

Tehnica de transmisie cu multiplexare în frecvență pe purtătoare ortogonale (OFDM)

Datorită propagării multicale, caracteristica de transfer în frecvență a canalelor radio prezintă fenomenul de fading selectiv în frecvență, care introduce variații mari ale atenuării semnalului pentru diferite frecvențe ale acestuia; un astfel de canal este caracterizat de banda de coerență, B_c **definire**

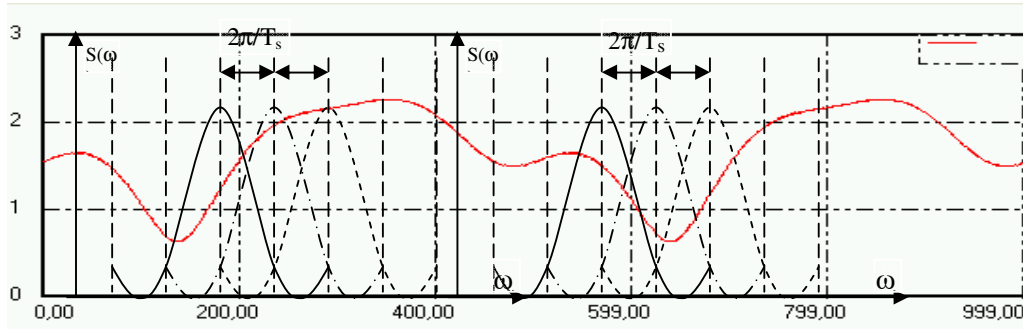


Figura 1. Caracteristica atenuare-frecvență a unui canal cu propagare multicale (multipath) și spectrul unei transmisii multipurtătoare

Abordând acum canalul în domeniul timp, răspunsul la impuls Dirac al unui astfel de canal este constituit dintr-o succesiune de impulsuri care sunt întârziate cu valori ce constituie o variabilă aleatoare cu dispersia σ_t , iar amplitudinilor lor iau valori aleatorii conform unei distribuții Rayleigh. Acest tren de impulsuri se întinde pe o perioadă mai mare decât perioada de simbol a unei transmisii monopurtător, care are T_s mic, provocând interferență intersimbol (ISI) nenulă și necontrolată.

Metodele folosite în general pentru a contracara această distorsionare sunt bazate pe extinderea duratei simbolului. Aceasta se poate realiza prin distribuirea informației ce trebuie transmisă, într-un număr mare de sub-canale; purtătoarea fiecărui sub-canal transportă un debit redus de informație. Aceasta idee transformă un canal de banda largă cu o selectivitate pronunțată în frecvență într-un număr mare de canale neselective de banda îngustă care sunt multiplexate în frecvență (Frequency Division Multiplexing).

1. Principiul OFDM

Fluxul datelor de intrare este subdivizat în N fluxuri de date cu debit redus care sunt modulate independent pe purtătoare ortogonale, divizând astfel canalul în mai multe “sub-canale” având puterea concentrată în benzi de frecvență mai înguste. Fiecare din aceste purtătoare poate fi modulată independent și optimizată din punct de vedere al puterii emise.

Dacă cele N subcanale în care a fost împărțit canalul de bandă largă au purtătoarele ortogonale între ele (pentru a elimina interferența intercanal în momentele de sondare, la recepție) sistemul devine unul O.F.D.M. (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*).

Pe fiecare subcanal, având frecvența purtătoare f_k ($k = 0, \dots, N-1$), se modulează QAM simbolul complex $c_k = a_k + jb_k$, care corespunde unui număr n_k biți, și care are valoarea constantă pe o perioadă de simbol. Frecvențele subpurtătoare sunt separate prin $1/T_s$ Hz, pentru a le asigura ortogonalitatea reciprocă, și au valorile:

$$f_k = k / T_s; \quad k = 1, \dots, N-1; \quad (1)$$

Semnalul modulat OFDM în banda de bază este suma semnalelor modulate QAM (cu produsul complex) pe fiecare subpurtătoare, și are expresia:

$$\begin{aligned} z(t) &= \sum_{k=0}^{N-1} [(a_k \cos \omega_k t - b_k \sin \omega_k t) + j(b_k \cos \omega_k t + a_k \sin \omega_k t)] = \sum_{k=0}^{N-1} A_k \cdot (\cos \Phi_k + j \sin \Phi_k) \cdot e^{j\omega_k t} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j\omega_k t}; \quad 0 \leq t \leq T_s; \quad z(t) = I(t) + jQ(t); \quad c_k = a_k + jb_k = A_k \cdot (\cos \Phi_k + j \sin \Phi_k) \end{aligned} \quad (2)$$

Ortogonalitatea subpurtătoarelor rezultă imediat, vezi (.3), pentru subpurtătoarele k și p :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \cos(2\pi k f_s t) \cos(2\pi p f_s t) dt &= \frac{1}{2T_s} \int_0^{T_s} \cos[2\pi(k+p)f_s t] \cdot \cos[2\pi(k-p)f_s t] dt = \\ &= \frac{1}{4\pi(k+p)f_s} \sin[2\pi(k+p)f_s t] \Big|_{t=0}^{t=T_s} + \frac{1}{4\pi(k-p)f_s} \sin[2\pi(k-p)f_s t] \Big|_{t=0}^{t=T_s} = C \cdot \delta_{k,p} \end{aligned} \quad (3)$$

Schema de principiu a unui modulator OFDM-BB este prezentată în figura 2

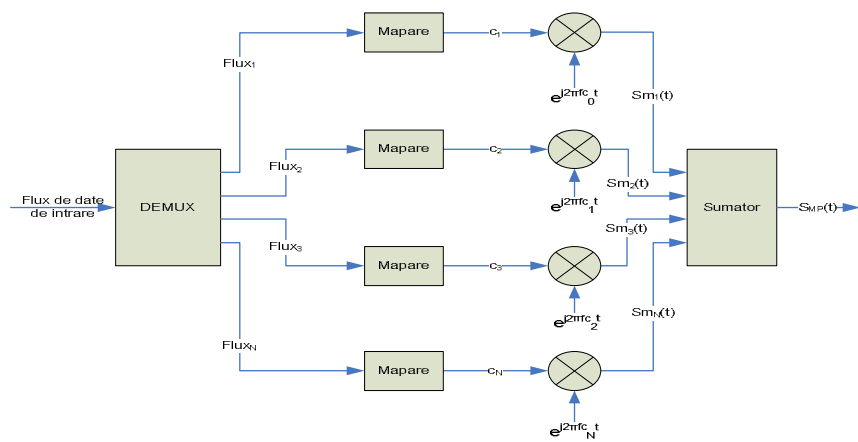


Fig. 2 Schema bloc de principiu a emițătorului OFDM

Pentru a asigura o eficiență spectrală ridicată a transmisiei numărul subcanalelor trebuie să fie mare, putând ajunge la ordinul miilor. De aceea, realizarea analogică sau digitală a N modulatori separați este ineficientă și extrem de complexă.

Principial, demodularea QAM se poate realiza folosind metodele descrise în cursul de TD. În principiu, demodularea unui subcanal k implică înmulțirea semnalului OFDM-BB cu semnalul subpurtător local complex recuperat ($e^{j\omega_k t}$, adică $\cos\omega_k t$ și $\sin\omega_k t$), filtrarea TJ a produselor obținute pe cele două ramuri în cuadratură, și sondarea cu tactul de simbol recuperat, a semnalelor obținute.

Schema de principiu a demodulatorului OFDM este dată în figura 3. (Nu sunt reprezentate blocurile de sondare ale tactului de simbol). Datorită ortogonalității subpurtătoarelor (.3), în urma înmulțirii cu subpurtătoarea locală complexă de ordin k și medierii, semnalul rezultat este semnalul modulator de pe subcanalul k. Demodularea QAM separată a celor N sub-canale ridică probleme de implementare deosebite.

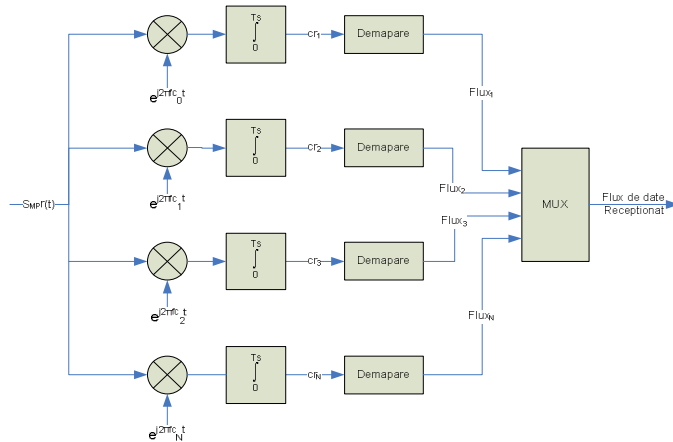


Fig. 3 Schema bloc de principiu a receptorului OFDM - nu sunt figurate sondarea și decizia

2. Modularea-demodularea digitală

Pentru generarea digitală a semnalului $x(t)$ este necesară eșantionarea setului de perechi de nivele modulatori ($a_k, b_k, k = 0, \dots, N-1$) generate de secvența de date, de pe durata celui de-al i-lea simbol OFDM, cu rata $1/T_e = N/T_s$ ($f_e = N \cdot f_s$), astfel încât să se obțină câte o pereche de eșantioane ale fiecărei perechi de nivele modulatori de pe fiecare subcanal (index k), și conversia sa A/D. Deoarece nivelele modulatori provenite prin maparea multibiților de date, setul de simboluri complexe $c_k = a_k + j b_k$, au valori constante pe durata unei perioade de simbol, adică a N perioade de eșantionare, rezultă că utilizarea câte unei singure perechi de eșantioane pentru fiecare c_k este suficientă pentru a-i defini valoarea. -desen pe tablă Vom exprima semnalele subpurtătoare ca fiind generate folosind aceeași frecvență de eșantionare (.4).

$$\cos 2\pi \cdot k f_s t \Rightarrow \cos 2\pi \cdot k \frac{nT_e}{T_s} = \cos \frac{2\pi \cdot kn}{N}; \quad \sin 2\pi \cdot k f_s t \Rightarrow \sin 2\pi \cdot k \frac{nT_e}{T_s} = \sin \frac{2\pi \cdot kn}{N}; \quad (.4)$$

Semnalul OFDM astfel eșantionat are expresia (.5).

$$x(nT_e) \equiv x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi \cdot kn/N}, \quad n=0,1,2, \dots, N-1. \quad (.5)$$

- Expresia (.5) reprezintă transformata Fourier inversă discretă (IDFT) în N puncte a semnalului modulator de date, setul de numere complexe $\{c_k\}$, $k=0,1,\dots,N-1$, care se implementează cu algoritmul IFFT.
- În (.5), n reprezintă indexul timpului discret (multiplu al perioadei de eşantionare), iar k reprezintă indexul frecvenței discrete (multiplu al separației în frecvență dintre subpurtătoare sau al frecvenței de simbol OFDM). *Pentru interpretarea relației (.5) vezi desenul de pe tablă*
- Integrala de definiție a transformatei Fourier inverse trebuie aplicată pe domeniul de frecvențe $0,\dots,(N-1)\cdot f_s$, iar frecvența nu variază continuu, ci ia valori discrete $k\cdot f_s$; mai mult, timpul nu este nici el continuu, ci ia valori discrete, nT_e . De aceea integrala se transformă într-o sumă finită, vezi cursul de PNS.
- simbolurile modulatorare complexe $c_k = a_k + jb_k$, pot fi coordonatele unor semnale de tip A+PSK, sau ale unor semnale de tip DPSK sau ale oricărui tip de semnale care pot fi generate utilizând tehnica QAM;
- Rezultă că fiecare subpurtătoare poate fi modulată distinct cu diverse tipuri de modulații, prin “construirea” corespunzătoare a tabelului de mapare a fiecărui cadru (simbol) OFDM; trebuie însă ținut cont de complexitatea realizării tabelului de mapare (și implicit a celui de demapare-decizie, la recepție)
- Dacă $a_k = b_k = 0$, atunci subpurtătoarea respectivă are amplitudine nulă.
- Pentru a genera N canale unice, este necesară transmiterea de eşantioane complexe cu frecvența $f_e = N\cdot f_s$.
- Ieșirea IDFT-ului (.5) poate fi pusă sub forma:

$$x(n) = \sum_{k=1}^n [a_k + jb_k] \left[\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + j \sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right] = I(n) + jQ(n) \quad (.6)$$

- Ieșirile IDFT (N reale și N imaginare) sunt acum separat multiplexate pentru a obține N eşantioane complexe pe o perioadă de simbol T_s , vezi figura 4. După această multiplexare separată a celor două parti, imaginară și reală, are loc conversia digital-analogică și o filtrare TJ, cu $f_t = f_e/2$, pentru a limita banda de bază a semnalelor modulatorare.
- Semnalul OFDM-BB de bandă limitată trebuie traslatat în banda de frecvență a canalului de transmisie, axată pe f_p . Această translație este realizată printr-o modulare QAM [TD-anIV], care pentru frecvențe purtătoare mari se realizează analogic.

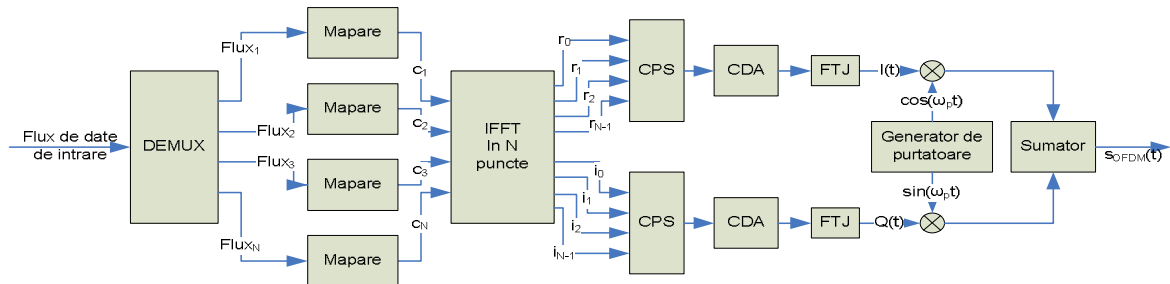


Fig. 4 Schema bloc de principiu a emițătorului OFDM - varianta digitală cu IFFT

- După filtrare timpul devine continuu. Deci, știind că $t = nT_e$ și $N = f_e/f_s = 1/(T_e f_s)$, obținem:

$$x(n) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} c_k e^{j\frac{2\pi kn}{N}} \Rightarrow x(t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} c_k e^{j2\pi k f_s n T_e} = \sum_{k=0}^{N/2} c_k e^{j2\pi k f_s t} + \sum_{k=-N/2}^{-1} c_{N-k} e^{j2\pi k f_s t} = I(t) + jQ(t) \quad (.7)$$

- Modularea pe purtătoarea din canal e o modulație QAM care poate fi pusă sub forma:

$$s(t) = I(t)\cos\omega_p t - Q(t)\sin\omega_p t = \text{Re}\{x(t)e^{j\omega_p t}\} = \text{Re}\left\{\sum_{k=0}^{N/2} c_k e^{j2\pi(f_p+kf_s)t} + \sum_{k=-N/2}^{-1} c_{N-k} e^{j2\pi(f_p+kf_s)t}\right\} \quad (.8)$$

- La recepție are loc translația semnalului în banda de bază, conversia analog-digitală a semnalelor de pe cele două căi, în fază și în cuadratură, obținându-se $2N$ valori (N reale, N imaginare) pe o perioadă de simbol OFDM.
- Se presupune că frecvența de eşantionare a receptorului este egală cu frecvența de eşantionare a emițătorului, iar cele două semnale de eşantionare sunt sincronizate.
- Considerând că semnalul OFDM este transmis printr-un canal radio caracterizat de un răspuns finit la impuls $h(t)$ cu o întârziere (durată) maximă τ_M , semnalul recepționat pe o perioadă de simbol va fi:

$$y_{OFDM-BB}(t) = s_{MP}(t) * h(t) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k c_k e^{j2\pi f_k t}; \quad 0 \leq t < T_s; \quad h_k = \int_0^{\Delta} h(\tau) e^{j2\pi f_k \tau} d\tau \quad (.9)$$

unde h_k este transformata Fourier a răspunsului la impuls $h(t)$ evaluată în banda subpurtătoarei k . Acest răspuns complex modelează distorsiunile de fază și amplitudine ale canalului analogic, $h_k = |h_k|e^{j\phi_k}$

- Semnalul analogic recepționat va fi de forma :

$$r(t) = \text{Re} \left[\sum_{k=0}^{N/2} h_k \cdot c_k e^{j2\pi(f_p + kf_s)t} + \sum_{k=-N/2}^{-1} h_k \cdot c_{N-k} e^{j2\pi(f_p + kf_s)t} \right], 0 \leq t \leq T_s \quad (.10)$$

- *Motivația înmulțirii semnalului modulator complex, pe perioada unui simbol OFDM, cu valorile caracteristicii în frecvență a canalului, va fi dată după explicarea intervalului de gardă.*

- demodularea QAM (translația în banda de bază) este echivalentă cu înmulțirea cu $e^{-j\omega_p t}$ urmată de FTJ, pentru atenuarea componentelor axate pe frecvența $2f_p$.

- După translatarea în banda de bază, folosind un oscilator local cu frecvența f_p , semnalul complex va fi de forma:

$$y'(t) = \left[\sum_{k=0}^{N/2} h_k \cdot c_k e^{j2\pi(f_p + kf_s)t} + \sum_{k=-N/2}^{-1} h_k \cdot c_{N-k} e^{j2\pi(f_p + kf_s)t} \right] \cdot e^{-j2\pi f_p t} =$$

$$\left[\sum_{k=0}^{N/2} h_k \cdot c_k e^{j2\pi k f_s t} + \sum_{k=-N/2}^{-1} h_k \cdot c_{N-k} e^{j2\pi k f_s t} \right] = [I'(t) + jQ'(t)] \quad (.11)$$

- Dacă în ecuația (.11) se substituie $t = nT_e$ se obține expresia semnalului eșantionat, după translația de pe frecvența purtătoare în banda de bază:

$$y'(n) = \sum_{k=0}^{N/2} h_k \cdot c_k e^{j2\pi k n / N} + \sum_{k=-N/2}^{-1} h_k \cdot c_{N-k} e^{j2\pi k n / N}, n=0,1,\dots,N-1 \quad (.12)$$

- Aplicând transformata Fourier discretă în N puncte semnalului $y'(nT_e)$, la ieșirea w a acestui bloc se obțin nivelele demodate corespunzătoare subpurtătoarei w (13), vezi cursul de TD.

- Notând $p = k-w$, avem:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y'_n \cdot e^{-j2\pi w n / N} = \frac{N}{N} \cdot h_w c_w + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq 0}}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h_p \cdot c_p \cdot e^{\frac{j2\pi p n}{N}} =$$

$$= h_w c_w + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq 0}}^{N-1} \frac{h_p \cdot c_p}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{\frac{j2\pi p}{N}} \right)^n = h_w c_w + \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq 0}}^{N-1} \frac{h_p \cdot c_p}{N} \cdot \frac{e^{\frac{j2\pi p N}{N}} - 1}{e^{\frac{j2\pi p}{N}} - 1} = h_w c_w, w = 0, \dots, N-1 \quad (.13)$$

- În (13), semnalul obținut la ieșirea w este compus din doi termeni: primul arată „contribuția” semnalului modulat pe subcanalul w la semnalul obținut pe ieșirea w , iar al doilea arată suma „contribuțiilor” semnalelor modulate pe celelalte $N-1$ subcanale ($k \neq w$) la ieșirea w . Datorită ortogonalității relative a subpurtătoarelor, contribuțiile celorlalte $N-1$ subpurtătoare sunt nule, în ipoteza unor sincronizări perfecte, vezi cursul de TD

- Aceasta înseamnă că demodularea nivelului modulator afectat de canal pe subpurtătoarea w , $h_w c_w$, se obține aplicând transformata Fourier discretă (DFT) setului $\{y_n\}$, $n=0,1,\dots,N-1$. Dacă se presupune că atât frecvența purtătoare cât și frecvența de simbol OFDM (și implicit frecvența de eșantionare) au fost corect recuperate la recepție, și dacă distorsiunile introduse de canal se consideră a fi corectate de egalizorul în domeniul frecvență plasat după blocul FFT, cele N ieșiri ale DFT-ului sunt nivelele complexe modulate ale fiecărei subpurtătoare și sunt constante pe durata unei perioade de simbol T_s .

- Transformatele Fourier discrete (inversă, la emisie, și directă, la recepție) se implementează prin algoritmi IFFT și, respectiv, FFT.

- Din cele de mai sus rezultă că în transmisiile OFDM, alături de operațiile de modulare-demodulare (IFFT-FFT în N puncte), modulare-demodulare QAM (pentru translația pe purtătoare de canal) și de egalizare a canalului (DFE) sunt necesare următoarele operații de sincronizare:

- sincronizarea purtătorului local
- sincronizarea semnalului de eșantionare
- sincronizarea tactului de simbol OFDM, pentru a delimita corect, după translația în BB și eșantionare, eșantioanele ce corespund unei perioade de simbol OFDM.

- Schema bloc a demodulatorului QAM-OFDM este prezentată în fig.5, în care nu au fost reprezentate blocurile de recuperare ale semnalelor de tact, egalizare, sondare, decizie, demapare și serializare a datelor demodate.

- Sistemul OFDM este, în esență, un sistem QAM generalizat care reunește un număr mare de sisteme QAM, care sunt însă interdependente, nici un sistem QAM elementar nefiind filtrat (vezi fig. 5).

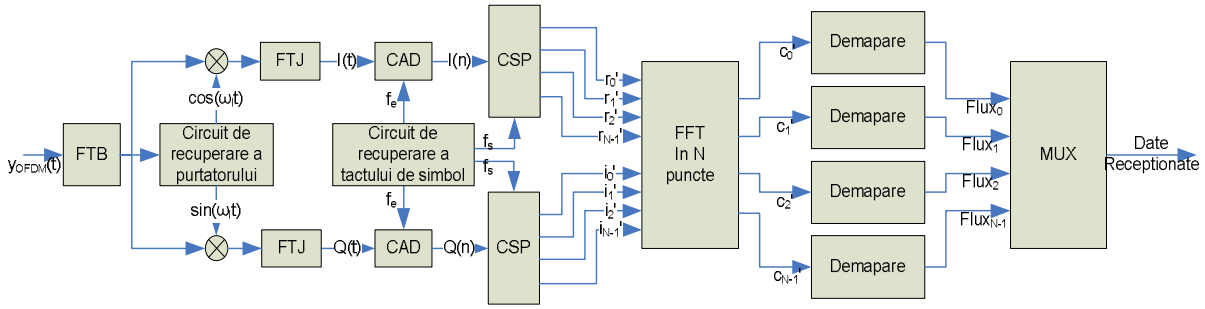


Fig. 5 Schema bloc de principiu a receptorului OFDM - varianta digitală cu FFT

4. Proprietăți spectrale ale tehnicii OFDM

- Semnalul de date modulator OFDM este, așa cum s-a mai precizat, un impuls dreptunghiular, $g(t)$, de durată T_s , acest impuls fiind modulat pe subpurătoarea subcanalului fără filtrare. Nefiltrarea semnalului modulator este o condiție necesară pentru obținerea modulației OFDM prin utilizarea algoritmului IFFT. Spectrul corespunzător acestui impuls dreptunghiular va fi un sinus atenuat:

$$g(t) = \begin{cases} 1; & t \in \left[-\frac{T_s}{2}, \frac{T_s}{2}\right]; \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}; \quad G(\omega) = T_s \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)}{\frac{\omega T_s}{2}} \quad (.14)$$

- Spectrul semnalului OFDM-BB e format din spectre elementare sinus atenuat, axate pe subpurătoarele distanțate cu ω_s , după cum se prezintă în fig. 6. Subcanalele OFDM prezintă o suprapunere spectrală accentuată, demodularea simbolurilor de pe un anumit canal fiind totuși posibilă datorită ortogonalității subpurătoarelor.

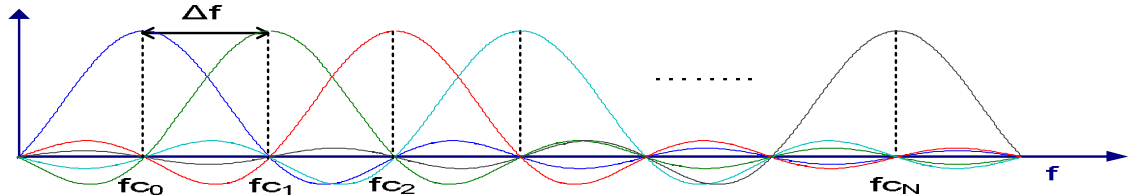


Fig. 6. Suprapunerea spectrală a semnalelor OFDM.

- Lărgimea de bandă a semnalului OFDM banda de bază, considerând strict necesar pentru o demodulare corectă numai lobul principal pe fiecare sub-purătoare, este:

$$LB_{OFDM-BB} = N \cdot f_s \quad (.15)$$

- O altă particularitate importantă legată de proprietățile spectrale ale semnalului OFDM-BB generat digital prin utilizarea algoritmului IFFT, constă în faptul că semnalul este obținut cu o frecvență de eșantionare f_e , care nu respectă teorema eșantionării semnalelor reale. Spectrul semnalului OFDM-BB depășește limita $N \cdot f_s / 2 = f_e / 2$, ultima subpurătoare având valoarea $(N-1) \cdot f_s$.

- Eșantionând semnalul cu lărgimea de bandă dată de ecuația (.15), aparent nu se respectă teorema eșantionării, dar dacă se consideră că semnalul modulat pe o subpurătoare este un semnal complex de forma (.16), obținut prin produsele complexe dintre subpurătoarele complexe de tip $e^{jk\omega_s t}$ și semnalele modulatorie complexe c_k căruia îi sunt transmise ambele componente ale fiecărui produs complex.

$$s_k(t) = x_k(t) \cdot e^{j\omega_k t}; \quad x_k(t) = c_k \cdot g(t); \quad \omega_k = 2\pi f_k; \quad (.16)$$

și se consideră că $X_k(f)$ este transformata Fourier a funcției modulatorie $x(t)$, spectrul semnalului modulat pe sub-purătoarea k pe baza teoremei convoluției va fi (.17), unde $\delta(\bullet)$ este funcția Dirac:

$$S_k(\omega) = X_k(\omega) * [2\pi\delta(\omega + \omega_k)] = 2\pi X_k(\omega + \omega_k) \quad (.17)$$

- Pe baza relației (.17) spectrul semnalului OFDM este descris de ecuația (.18), care arată că, pentru un semnal modulator cu banda de frecvență finită, semnalul OFDM bandă de bază are componente spectrale numai în domeniul frecvențelor pozitive (Fig.7.a).

$$S_{OFDM}(\omega) = 2\pi \sum_{k=0}^{N-1} X_k(\omega + \omega_k) \quad (.18)$$

- semnalul OFDM în banda de bază este generat digital cu frecvența de eșantionare f_e . De aceea spectrul său unilateral (21) trebuie înmulțit cu $\sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{-j \cdot i \cdot \omega_e}$; rezultă că spectrul unilateral dat de (21) va apărea atât pe multiplii pozitivi ai lui f_e cât și pe cei negativi, ceea ce face ca spectrul semnalului OFDM-BB generat digital să aibă componente atât în domeniul frecvențelor pozitive, cât și în domeniul frecvențelor negative, vezi Fig. 7.a

- În cazul în care semnalul modulat pe o subpurtătoare este un semnal real, similar celui descris de (.8), spectrul semnalului OFDM va fi descris de ecuația (.19), adică spectrul de frecvență al semnalului este bilateral, având componente atât în domeniul negativ cât și în domeniul pozitiv a frecvențelor, Fig.7.b.

$$S_{OFDM}(\omega) = 2\pi \left[\sum_{k=0}^{N-1} X_k(\omega - \omega_k) + \sum_{k=0}^{N-1} X_k(\omega + \omega_k) \right] \quad (.19)$$

- Pentru respectarea teoremei eșantionării, frecvența de eșantionare în cazul semnalului complex trebuie să fie $\geq Nf_s$, iar în cazul semnalului real $\geq 2Nf_s$, Fig.7.b. în ipoteza în care ultima componentă spectrală nenulă a semnalului OFDM banda de bază are frecvența $(N-1)f_s + f_s$, datorită benzii laterale superioare a semnalului modulat pe subpurtătoarea de frecvență $(N-1)f_s$.

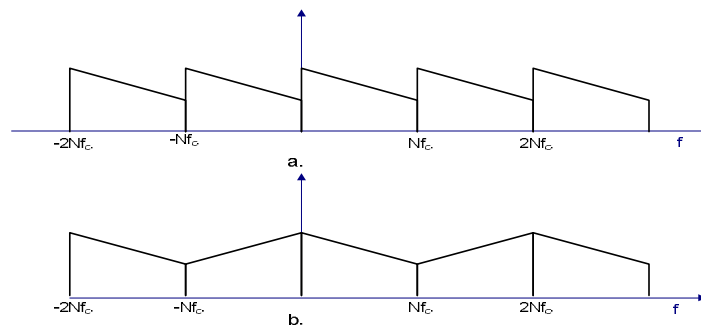


Fig.7. Alura spectrală a semnalului OFDM complex eșantionat cu $f_e=Nf_s$ (a.) și a semnalului real eșantionat cu $f_e=2Nf_s$ (b.)

- Rezultă că *spectrul semnalului OFDM- BB nu va mai prezenta simetrie față de axa Oy datorită transmiterii produselor complexe $c_k \cdot e^{j\omega_k t}$ pe fiecare subpurtătoare*

- Ținând cont de spectrul semnalului OFDM complex exprimat în relația (.17) și reprezentat principal în Fig. 7.a., se obține relația următoare pentru subpurtătoarele de frecvență negativă:

$$-\omega_m = \omega_{N-m} \quad |m \leq N/2 \quad -f_s \leftrightarrow c_{N-1}; \dots -kf_s \leftrightarrow c_{N-k}; \quad k \leq N/2; \quad (.20)$$

adică subpurtătoarea cu frecvența $-mf_s$ coincide cu subpurtătoarea de frecvență $(N-m)f_s$.

- La trecerea pe purtătoarea canalului f_0 , datorită acestei nesimetrii, subcanalele vor fi dispuse, în raport cu frecvența purtătoare, în felul următor (vezi fig. 8):

- subcanalele 1 până la $N/2-1$, vor fi plasate în banda laterală superioară, iar canalele $N/2+1$ până la $N-1$ vor fi plasate în banda laterală inferioară, în ordine crescătoare înspre purtătoare
- canalul $N/2$, va avea partea inferioară în banda superioară a semnalului translatat și partea superioară în banda inferioară a semnalului translatat.
- canalul 0 va fi axat pe purtătoarea f_0 .

- Semnalul translatat va fi filtrat trece-bandă, $[f_0 - Nf_s/2, f_0 + Nf_s/2]$. Datorită realizării practice a filtrului TB de ieșire, canalul $N/2$, va fi transmis în ambele benzi laterale, ceea ce face ca după translatarea în BB la recepție el să apară distorsionat. De aceea se impune precauție în modularea acestui canal.

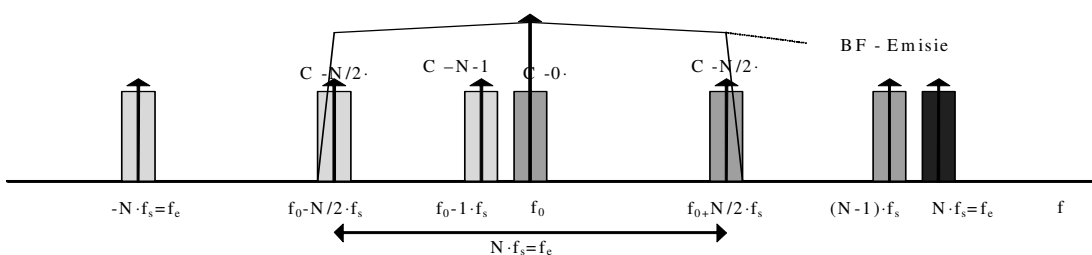


Fig. 8. Spectrul semnalului OFDM generat digital și translatat în banda canalului de transmisie

- Canalul 0 este lăsat uneori nemodulat, pentru a se transmite un semnal pilot pe frecvența purtătoare.
- Consecințe ale acestor proprietăți spectrale:
- nu este necesară transmiterea a două benzi laterale, ca la QAM;
- se pot utiliza benzi de frecvență concatenate sau agregate - vezi exemplificare pe tabla

4. Intervalul de gardă.

- O condiție esențială pentru demodularea corectă a simbolurilor transmise cu modulația OFDM este legată de menținerea ortogonalității subpurtătoarelor, aceasta fiind singura posibilitate de a se elimina efectul suprapunerii spectrale între subcanale.
- Datorită întârzierilor diferite cu care ajung la recepție copiile semnalului pe diferitele căi ce compun propagarea multicale introdusă de canalului radio, apare interferență intersimbol între simbolurile OFDM transmise; prin simbol OFDM se înțelege suma tuturor semnalelor de pe toate subcanalele, transmise pe durata T_s , a perioadei de simbol a datelor paralele.
- Această interferență se manifestă prin extinderea în timp a simbolurilor OFDM, ceea ce duce la suprapunerea parțială a acestor simboluri. Datorită debitului redus al simbolurilor OFDM această interferență, raportată la perioada de simbol T_s , nu este foarte mare, dar totuși o parte a simbolului OFDM va fi afectată, ceea ce va duce la apariția $I.S_{OFDM.I}$ și la demodularea eronată a datelor transmise, datorită distorsionării unora dintre eșantioanele semnalului OFDM care vor intra în blocul FFT. Din relația (.13) se poate vedea că fiecare eșantion de timp OFDM influențează fiecare ieșire FFT, și implicit fiecare simbol de date c_k demodulat.
- O metodă de eliminare a efectelor acestei interferențe constă în inserarea unui *interval de gardă* între simbolurile OFDM.
- Aceasta constă în mărirea duratei simbolului OFDM, fără mărirea numărului de subpurtătoare. O parte anterioară a unui simbol OFDM va fi distorsionată de interferența intersimbol, introdusă de simbolul anterior, dar această parte nu va fi folosită în demodulare.
- Durata simbolului OFDM este mărită cu o valoare $\Delta = u \cdot T_s$ ($u \leq 1/4$), numită interval de gardă, care

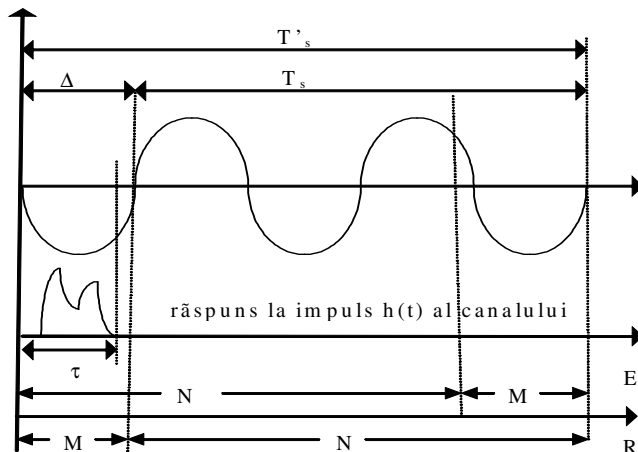


Figura 9 Semnal OFDM cu interval de gardă

trebuie să fie (este mai) mare decât durata τ a răspunsului la impuls a canalului. În acest fel porțiunea de durată Δ a simbolului OFDM poate fi distorsionată fără ca acest lucru să afecteze demodularea.

- Uzul duratei intervalului de gardă se poate extinde pînă la $T_s/4$.
- deci, perioada cu care se schimbă setul de nivele modulatorie c_k , $k = 0, \dots, N-1$, este:

$$T_s' = T_s(1+u) \quad (.21.a)$$
- Frecvența de simbol utilă va fi însă micșrată având valoarea, **desen pe tablă:**

$$f_s' = f_s/(1+u); \quad (.21.b)$$
- La extinderea perioadei de simbol modulatorul cu IFFT va genera pe durata T_s cele N eșantioane corespunzătoare simbolurilor modulatorie introduse în respectiva perioadă de simbol OFDM, iar apoi va genera din nou, în intervalul Δ , primele $M = uN$ eșantioane, (partea superioară a ultimei axe din fig.9)
- La recepție, primele M eșantioane, potențial distorsionate de ISI vor fi șterse, iar receptorul va folosi ultimele N eșantioane. Acest grup conține toate eșantioanele unei perioade de simbol T_s' necesare demodulării datelor, dar ele sunt dispuse în următoarea ordine: $M+1, \dots, N-1, 0, \dots, M$. Această situație impune introducerea unei operații de reordonare a eșantioanelor sosite la recepție.
- Inserarea unei porțiuni din semnalul modulat, cu păstrarea continuității semnalului modulat pe durata T_s' , se numește *prefix ciclic (CP)*.
- Introducerea intervalului de gardă și a prefixului ciclic pe durata acestuia va afecta modul în care canalul influențează semnalul transmis, distribuția spectrală și eficiența spectrală a semnalului OFDM.
- Datorită periodicității semnalului transmis (cauzată de introducerea celor M eșantioane pe durata intervalului de gardă în maniera descrisă anterior) va apărea o convoluție ciclică între răspunsul la impuls al canalului și semnalul transmis.
- Prin utilizarea prefixului ciclic de M eșantioane pe durata intervalului de gardă, semnalul OFDM va fi:

$$s(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j \frac{2\pi kn}{N}} ; \quad n = -M, \dots, N-1 \quad (.22)$$

- Dacă $h(nT_e)$ reprezintă răspunsul (complex) la impuls al canalului, atunci semnalul aplicat la intrarea blocului FFT, $r'(nT_e)$ va fi exprimat de (.22), unde L este lungimea (durata $\tau_M = LT_e$, în perioade de eșantionare a) răspunsului la impuls al canalului, iar $s(nT_e)$ este semnalul OFDM BB; M trebuie ales astfel încât $M \geq L \leftrightarrow \Delta \geq \tau_M$

$$r'(nT_e) = h(nT_e) \otimes s(nT_e) = \sum_{q=0}^{L-1} h(qT_e) \cdot s((n-q)T_e) \quad (.22)$$

- În cazul utilizării prefixului ciclic pe durata intervalului de gardă, după FFT semnalul va fi:

$$\text{FFT}(r'(nT_e)) = \text{FFT}(h(nT_e) \otimes s(nT_e)) = H(k)S(k) \quad (.23)$$

adică simbolul modulator demodulat pe subpurtătorul k va fi:

$$c_k' = h_k \cdot c_k \quad (.24)$$

h_k fiind coeficienții caracteristicii de frecvență a canalului la frecvența $f_c + f_k$, $k = -N/2, \dots, 0, \dots, N/2$

- Considerentele de mai sus sunt valabile pentru un canal *invariant în timp*, adică având caracteristici constante pe durata unei perioade de simbol OFDM.

- Această condiție poate fi asigurată dacă se consideră un canal lent variabil în timp, ce are timpul de coerență T_c mult mai mare decât T_s (sau decât T_s').

- Aceasta va face ca efectul canalului să fie redus la o multiplicare element cu element între transformata Fourier a răspunsului la impuls a canalului, caracteristica în frecvență a canalului, și transformata Fourier a semnalului transmis, ceea ce va introduce câștiguri (sau atenuări) și întâzieri constante pe fiecare canal, pe durata acelei perioade de simbol OFDM.

- Câștigurile (atenuările) sunt exprimate de modulul coeficientului h_k al caracteristicii canalului, iar defazajele introduse, sunt exprimate de exponentul acestui coeficient complex. $h_k = |h_k| e^{j\phi}$

- Aceste câștiguri și defazaje vor putea fi apoi eliminate la recepție cu un egalizor în domeniul frecvență în banda de bază, plasat după FFT.

- Similar se poate arăta că, dacă pe durata intervalului de gardă nu se transmite nimic, atunci va apărea o convoluție liniară între răspunsul la impuls al canalului și semnalul transmis.

- Din punct de vedere spectral, introducerea prefixului ciclic pe durata intervalului de gardă conduce la reducerea gradului de suprapunere spectrală între semnalele de pe subpurtătoarele kf_s , iar neutilizarea prefixului ciclic (CP) pe durata Δ face ca suprapunerea spectrală dintre subpurtătoare va fi mai accentuată, vezi figura 10

- Introducerea intervalului de gardă va afecta și eficiența spectrală a transmisiei OFDM în sensul că frecvența efectivă (utilă) de simbol OFDM va fi $f_s' < f_s$, vezi relația (.21)

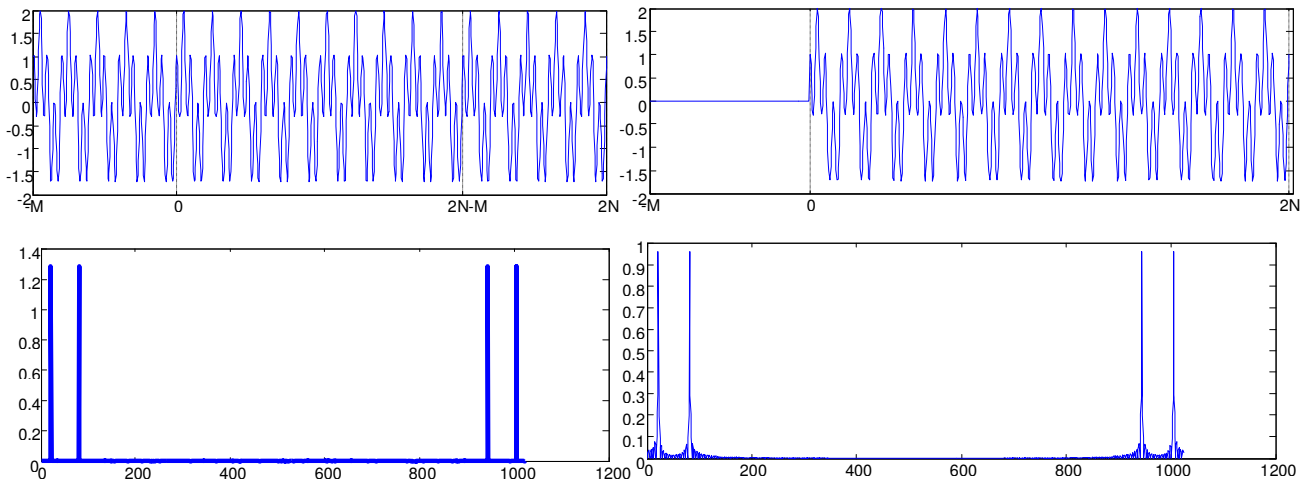


Figura 10. Semnalul OFDM în timp (sus) și în frecvență (jos), cu CP (stânga) și fără CP (dreapta)

- Schema bloc a unui sistem OFDM care realizează operațiile descrise mai sus este dată în fig.11; nu sunt figurate blocurile de sincronizare, sondare, decizie și egalizare din receptor.

5. Eficiența spectrală a transmisiilor OFDM

- Pentru varianta care nu utilizează intervalul de gardă, debitul binar al transmisiei se calculează considerând că transmisia are frecvența de simbol f_s , un număr de b biți/simbol-QAM și N_u subpurtătoare modulate cu date utile, și are valoarea:

$$D = b \cdot f_s \cdot N_u \text{ [bps]} \quad (.25)$$

- Banda de frecvență ocupată de semnalul OFDM după filtrare poate fi aproximată prin $N_m \cdot f_s + BT_z$, în cazul considerării unor filtre de ieșire (TB) cu o pantă finită a caracteristicii (care au banda de tranziție egală cu BT_z), sau prin $N_m f_s$, în cazul considerării unor filtre TB de ieșire ideale (cu caracteristică dreptunghiulară). Prin N_m s-a notat numărul subpurtătoarelor modulate (nu neapărat cu date utile), iar cu N_u numărul de subpurtătoare utile. În general $N_u < N_m < N$

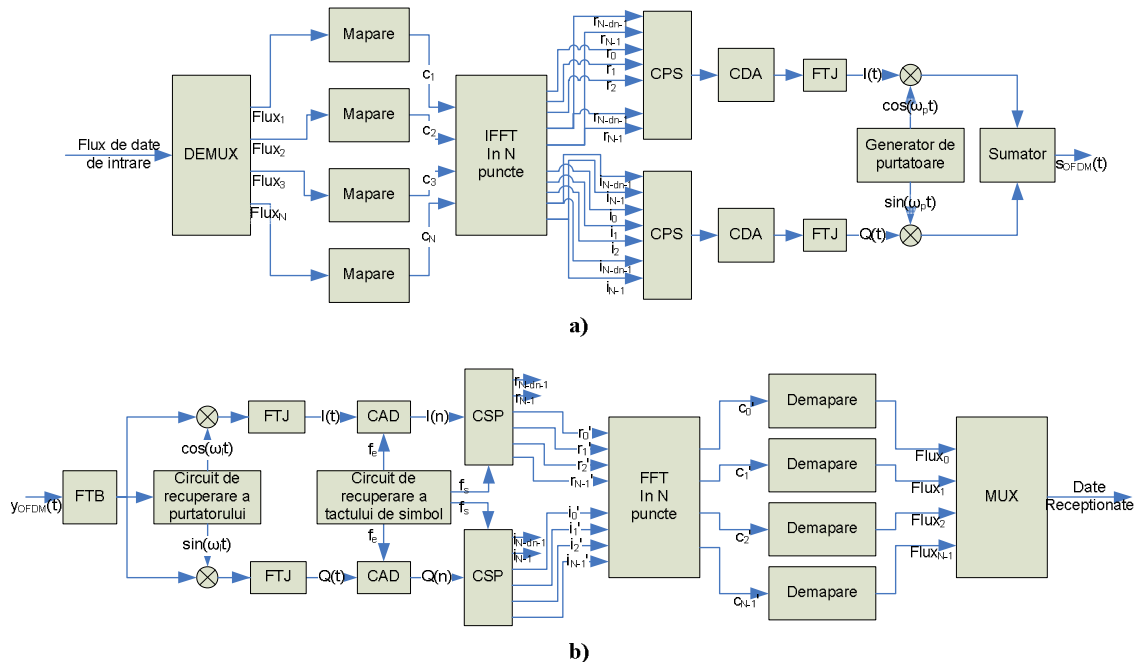


Fig. 11. Schema bloc a emițătorului (a.) și receptorului (b.) OFDM cu inserarea/eliminarea prefixului ciclic

- eficiența spectrală va avea în cele două cazuri expresiile:

$$\beta[\text{bps/Hz}] = b \cdot N_u \cdot f_s / (N_m \cdot f_s + BT_z) ; \text{ sau } \beta[\text{bps/Hz}] = b \cdot N_u / N_m ; \quad (.26)$$

- În cazul transmisiei ce folosește intervalul de gardă, debitul util este:

$$D' = b \cdot N_u \cdot f_s' = b \cdot N_u \cdot f_s / (1+u) \quad \Delta = u T_s ; \quad (.27)$$

iar banda de frecvență ocupată rămâne aceeași, deci eficiența spectrală pentru cele două cazuri devine:

$$\beta'[\text{bps/Hz}] = b \cdot N_u \cdot f_s / [(N_m \cdot f_s + BT_z)(1+u)] ; \quad \beta'[\text{bps/Hz}] = b \cdot N_u / [N_m(1+u)] ; \quad (.28)$$

- Deci debitul binar nominal și eficiența spectrală scad de $1+u$ ori. Acesta este prețul plătit pentru eliminarea ISI între simbolurile OFDM, generată de propagarea multicale, prin introducerea intervalului de gardă.

- expresia (28) a eficienței spectrale nominale nu include „calitatea” biților demodulați, măsurată prin BER.

- dacă se consideră doar biții corect recepționați, atunci transmisia este caracterizată de debitul binar efectiv (throughput) care are expresia (29); eficiența spectrală efectivă se obține împărțind throughputul la banda de frecvență ocupată BW_{OFDM} .

$$\Theta(\text{SNR}) = D_n \cdot (1 - \text{BER}(\text{SNR})); \quad (.29)$$

- în ipoteza recuperării și sincronizării perfecte a purtătorului local, a tactului de simbol și a celui de eşantionare în receptor, transmisia OFDM poate fi privită ca o suprapunere de semnale modulate QAM (cu constelații DPSK sau A+PSK) nefiltrate.

- probabilitatea de eroare asigurată de transmisia OFDM în prezența zgomotului gaussian depinde de probabilitatea de eroare de bit BER_i asigurată de constelația utilizată (n_i biți/simbol) pe fiecare grup de g_i subpurtătoare, care la rândul ei depinde de valoarea SNR_i a raportului semnal/zgomot de pe acel grup de subpurtătoare. Ea se calculează folosind relațiile definite pentru constelațiile utilizate în cazul transmisiei pe o singură purtătoare pe canal AWGN, vezi cursul TM.

- pentru calculul SNR, puterea semnalului va fi egală cu puterea medie a constelației utilizate pe subpurtătoarea respectivă, iar banda de frecvență utilă a semnalului modulat (necesară pentru calculul puterii zgomotului) se va considera egală cu f_s .
- presupunând o mapare multibit fazor de tip Gray (care presupune că la eronarea unui fazor se eronează 1 bit dintre cei mapați pe acel fazor), BER a OFDM ar avea expresia:

$$BER = \frac{\sum_{i=1}^G p_{ei}(\text{SNR}_i) \cdot g_i}{\sum_{i=1}^G n_i \cdot g_i}; \quad (30)$$

- dacă toate subpurtătoarele folosesc aceeași constelație, probabilitatea de eroare este exprimată de (31);

$$\text{pt. } n_i = n \Rightarrow BER = \frac{\sum_{i=1}^{N_u} p_{ei}(\text{SNR}_i)}{N_u n}; \quad \text{pt. } G = 1, g_1 = N_u \text{ si } \text{SNR}_1 = \text{SNR} \Rightarrow BER = \frac{p_e}{n} \quad (31)$$

- rețineți că în general nu se poate presupune că toate grupurile de subpurtătoare au același SNR. În acest ultim caz, probabilitatea de eroare a OFDM e media aritmetică a probabilităților de eroare asigurate de constelația utilizată pentru valorile SNR de pe fiecare subpurtătoare.
- calculul probabilității de eroare de bit asigurată de transmisia OFDM ce utilizează constelații QAM sau DPSK pe canale cu fading Rayleigh sau Rice și selective sau neselective în frecvență este complex și nu este tratat în cursul de față. Trebuie însă menționat că valorile uzuale ale BER pe aceste canale sunt de ordinul 10^{-2} - 10^{-4} , ceea ce face ca OFDM să fie utilizată numai în combinație cu coduri corectoare de erori, generând transmisii COFDM.