eta_{i-ARQ} = C_2 \cdot \eta_{i-HI} > \eta_{i-HI}$; $C_2 > 1$; $C_2 \cdot C_1 > 1$ (16)

b. $\eta_{t-ARQ} = C_1 \cdot \eta_{t-HI} < \eta_{t-HI}$; $C_1 < 1$ (mult mai mic ca 1); $\eta_{i-ARQ} = C_2 \cdot \eta_{i-HI} < \eta_{i-HI}$; $C_2 > 1$; $C_2 \cdot C_1 < 1$ $C_3 < C_1$

- Din cele de mai sus rezultă că există o valoare de prag a BER (sau BLER), BER_{th} ($BLER_{th}$), sub care protocolul necodat asigură o deficiență mai ridicată și peste care protocolul codat asigură o eficiență mai ridicată, așa cum se arată în exemplul prezentat în figura 1; condiția echivalentă în (16) e $C_1 > 1/C_2$ sau $C_1 < 1/C_2$

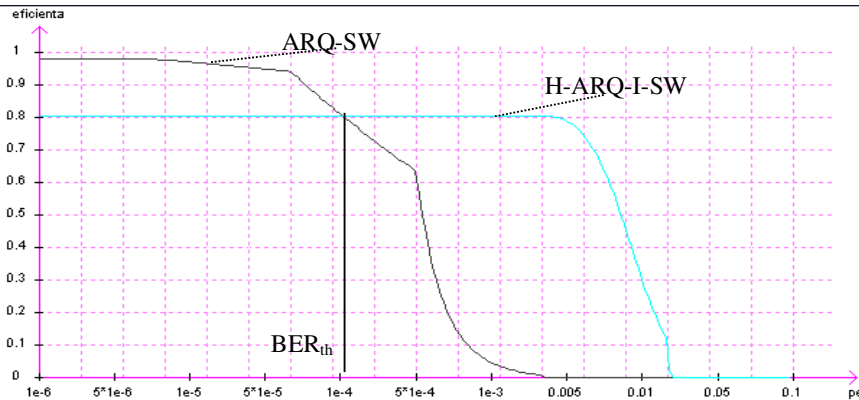


Figura 1. Comparație între eficiențele protocoalelor ARQ-SW și H-ARQ tip I-SW în funcție de BER

- Valorile BER_{th} ($BLER_{th}$) depind în cea mai mare măsură de rata și capacitatea de corecție ale codului utilizat, precum și de lungimea pachetului L. **studiu individual ↑**

- Timpul mediu de achitare al unui bloc este:

$$t_m = \frac{L}{\eta_{HI-SW} \cdot D} \quad (17)$$

- Întârzierea medie introdusă de utilizarea protocolului H-ARQ se calculează ca diferența dintre timpul mediu de achitare și timpul necesar pentru efectuarea primei transmisii:

$$\tau_m = t_m - t_0 = \frac{L}{D} \left(\frac{1}{\eta_{HI-SW}} - 1 \right) \quad (18)$$

- Variația întârzierilor în jurul valorii medii ia valori multiplii întregi ai timpului necesar transmiterii unei perechi $(L+S)$ și se poate exprima în funcție de probabilitățile P_j de achitare a unui bloc după retransmisia j, într-un mod similar cu cel prezentat la protocolul ARQ, vezi și laboratorul. Această exprimare permite și calculul dispersiei acestei variabile aleatoare.

- Modalitățile de dimensionare a bufferelor discutate în cazul protocoalelor ARQ pot fi aplicate și în cazul acestui tip de protocole.

- Calculul eficienței acestui tip de protocol H-ARQ prezentat mai sus e valabil pentru situația în care se folosește aceeași modulație și deci debitul binar nominal D este constant.

- În cazul utilizării adaptive a modulațiilor QAM care folosesc același cod, pentru calculul eficienței, throughputului și timpului mediu de achitare a unui bloc asigurate de acest protocol trebuie făcute următoarele modificări în metoda descrisă mai sus:

- În funcție de valoarea SNR se alege modulația utilizată, iar BER se calculează cu formula specifică modulației respective (vezi cursul de A+PSK-TM și cel de modulații adaptive), folosind un SNR echivalent dat de suma dintre SNR din canal și câștigul codării C_G , exprimate în dB;
- Valoarea lui BER obținută este introdusă în calculul lui P_{0ck} pentru modulația k , iar apoi se calculează o probabilitate medie P_{0c}^{avg} , cu relația (19), în care W este numărul constelațiilor folosite adaptiv, iar w_k sunt probabilitățile de stare, vezi cursul de modulații codate:

$$P_{0c}^{avg} = \sum_{k=1}^W w_k \cdot P_{0ck} \quad (19)$$

- Utilizând P_{0c}^{avg} se poate calcula eficiența urmând metoda descrisă mai sus;
- Debitul D este înlocuit cu debitul mediu D^{avg} dat de (20), în care D_k este debitul nominal asigurat de utilizarea constelației cu index k , cu probabilitate w_k , in schema de transmisie utilizată:

$$D^{avg} = \sum_{k=1}^W w_k \cdot D_k \quad (20)$$

- Utilizând D^{avg} , se pot calcula throughputul mediu, timpul mediu de achitare a unui bloc și întârzierile introduse.

- Rata codării R_c și constelația utilizate, precum și numărul maxim de retransmisii se determină în funcție de probabilitatea de pierdere a unui bloc (prin eronare) și de întârzierile medie și maximă permise de serviciul oferit. Considerente privind această chestiune vor fi prezentate în secțiunea 5 a acestui curs.

3. Eficiența protoalelor H-ARQ de tipul II - IR

- Protoalele H-ARQ de tipul II codează cei L biți ai blocului de date cu un cod părinte de rată R_c .

- În mod uzual se folosesc coduri convoluționale (sau turbocoduri) sistematice, care pot fi „puncturate”, obținându-se codurile RCPC sau RCPTC (rate compatible punctured (turbo) convolutional).

- Pentru prima transmisie blocul codat este „puncturat” pentru a asigura o rată a codării R_0 , și un număr de biți de cod N_0 (21) care sunt transmiși.

$$N_0 = \frac{L}{R_0} \quad (21)$$

- Dacă blocul astfel transmis este confirmat negativ la prima încercare, atunci blocul codat cu codul părinte este „puncturat” la o rată R_1 , $R_c < R_1 < R_0$ mesajul codat având N_1 biți (22. a). Se transmit însă doar cei ΔN_1 (22.b) biți de cod (nu nepărat numai biți de control) care nu au fost transmiși anterior.

$$N_1 = \frac{L}{R_1}; \text{ a. } \Delta N_1 = N_1 - N_0 = L\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0}\right); \text{ b.} \quad (22)$$

- În mod similar la retransmișiile următoare j , $j = 2, \dots, q$, se „puncturează” mesajul codat cu codul părinte la ratele descrescătoare R_j , care respectă condiția;

$$R_0 > R_1 > R_2 > \dots > R_j > \dots > R_q = R_c \quad (23)$$

și se transmit doar biții de cod care nu au fost transmiși în retransmișiile anterioare, în număr de ΔN_j .

- Numerele de biți ale mesajelor codate cu aceste coduri N_j și numerele biților de control transmise la retransmisia de index j , ΔN_j , sunt:

$$N_j = \frac{L}{R_j}; \text{ a. } \Delta N_j = N_j - N_{j-1} = L\left(\frac{1}{R_j} - \frac{1}{R_{j-1}}\right); \text{ b.} \quad (23)$$

- În ultima retransmisie se folosește codarea cu codul părinte, rată $R_q = R_c$, iar numerele de biți ai blocului codat și cei transmiși, N_q și respectiv ΔN_q sunt:

$$N_q = \frac{L}{R_q}; \text{ a. } \Delta N_q = N_q - N_{q-1} = L\left(\frac{1}{R_q} - \frac{1}{R_{q-1}}\right); \text{ b.} \quad (24)$$

- Codurile echivalente folosite succesiv în cele $q+1$ transmisii ale blocului au câștigurile codării C_{Gj} care cresc odată cu scăderea ratei codului (creșterea redundanței transmise):

$$C_{G0} < C_{G1} < \dots < C_{Gj} < \dots < C_{Gq}; \quad (25)$$

- Presupunând că valoarea SNR din canal rămâne constantă pe durata transmisiei, se poate considera că mesajele succesive ale retransmisiilor sunt trimise pe canale cu SNR-uri echivalente SNR_{ech}^j , date de:

$$SNR_{ech}^j = SNR + C_{Gj} \quad (26)$$

- iar probabilitățile de eroare de bit asigurate de modulația utilizată pot fi calculate (aproximativ!) cu relația, vezi capitolul A+PSK din cursul de TM:

$$p_b^j(SNR_{ech}^j) = C_N Q\left(\sqrt{V_N \rho_{ech}^j}\right) / n \quad (27)$$

unde C_N și V_N sunt constante care depind de numărul de fazori ai constelației utilizate, vezi cursul de TM, iar n este numărul de biți/simbol ai constelației cu $N = 2^n$ fazori.

- Probabilitatea P_{c0} ca blocul codat cu rata R_0 la prima transmisie să fie recepționat corectabil este:

$$P_{c0} = (1 - p_b^0)^{N_0}; \quad (28)$$

- Probabilitatea P_{cj} ca blocul codat cu rata R_j la cea de-a $j+1$ -a încercare să fie recepționat corectabil este:

$$P_{cj} = (1 - p_b^j)^{N_j}; \quad (29)$$

- Mesajul de confirmare de S biți se va transmite pentru toate retransmisiile codat cu codul „părinte” ce asigură p_b^q și o lungime a blocului codat $S' = S/R_q$.

- Probabilitatea de recepționare corectabilă a mesajului de confirmare va fi:

$$P_{conf} = (1 - p_b^q)^{S'}; \quad (30)$$

- Probabilitatea de “achitare” a blocului codat după prima transmisie P_0 se obține considerând că evenimentul are loc dacă blocul codat și mesajul de confirmare sunt recepționate corectabil, (31.a), iar probabilitatea de retransmisie P_{R0} , după transmisia cu codul cel mai “slab” va fi complementul acesteia, (31.b):

$$P_0 = P_{c0} \cdot P_{conf} = (1 - p_b^j)^{N_0} \cdot (1 - p_b^q)^{S'}; \text{ a. } P_{R0} = 1 - P_0; \text{ b.} \quad (31)$$

- Probabilitățile de achitare P_j și de retransmisie P_{Rj} după retransmisia cu index j (a $j+1$ -a încercare), pentru $j = 1, \dots, q$, se vor determina considerând că primele j încercări s-au soldat cu retransmisii, și doar ultima este reușită:

$$P_j = P_{R0} \cdot P_{R1} \cdot \dots \cdot P_{Rj-1} \cdot P_{cj} \cdot (1 - p_b^q)^{S'}; \text{ a. } P_{Rj} = 1 - P_j; \text{ b.} \quad (32)$$

- Probabilitatea de intrare în count timeout P_T (sau de pierdere a blocului codat) se obține considerând că toate transmisiile și/sau retransmisiile au fost eronate :

$$P_T = P_{R0} \cdot P_{R1} \cdot \dots \cdot P_{Rj} \cdot \dots \cdot P_{Rq}; \quad (33)$$

- Numărul mediu de biți utili achitați după cele $q+1$ încercări este:

$$N_u = (L + S)[P_0 + P_{R0} \cdot P_1 + \dots + P_{R0} \cdot P_{R1} \cdot \dots \cdot P_{Rj-1} \cdot P_j + \dots + P_{R0} \cdot P_{R1} \cdot \dots \cdot P_{Rq-1} \cdot P_q]; \quad (34)$$

- Exprimând probabilitățile de retransmisie P_{Rj} ca și complementele probabilităților de achitare P_j (32.b) în expresia (34) vor apărea produse între 2 sau mai multe probabilități. Dacă se presupune că modulația este aleasă a.î. transmisia codată să asigure $p_b^j < 10^{-3}$, atunci produsele de 2 sau mai multe probabilități se pot neglija iar numărul mediu de biți utili achitați după $q+1$ încercări se poate aproxima prin:

$$N_u \approx (L + S)[P_0 + P_1 + \dots + P_j + \dots + P_q] = (L + S) \cdot \sum_{j=0}^q P_j; \quad (35)$$

- Numărul total de biți N_T ce ar putea fi transmiși pe durata T_T a count timeout-ului cu debitul D poate fi pus sub forma (36), unde N_d este numărul de biți ce poate fi transmis pe durata $t_p + t_i + t_c$ pentru cazul SW, vezi cursul privitor la eficiența protoalelor ARQ (necodate),:

$$N_T = D \cdot T_T = d \cdot (L + S + N_d); \quad (36)$$

- Numărul mediu total de biți transmiși pentru achitarea celor N_u biți utili, N_t , se calculează ținând cont de numărul de biți transmiși la fiecare retransmisie, care este egal cu $\Delta N_j + S/R_q + N_d$ (vezi (23)) înmulțit cu probabilitatea de efectuare a respectivei retransmisii, P_{Rj} , (32.b):

$$N_t = L \left[\frac{1}{R_0} + P_{R_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} \right) + \dots + P_{R_0} \cdot \dots \cdot P_{R_{j-1}} \left(\frac{1}{R_j} - \frac{1}{R_{j-1}} \right) + \dots + P_{R_0} \cdot \dots \cdot P_{R_{q-1}} \left(\frac{1}{R_q} - \frac{1}{R_{q-1}} \right) \right] + \left(\frac{S}{R_q} + N_d \right) \left[(1 + P_{R_0} + \dots + P_{R_0} \cdot \dots \cdot P_{R_{j-1}} + \dots + P_{R_0} \cdot \dots \cdot P_{R_{q-1}}) \right] + P_T \cdot N_T \quad (37)$$

- Considerând aproximarea folosită pentru obținerea lui (35) numărul mediu de biți transmiși pentru achitarea a N_u biți devine:

$$N_t \approx L \left[\frac{1}{R_0} + (1 - P_0) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} \right) + \dots + (1 - P_0 - \dots - P_{j-1}) \left(\frac{1}{R_j} - \frac{1}{R_{j-1}} \right) + \dots + (1 - P_0 - \dots - P_{q-1}) \left(\frac{1}{R_q} - \frac{1}{R_{q-1}} \right) \right] + \left(\frac{S}{R_q} + N_d \right) \left[(1 + (1 - P_0) + \dots + (1 - P_0 - \dots - P_{j-1}) + \dots + (1 - P_0 - \dots - P_{q-1})) \right] + P_T \cdot N_T \quad (38)$$

- Această aproximare trebuie utilizată cu precauție pentru a nu apărea valori negative în calcule
- Eficiența protocolului H-ARQ de tip II, $\eta_{H-II-SW}$, poate fi exprimată făcând raportul între N_u și N_t , fie sub formele lor exacte, (34) și (37), fie sub formele aproximative (35) și (38).
- Și pentru acest tip de protocol, în cazul aplicațiilor care nu acceptă count timeout, N_T va fi egalat cu zero, iar P_T reprezintă probabilitatea de pierdere a blocului codat (pachetului).
- Noile variante ale standardelor aplicațiilor comerciale prevăd utilizarea unor coduri bloc, caz în care se schimbă codul utilizat la fiecare retransmisie, setul de coduri bloc având rate descrescătoare dar același număr de biți de informație. La fiecare retransmisie se primum doar biții de control ai noului cod, decodorul reasamblând cuvântul de cod.
- Trebuie remarcat că pentru H-ARQ de tip II expresia eficienței nu poate fi pusă sub forma unui produs între eficiența internă și eficiența transmisiei, datorită faptului că mesajul de confirmare trebuie transmis integral la fiecare transmisie și faptului că acesta trebuie codat cu codul cel mai „puternic” (de rată minimă) pentru a i se asigura o probabilitate de eroare minim posibilă.
- Eficiența acestui protocol poate fi mărită substanțial dacă sistemul poate estima probabilitatea de eroare de bit din canal. În acest caz, prin comparația acestei probabilități cu un set de praguri se poate determina rata optimă de la care trebuie începută procedura de tip H-ARQ II, adică rata folosită la transmisia inițială.
- Dacă p_b are o valoare medie sau mare, probabilitatea ca prima transmisie codată cu rata R_0 (cea mai mare) să fie corectabilă este extrem de scăzută, și de aceea aceasta trebuie evitată. Dacă se dispune de o estimare a valorii p_b atunci prima transmisie va utiliza direct rata de codare R_j care asigură o valoare a P_j acceptabilă pentru prima transmisie. Astfel eficiența protocolului ar crește datorită netransmiterii primelor j mesaje care implică și j grupuri N_d transmise. De asemenea întârzierea introdusă ar scădea considerabil.
- Estimarea probabilității de eroare de bit poate fi făcută și folosind valoarea SNR măsurată de sistemul de transmisie în care se aplică protocolul H-ARQ; în acest caz se vor folosi praguri de SNR care vor indica rata codării transmisiei inițiale, într-un mod similar cu pragurile folosite în cazul modulațiilor adaptive.
- În cazul utilizării unei structuri de tip full-duplex și a unui protocol de tip SR, eficiența se obține anulând termenul N_d în relațiile (37) și (38).
- Și pentru protocoalele de tipul II timpul mediu de achitare al unui bloc se obține împărțind lungimea blocului la throughputul mediu asigurat de transmisia guvernată de acest tip de protocol:

$$t_m = \frac{L}{\eta_{H-II-SW} \cdot D} \quad (39)$$

- Întârzierea medie introdusă de utilizarea protocolului H-ARQ-II se calculează ca diferența dintre timpul mediu de achitare și timpul necesar pentru efectuarea primei transmisii:

$$\tau_m = t_m - t_0 = \frac{L}{D} \left(\frac{1}{\eta_{H-II-SW}} - 1 \right) \quad (40)$$

- În sistemele cu acces individual (point-to-point) variația întârzierilor în jurul valorii medii este dată de timpii necesari transmiterii fiecărei perechi ($\Delta N_j + S'$) și de probabilitățile P_j de achitare a unui bloc după retransmisia j .
- Dar ținând cont că în sistemele cu acces multiplu retransmișiile sunt trimise cu frecvența de cadru (frame) a sistemului, se poate spune că în aceste sisteme timpii necesari achitării după fiecare retransmisie sunt multipli întregi ai timpului necesar transmiterii unei perechi ($L+S$). Acești timpii apar cu probabilitățile P_j de achitare după retransmisia de index j , într-un mod similar cu cel prezentat la protocolul ARQ. Această

exprimare permite și calculul dispersiei acestei variabile aleatoare.

- Creșterea eficienței transmisiei se manifestă în acest caz prin reducerea volumului de resurse timp-frecvență (număr de simboluri QAM) necesare.
- Modalitățile de dimensionare a bufferelor discutate în cazul protocoalelor ARQ pot fi aplicate și în cazul acestui tip de protocoale, dar calculul este mai complex.
- Compararea dintre eficiența asigurată de protocolul H-ARQ de tip II și cel de tip I este dificil de realizat în mod direct, adică prin compararea expresiilor (9) și a raportului dintre (35) și (38). Rezultatul comparației depinde în primul rând de domeniul de valori în care se află probabilitatea de eroare de bit p_b asigurată de modulația utilizată pe canalul în cauză și de parametrii codului utilizat în protocolul de tip I, precum și granularitatea modificării ratei protocolului utilizat în protocolul de tip II.
- Dacă codul utilizat la tipul I are o capacitate medie de corecție, vezi figura 1, atunci pentru p_b mici și medii, probabilitățile de retransmisie sunt foarte mici.
- Protocolul de tip II, va asigura probabilități mici de retransmisie pentru p_b mici și probabilități mai mari de retransmisie pentru p_b medii.
- Dar eficiența intrinsecă a protocolului de tip I poate fi relativ scăzută (număr relativ mare de biți suplimentari transmiși), pe când protocolul de tip II transmite mai puțin biți redundanți. De aceea, în general pentru p_b mici $\eta_{\text{HII-SW}} > \eta_{\text{HI-SW}}$.
- Pentru p_b medii, protocolul de tip I poate asigura o eficiență mai ridicată, deoarece probabilitatea de a asigura achitarea din prima transmisie crește, pe când protocolul de tip II este obligat să încerce câteva retransmisii până atinge rata corespunzătoare. Trebuie considerat că aceste retransmisii implică și transmiterea biților N_d .
- Pentru p_b mari, codul de capacitate medie al protocolului de tip I este „depășit”, adică asigură o probabilitate mică de achitare din prima transmisie, iar la fiecare retransmisie se transmite întreg blocul codat.
- Protocolul de tip II ar putea avea același număr de retransmisii până atinge rata de codare necesară acestui canal, dar numerele de biți transmiși în aceste retransmisii sunt mai mici și de aceea el va asigura o eficiență mai mare. De asemenea întârzierea introdusă este mai mică deoarece lungimea fiecărui mesaj de retransmisie este mai mică, doar $\Delta N_j + S_{Rq}$ biți. La transmisiile bazate pe frame –intârzierea e aceeași, dar volumul de resurse timp-frecvență (care pot fi exprimate prin numărul de simboluri QAM) necesar e mai mic.
- Ratele de codare (și constelațiile) utilizate succesiv și numărul maxim de retransmisii se vor determina în funcție de probabilitatea de eroare (sau de pierdere prin eroare) a unui bloc de date și de întârzierile medii și maximă specifice aplicației transmise. Pentru unele considerente privind aceste aspecte vezi secțiunea 5 a acestui curs.