

2. Coduri TURBO

- schemele de codare concatenate au fost propuse pentru a obține un câștig mai mare al codării combinând două sau mai multe coduri mai simple.
- există două tipuri principale de concatenare: concatenarea paralelă, figura 4.a și concatenarea serială, figura 4.b.

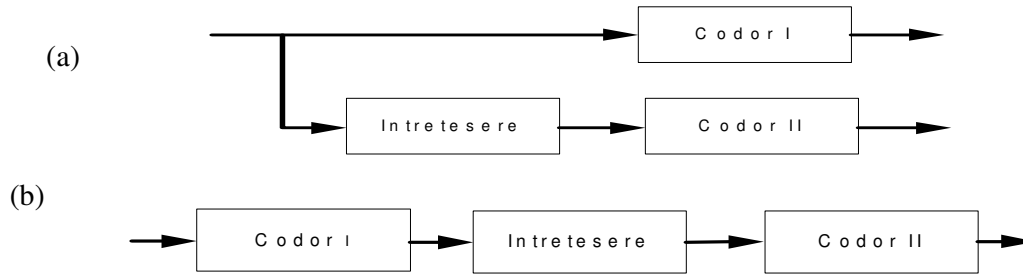


Figura 4 Concatenare paralelă și serială

- majoritatea codurilor corectoare de erori presupun canalul ca fiind fără memorie, ceea ce face ca erorile de bit introduse să poată fi considerate independente.
- în cazul comunicațiilor mobile unde semnalele transmise sunt afectate de propagarea multicale, canalul nu mai poate fi considerat fără memorie.
- pentru a atenua efectele memoriei canalului și a decodurului, se utilizează întrețeserea (interleaving), care realizează împrăștierea pachetelor de erori generate, prin asigurarea diversității în timp. Întrețeserea mesajului codat înainte de transmisie și deîntrețeserea acestuia la recepție împrăștie erorile apărute în pachete, acestea putând fi tratate de decodor ca erori singulare.

Principalele tipuri de întrețesere sunt:

- o întrețesere bloc: datele sunt scrise într-o structură bidimensională pe linii și sunt citite pe coloane.
- o întrețesere pseudoaleatoare: datele sunt întrețesute pe baza unei permutări pseudoaleatoare fixe
- o întrețesere cu deplasare circulară: datele sunt întrețesute pe baza următoarei permutări:

$$p(i) = (a \cdot i + s) \bmod L \quad (39)$$

- unde L reprezintă lungimea blocului de date, a se alege astfel încât a și L să fie prime între ele și $a < L$, iar $p(i)$ reprezintă noua poziție (index) a bitului cu index i la intrare;
- s se alege să fie mai mic decât L ,

- codurile turbo propuse de Berrou sunt coduri convoluționale recursive sistematice concatenate paralel.
- schema bloc generală a unui astfel de codor turbo respectă structura codurilor concatenate paralel din figura 4.a și este dată în figura 5.

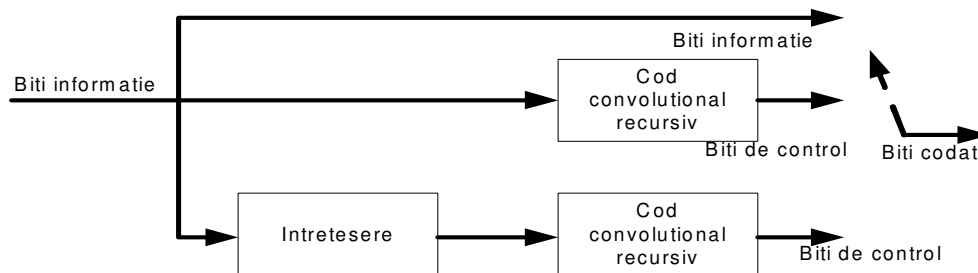


Figura 5. Schema bloc generală codor turbo sistematic de rată 1/3

- modificarea ratei turbocodurilor se poate realiza destul de simplu și într-o gamă largă utilizând procedura de puncturare a codurilor convoluționale, folosind măști de puncturare; acesta este un mare avantaj al turbocodurilor
- în sistemele moderne de transmisiuni, se folosesc algoritmi de adaptare de rată („rate matching algorithms”), care calculează rata necesară pentru ca întreg blocul codat să poată fi transmis într-un număr impus de blocuri de transport și apoi aplică măștile de puncturare necesare.

2.1 Decodarea codurilor TURBO

- decodarea codurilor concatenate paralel se poate face atât paralel cât și serial.
- decodarea codurilor turbo propusă de Berou și utilizată în multe aplicații se face serial, folosind două decodare cascade.
- principiul turbo se regăsește în faptul că cele două decodare schimbă informații „soft” între ele pe parcursul unui număr finit de iterații.
- pentru a putea schimba informație între ele, decodările utilizate trebuie să furnizeze la ieșire informație *soft* pentru fiecare bit, ceea ce decodările Viterbi, în varianta lor originală nu erau capabile. Din această cauză algoritmul Viterbi a fost modificat, obținându-se varianta Soft Output Viterbi Algorithm (SOVA), pentru a fi capabil să furnizeze informație soft pentru fiecare bit, adică probabilitățile *aposteriori* (sau o formă a raportului de plauzibilitate), **vezi laboratorul TCM - TD**.
- tipurile de decodare care pot fi folosite pentru decodarea codurilor convoluționale care compun codul turbo sunt:
 - Bazate pe algoritmul MAP, descris mai jos
 - Bazate pe algoritmul Viterbi modificat (SOVA)

Exprimarea raportului de plauzibilitate în urma prelucrării în decodorul MAP

- metrica folosită de algoritm este logaritmul raportului de plauzibilitate (LLR – Log Likelihood Ratio), care este dat de relația :

$$\text{LLR}'(x | \text{observatie}) = \ln \left(\frac{p(x = 1 | \text{observatie}(\text{fazor}))}{p(x = -1 | \text{observatie}(\text{fazor}))} \right) \quad (40)$$

- aplicând teorema lui Bayes privitoare la probabilitățile condiționate, relația (30), raportul de plauzibilitate la intrarea demodulatorului, la începutul decodării, se poate scrie :

$$p(A / B) = p(B / A) \cdot p(A) / p(B) \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \text{LLR}'(x | r) &= \ln \left(\frac{p(x = 1 | r)}{p(x = 0 | r)} \right) = \ln \left(\frac{p(r | x = 1) \cdot p(x = 1)}{p(r | x = 0) \cdot p(x = 0)} \right) = \\ &= \ln \left(\frac{p(r | x = 1)}{p(r | x = 0)} \right) + \ln \left(\frac{p(x = 1)}{p(x = 0)} \right) = \text{LLR}_c(r) + \text{LLR}_s(x); \text{ p(r) se simplifica} \end{aligned} \quad (41)$$

unde $p(x = 1 | r)$ este probabilitatea ca bitul transmis, x , să aibă valoarea 1 dacă s-a recepționat fazorul r ; $p(r | x = 1)$ este probabilitatea ca dacă bitul transmis are valoarea 1, atunci nivelul recepționat are valoarea r , iar $p(x = 1)$ - probabilitatea ca bitul transmis să aibă valoarea 1

- $\text{LLR}_c(r)$ (42) reprezintă informația obținută din canalul de transmisie
- $\text{LLR}_s(x)$ (43) reprezintă informația privitoare la sursa de date

$$\text{LLR}_c(r) = \ln \left(\frac{p(r | x = 1)}{p(r | x = 0)} \right) \quad (42)$$

$$\text{LLR}_s(x) = \ln \left(\frac{p(x = 1)}{p(x = 0)} \right) \quad (43)$$

- folosind (42) și (43), relația (41) poate fi rescrisă sub forma:

$$\text{LLR}'(r | x) = \text{LLR}_c(r) + \text{LLR}_s(x) \quad (44)$$

- raportul de plauzibilitate al bitului x la ieșirea decodului poate fi exprimat principial sub forma:

$$\text{LLR}(x) = \text{LLR}'(r | x) + \text{LLR}_e(x) = \text{LLR}_c(r) + \text{LLR}_s(x) + \text{LLR}_e(x) \quad (45)$$

- raportul de plauzibilitate la ieșirea demodulatorului este compus din trei termeni care arată factorii care contribuie la valoarea lui:

- informația din canal - LLR_c
- informația sursei - LLR_s
- informația extrinsecă care este informația suplimentară adusă de procesul de decodare prin utilizarea constrângerilor codului - LLR_e
- această informație extrinsecă reprezintă contribuția decodului la fiecare iterație
- pe baza raportului de plauzibilitate de la ieșire decodului se ia decizia asupra valorii bitului:

$$\hat{x} = \begin{cases} 1 & \text{LLR}(x) > 0 \\ 0 & \text{LLR}(x) < 0 \end{cases} \quad (46)$$

Pașii algoritmului BCJR

- algoritmul BCJR de tip MAP furnizează rapoartele de plauzibilitate (sau forma lor logaritmată) pentru fiecare bit al blocului codat recepționat
- pașii algoritmului sunt prezentați schematic mai jos, folosind descrierea făcută în secțiunea 1.3.1
- algoritmul calculează următoarele metrici, acestea fiind calculate succesiv de fiecare dintre cele două decodare

- metrica de stare înainte: $\alpha_k(m) = p(S_k = m | R_1^k)$, vezi (18), probabilitatea ca la tactul (bitul) k , starea S_k a codorului să fie m , dacă până atunci s-a recepționat secvența R_1^k . Această probabilitate se calculează la fiecare iterație a algoritmului.
- metrica de stare înapoi $\beta_k(m) = p(R_{k+1}^N | S_k = m)$, vezi (19), se calculează după ce s-a recepționat întreaga secvență de lungime N .
- metrica de tranziție: $\gamma_k(i, m) = p(S_k = m, d_k = i, R_k)$, vezi relația (21);

- pașii algoritmului sunt:

Pas 1: Se inițializează valorile, vezi relația (20) reluată aici :

$$\alpha_0^i(0) = 1; \alpha_0^i(m) = 0 \quad \forall m \neq 0, i = 0, 1; \quad \beta_N^i(0) = 1; \beta_N^i(m) = 0 \quad \forall m \neq 0, i = 0, 1 \quad (20)$$

Pas 2: La fiecare observație (fazor) R_k recepționată se calculează metrica de stare înainte și metrica de tranziție.

Pas 3: Când întreaga secvență de lungime N a fost recepționată se calculează valorile metricilor de stare înapoi pentru toți biții blocului codat.

Pas 4: Se determină raportul de plauzibilitate pentru fiecare bit folosind relația (17) sau (23). De asemenea, în acest pas se calculează și informația extrinsecă, ca fiind diferența dintre valoarea LLR-ului bitului x_k după respectiva iterație și valoarea LLR-ului obținută la intrarea decodorului (canal + sursă), cu relația:

$$LLR_e(x_k) = LLR(x_k) - LLR'(x_k); \quad (47)$$

- informația extrinsecă se calculează atât pentru biții informaționali, cât și pentru biții de control ai codului respectiv; rețineți că fiecare decodor are propriul său set de biți de control, iar biții info apar în ordine diferită.

2.1.1 Decodorul turbo

- figura 6 prezintă structura unui decodor turbo corespunzător unui cod turbo de rată 1/3 construit prin concatenarea paralelă a două coduri convoluționale recursive de rată 1/2
- este compus din două decodare MAP de tipul BCJR (Bahl – Cocke – Jelinek – Raviv) și adaptate de Berrou pentru decodarea codurilor convoluționale recursive sistematice concatenate paralel.

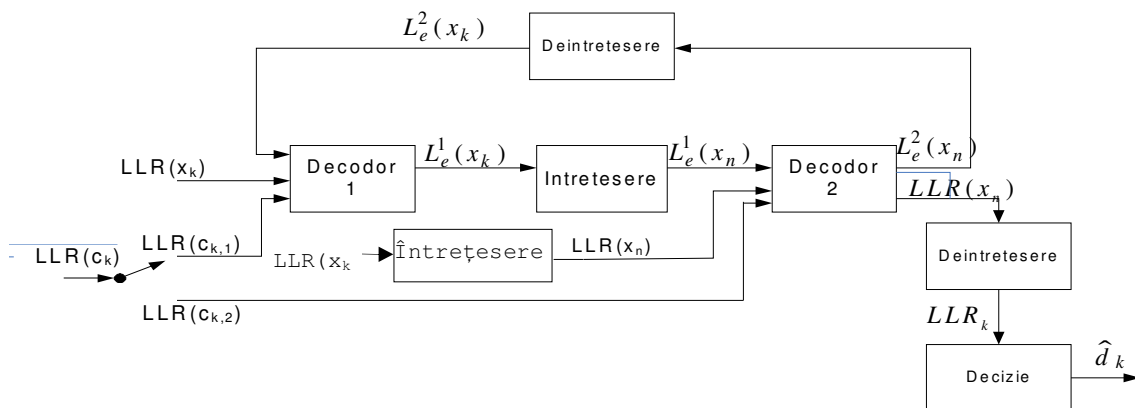


Figura 6. Decodor turbo pentru un turbocod de R=1/3 obținut prin concatenarea a 2 coduri convoluționale de R= 1/2

- înaintea primei iterații a decodorului, rapoartele logaritmice de plauzibilitate ale tuturor biților recepționați se obțin din demaparea soft (relația (26) din cursul dedicat codurilor LDPC) și constituie observațiile din canal.
- pentru secvențe aleatoare de date, informația sursei $LLR_s(x_k)$ poate fi considerată nulă, pentru că valorile „0” și „1” sunt echiprobabile, dacă biții informaționali sunt scramblați
- LLR-urile biților informaționali sunt livrate ambelor decodare în ordine diferită, biții x_k fiind în ordinea dată de sursă, iar biții x_n fiind în ordinea dată de interleaver, pentru a fi introduși în aceeași

ordine în care au fost codați, vezi fig. 5.

- LLR-urile biților de control, $c_{k,1}$ sau $c_{k,2}$, sunt livrate prin demultiplexare decodorului, 1 sau 2, ce corespunde codului care le-a generat
- primul decodor procesează biții generați de primul codor (cei informaționali sunt neîntrețesuți x_k), iar cel de al doilea decodor procesează biții proveniți de la al doilea codor (cu secvența informațională întrețesută x_n)
- blocul de întrețesere dintre cele două decodare este identic cu cel de la emisie, iar blocurile de deîntrețesere sunt identice și realizează operația inversă întrețeserii de la emisie
- la fiecare iterație sunt efectuate următoarele operații:
 - decodorul 1, corespunzător primului codor convoluțional, va calcula informația extrinsecă pentru bitul informațional x_k , $L_e^1(x_k)$ pe baza raportului de plauzibilitate al bitului respectiv, ale celor de control generați de primul codor convoluțional și a informației extrinseci furnizate de cel de-al doilea decodor, $L_e^2(x_k)$. La prima iterație informația extrinsecă furnizată de cel de-al doilea decodor este nulă. Blocul ce conține informație extrinsecă calculată pentru fiecare bit, este întrețesut, conform regulii de întrețesere de la codare, și apoi pasat celui de-al doilea decodor. Decodorul 1 mai stochează LLR-urile actualizate ale biților de control proprii, care vor fi folosite în decodarea ce se va efectua în următoarea iterație.
 - decodorul 2 va calcula informația extrinsecă, $L_e^2(x_n)$ pe baza rapoartelor de plauzibilitate ale bitului informațional și ale celor de control generați de al doilea codor convoluțional și a informației extrinseci furnizate de primul decodor. Informația extrinsecă determinată astfel este furnizată primului decodor prin intermediul unui bloc de deîntrețesere (*deinterleaver*) care realizează operația inversă întrețeserii de la codor și va genera $LLR(x_k)$. Decodorul 2 mai stochează LLR-urile actualizate ale biților de control proprii, care vor fi folosite în decodarea ce se va efectua în următoarea iterație.
- după un număr dat de iterații procesul se oprește iar decodorul turbo va furniza la ieșire rapoartele de plauzibilitate logaritmice pentru biții informaționali, vezi figura 6:

$$LLR_k = LLR(x_k) + L_e^1(x_k) + L_e^2(x_k) \quad (48)$$

- pe baza rapoartelor de plauzibilitate furnizate de către acest decodor se va lua decizia asupra biților transmiși, folosind criteriul lui Bayes, vezi relația (46).
- corectitudinea biților informaționali decodați din blocul codat respectiv este indicată de CRC-ul aplicat biților informaționali, deoarece pentru turbocoduri, care sunt obținute prin concatenarea unor coduri convoluționale, corectitudinea blocului codat nu poate fi verificată prin valoarea sindromului ca și la codurile LDPC; aceasta face ca blocul de date care se codează să conțină, alături de biții informaționali ai sursei, și biții necesari CRC-ului
- blocul de verificare al CRC nu este inclus în fig. 6
- dacă CRC = „0” blocul se livrează stratului superior; dacă CRC \neq „0”, blocul poate fi șters și se cere retransmisia lui, sau blocul poate fi livrat ca atare cu semnalizarea erorii.
- nu există formulă analitică pentru calculul BER după decodare
- convergența algoritmului de decodare iterativă se poate evalua urmărind conținutul informațional al informației extrinseci transferate între decodare.
- conținutul informațional este exprimat de informația mutuală medie dintre datele originale și informația extrinsecă, $I(D, L_e)$, unde D reprezintă blocul de date, iar L_e secvența de informație extrinsecă corespunzătoare fiecărui bit din blocul D .
- informația mutuală medie I este o măsură a gradului de interdependență dintre variabile; dacă variabilele sunt independente $I=0$.
- expresia generală a lui I este:

$$I(X;Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p(x,y) \cdot \log \frac{p(x,y)}{p(x) \cdot p(y)} \quad (49)$$

- aplicând relația (49) pentru datele setul $d_i \in D$ și setul de informații extrinseci $L_{ej} \in L_e$ obținem:

$$I(D;L_e) = \sum_{d_i \in D} \sum_{L_{ej} \in L_e} p(d_i;L_{ej}) \cdot \log \frac{p(d_i;L_{ej})}{p(d_i) \cdot p(L_{ej})}; p(d_i;L_{ej}) = \frac{p(d_i | L_{ej}) \cdot p(L_{ej})}{p(L_{ej}) \cdot p(d_i)} \quad (50)$$

- tinând cont de modul de transfer al informației extrinseci între cele două decodare MAP care compun decodorul turbo putem scrie:

$$\begin{aligned} IN(DEC_1) &= I(D, L_e^2) = OUT(DEC_2) \\ IN(DEC_2) &= I(D, L_e^1) = OUT(DEC_1) \end{aligned} \quad (51)$$

- aceasta se poate realiza prin afișarea pe același grafic a caracteristicilor de transfer, din punct de vedere al conținutului informațional, ale decodarelor MAP care compun decodorul turbo.

- caracteristica de transfer, din punct de vedere al conținutului informațional, a unui decodor SISO (Soft Input – Soft Output) se scrie:

$$OUT(DEC) = f\left(IN(DEC), \frac{E_b}{N_0}, R_c\right) \quad (52)$$

unde $IN(DEC)$ și $OUT(DEC)$ reprezintă conținutul informațional la intrarea și respectiv la ieșirea decodurului, R_c rata codului, iar raportul E_b/N_0 este măsura calității canalului AWGN.

- pe diagrama obținută, numită diagramă EXIT (Exit Chart), se poate urmări variația informației extrinseci transferată între decodare la fiecare pas.

- figura 7 prezintă diagramele EXIT pentru un cod turbo de rată 1/2 (stânga) și pentru unul de rată 2/5 (dreapta) pe un canal afectat de zgomot aditiv gaussian având un raport E_b/N_0 de 1 dB. Cele două turbocoduri sunt obținute prin puncturarea codului părinte cu rata 1/3.

- cu linie punctată sunt reprezentate caracteristicile de transfer ale celor două decodare.

- pentru caracteristica decodurului 1, pe axa Y este reprezentată informația extinsecă la intrarea decodurului 1 (provenită de la decodorul 2), iar pe axa X informația extrinsecă a secvenței de la ieșirea decodurului 1, care se introduce în decodorul 2.

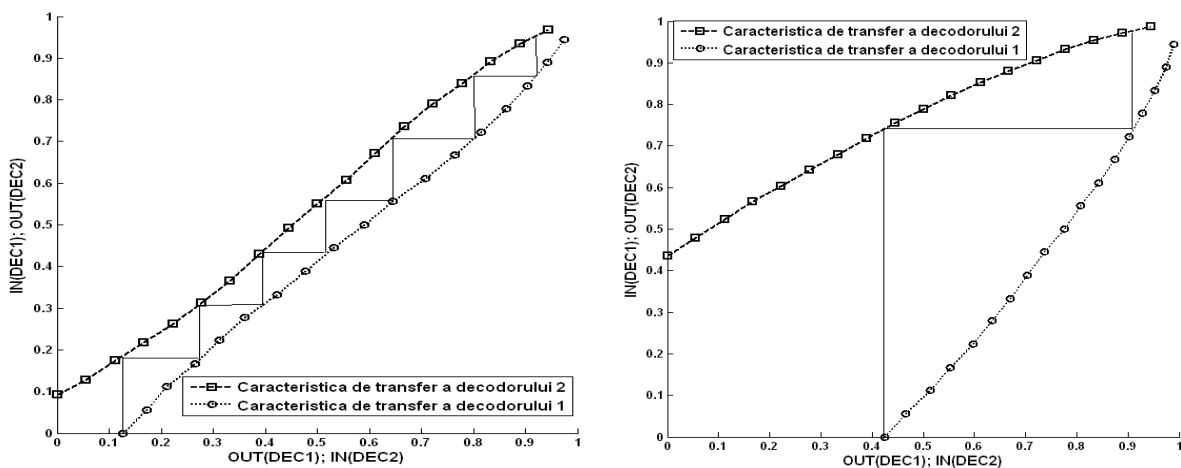


Figura 7. Diagrame EXIT pentru un cod turbo de rata 1/2 (stânga) și unul de rată 2/5 (dreapta) pe un canal de tip AWGN având raportul E_b/N_0 de 1dB

- pentru caracteristica de transfer a decodurului 2, pe axa X este reprezentată informația extinsecă la intrarea decodurului (provenită de la decodorul 1), iar pe axa Y la ieșirea acestuia.

- cu linie continuă este reprezentată traiectoria de decodare a decodurului turbo, adică conținutul informațional pe care îl generează fiecare decodor în fiecare pas.

- traiectoria de decodare indică numărul de iterații necesar decodurului să convergă spre blocul de date corect.

- la o valoare dată a E_b/N_0 , odată cu scăderea ratei de codare, decodorul are nevoie de mai puțini pași (iterații) ca să convergă spre blocul de date original, deoarece informația extrinsecă la fiecare iterație e mai mare;

- în fig. 7 se observă că informația mutuală pe iterație crește mai puțin pentru codul cu $R = 1/2$ (stânga) și mai mult pentru codul cu $R = 2/5$ (dreapta)

- cât timp cele două caracteristici nu se intersectează decodorul va converge după un număr finit de iterații.

- în momentul în care cele două caracteristici se intersectează decodorul nu va mai converge, ceea ce face ca aceste diagrame să poată fi folosite la estimarea condițiilor pentru care un anumit cod va converge, adică va putea decoda corect blocul codat respectiv.

- valoarea SNR (sau a E_b/N_0) din canal, care afectează informația inițială obținută din canal, modifică substanțial viteza de convergență a decodurii, și chiar convergența acestuia.
- creșterea SNR duce la creșterea variației informației extrinseci adusă de cele două decodări într-o iterație, precum și la o valoare mai mare a informației inițiale obținute din canal.
- figura 8 prezintă diagramele EXIT ale unui turbocod cu rata $1/2$ obținut prin puncturarea unui cod părinte cu rata $1/3$ pentru câteva valori la E_b/N_0 din canal
- se observă creșterea semnificativă a variației informației mutuale cu creșterea, chiar mică, a E_b/N_0
- acest fapt arată că acest tip de coduri au o pantă foarte abruptă a curbei BER vs. E_b/N_0 (sau SNR), care este numită „waterfall” în literatură.

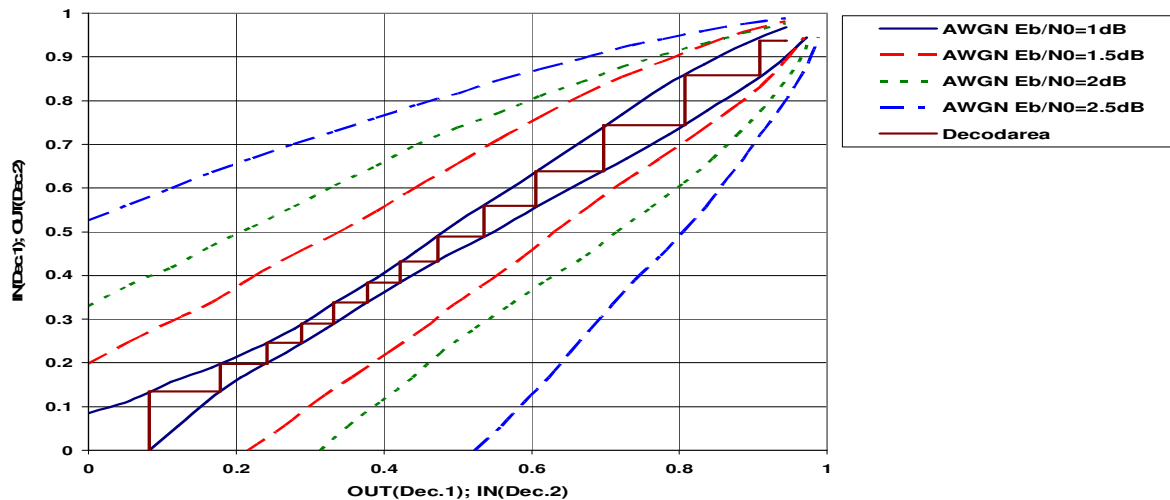


Figura 8. Diagrame EXIT pentru un cod turbo de rata $1/2$ pe un canal de tip AWGN cu diverse valori ale E_b/N_0

2.2 Performanțele turbocodurilor

- capacitatea de corecție a turbocodurilor se evaluează prin câștigul codării, față de transmisia necodată care utilizează aceeași modulație
- câștigul codării este influențat de următorii parametri ai codului:
 - o rata codării și masca de puncturare
 - o lungimea blocului codat
 - o polinoamele generatoare, aici fiind inclusă și constrângerea
 - o numărul de iterații
 - o tipul și lungimea interleaverului, care depinde de lungimea blocului codat
- de asemenea, câștigul codării este influențat și de algoritmul de decodare utilizat
- în general, câștigul codării scade odată cu creșterea ratei codului, la o lungime și constrângere date și în ipoteza aceluiași tip de interleaver
- câștigul codării scade odată cu scăderea lungimii blocului codat, similar cu codurile LDPC, pentru aceeași constrângere și rată; aceasta face ca, în cazul blocurilor scurte, atât turbocodurile cât și codurile LDPC să asigure câștiguri mai mici decât codurile convoluționale, cu aceeași constrângere.
- creșterea numărului de iterații, duce la creșterea câștigului codării, pentru un turbocod dat; și în cazul turbocodurilor, creșterea numărului de iterații peste o anumită valoare nu mai aduce o creștere suplimentară a C_G care să justifice procesarea efectuată.
- performanțele turbocodurilor sunt afectate semnificativ atât de tipul cât și de lungimea interleaverului folosit; în general creșterea lungimii acestuia conduce la creșterea câștigului codării. În ceea ce privește efectul tipului de interleaver, acesta este mai complex.
- evaluare prin simulări a performanțelor turbocodurilor va fi făcută la laborator.