

Introducere

Schema bloc de principiu a unui sistem de telecomunicații, care transportă informația cu ajutorul semnalelor electromagnetice, este prezentată în Fig. 1.

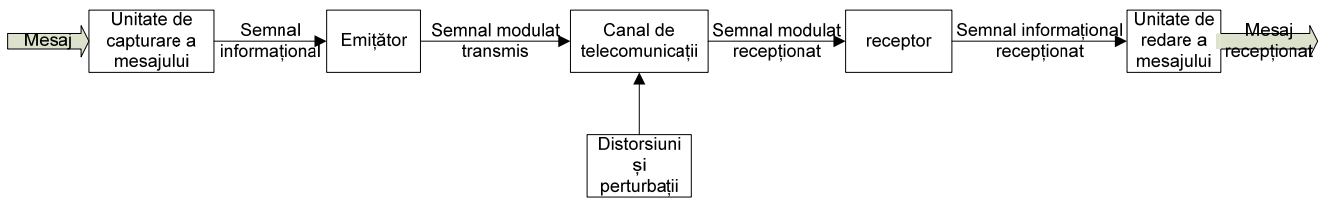


Fig. 1. Schema bloc de principiu a unui sistem de telecomunicații

Mesajul original (unde sonore, imagini,...) este captat și translatat în semnal electromagnetic de către **unitatea de capturare a mesajului**. Acest semnal electromagnetic generat de către unitatea de captură reprezintă semnalul informațional care trebuie ”transportat” la destinație.

Semnalul (de obicei o tensiune variabilă în timp) informațional poate fi descris ca:

$$g(t) = g_c + g_M \cdot f(t) \quad (1)$$

unde g_c este valoarea medie a semnalului (*componenta continuă*), constanta reală g_M reprezintă amplitudinea (**def.amplitudine** - *deviația maximă (a tensiunii) față de valoarea medie*) semnalului, iar $f(t)$ este o funcție reală cu următoarele proprietăți:

$$f(t) \in [-1; 1] \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0 \quad (3)$$

obs. Relațiile (2) și (3) arată că $f(t)$ este o funcție cu valoarea medie nulă, și amplitudine unitară.

Energia semnalului informațional este definită ca:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = g_M^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (4)$$

obs. definiția energiei dată de (4) este de fapt energia disipată pe o sarcină unitară, iar energia disipată pe o sarcină oarecare Z poate fi determinat ca $E = \frac{E_s}{Z}$

Puterea semnalului informațional este:

$$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |g(t)|^2 dt = g_M^2 \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = g_M^2 \cdot \overline{f^2(t)} \quad (5)$$

obs. (5) definește puterea disipată pe sarcina unitară, iar puterea disipată pe o sarcină Z este $P = \frac{P_s}{Z}$

Spectrul semnalului informațional este descrisă de funcția *complexă* $G(\omega)$ care se obține prin transformata Fourier a ecuației (1):

$$G(\omega) = \mathcal{F}(g(t)); \quad (6)$$

Dacă semnalul informațional este semnal analogic (ex. semnal vocal, semnal audio, semnal video...) de obicei spectrul semnalului are o lărgime finită, adică:

$$|G(\omega)| = \begin{cases} \neq 0; & \omega \in [\omega_m; \omega_M] \\ 0 & ; \omega \notin [\omega_m; \omega_M] \end{cases} \quad (7)$$

def. banda de frecvență (BF) a unui semnal este **intervalul** de frecvență care conține componentele spectrale cu amplitudine diferită de zero.

$$BF = \left[\frac{\omega_m}{2\pi}; \frac{\omega_M}{2\pi} \right] = [f_m; f_M] \quad (8)$$

def. lărgime de bandă (LB) – este lățimea benzii de frecvență (lățimea intervalului):

$$LB = f_M - f_m \quad (9)$$

în cazuri semnalelor informaționale digitale banda de frecvență este infinit de mare ($BF = (-\infty; +\infty)$), dar de obicei majoritatea energiei este concentrată într-o bandă cu lărgime finită. (mai pe larg în cursul 4).

Emițătorul pe baza semnalului informațional, generează *semnalul modulat*, care este un semnal adaptat la caracteristicile canalului utilizat. Semnalul modulat trebuie generat astfel încât, receptorul să fie capabil să extragă semnalul informațional din semnalul modulat recepționat, și procesul de transmisie să fie cât se poate de *eficient*.

Canalul de telecomunicații (ex: canalul radio, fire torsadate (cablu UTP), sistemul de telefonie (PSTN)...) poate fi considerat ca fiind un circuit care distorsionează semnalul transmis, și îl adună cu un semnal aleator numit *zgomot*.

Semnalul obținut la ieșirea canalului (semnalul modulat recepționat) $s_r(t)$ poate fi descris ca:

$$s_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t-\tau) \cdot h(\tau) d\tau + n(t) = s_i(t) \odot h(t) + n(t) \quad (10)$$

unde $s_i(t)$ este semnalul modulat transmis, $h(t)$ este răspunsul la impuls a canalului și $n(t)$ este semnalul de zgomot, iar cu \odot s-a notat produsul convoluțional.

Canalul de telecomunicații utilizat impune și anumite restricții semnalului transmis, cum ar fi puterea medie și maximă, lărgimea de bandă, distribuția spectrală, etc.

Receptorul are rolul de a recupera semnalul informațional din semnalul modulat recepționat afectat de perturbațiile și distorsiunile introduse de canal.

Unitate de redare a mesajului (ex: difuzor, sistem de afișare (display),...) este dispozitivul care transformă semnalul electromagnetic (semnalul informațional recepționat) în mesajul recepționat.

Cursul de **Tehnici de Modulații** parcurge principalele metode și tehnici de *generare* a semnalului transmis în funcție de diferite tipuri de semnale informaționale, respectiv trece în revistă tehnicile de bază de recuperare a semnalului informațional din semnalul recepționat.

def. Modulare – modificarea după o anumită regulă a unor mărimi caracteristice ale unui semnal purtător, pentru a facilita transmisia semnalelor informaționale

De obicei semnalul purtător este un semnal cosinusoidal, care are trei mărimi caracteristice: amplitudine, frecvență și fază. În funcție de parametrul modificat pe durata procesului de modulare, modulațiile pot fi clasificate în trei categorii de bază:

- **Modulație de Amplitudine** – informația este transmisă prin variația amplitudinii semnalului purtător
- **Modulație de frecvență** – informația se transmite prin variațiile frecvenței
- **Modulație de Fază** – informația se transmite prin variația fazei semnalului purtător.

În funcție de tipul procesărilor necesare obținerii semnalului modulat, modulațiile pot fi clasificate în două categorii:

- **Modulații Liniare** – în acest caz semnalul modulat poate fi generat prin utilizarea unor procese liniare (adunare, înmulțire) – În această categorie intră modulația de amplitudine.
- **Modulații Neliniare (sau Exponențiale)** – În acest caz semnalul modulat nu poate fi obținut prin procese liniare. Din această categorie fac parte modulațiile de frecvență și fază, respectiv toate modulațiile combinate (ex. amplitudine+fază).

În funcție de natura semnalului informațional, modulațiile pot fi clasificate ca:

- **Modulații Analogice** – semnalul informațional este un semnal continuu în timp, a cărui nivel de tensiune (sau curent) poate să ia o infinitate de valori (de exemplu semnalul de la ieșirea unui microfon)
- **Modulații Digitale** – semnalul informațional este un semnal digital (ex: o secvență de biți), nivelul (de tensiune) semnalului poate lua valori dintr-o mulțime cu număr finit de elemente (ex. 0V; 5V)

Tehnici de modulații digitale

În cazul transmisiilor digitale mesajul constă dintr-un număr finit de simboluri – mulțimea cu simbolurile posibile se numește *alfabetul sursei*

Ex. textul scris în limba română constă din aproximativ 80 de simboluri: 26 de caractere ale alfabetului latin la care se adaugă 5 caractere cu diacritice= 31 de caractere ori 2 (litere mici și mari)=62 caractere + 10 cifre și câteva semne de punctuație: „,?- etc).

- În tehnologia informației (IT) alfabetul sursei constă din elementele unui câmp Galois $GF(2^n)$ (adică mesajul este format din $M=2^n$ simboluri).

- Cel mai utilizat alfabet al sursei este alfabetul *binar* care conține două elemente ”0” și ”1”.

Def.: Frecvența de Simbol – în transmisiile numerice frecvența de simbol (sau frecvența de semnalizare) este dată de numărul de variații (datorită procesului de modulare) pe unitate de timp (secundă) a parametrului modulat.

- Un simbol poate să ”transporte” în general n biți; considerând că frecvența cu care sosesc biți la intrarea modulatorului este f_{bit} durata unui simbol (notat cu T_s) este dată de relația (1). Perioada de simbol mai poate fi definită și ca intervalul minim de timp pe durata căruia parametrul modulat rămâne nemodificat (parametrul modulat este constant pe durata T_s în cazul modulațiilor cu salt de amplitudine (ASK) și frecvență (FSK), și are o variație liniară în cazul modulației cu salt de fază (PSK)).

$$T_s = n \cdot T_{bit} = \frac{n}{f_{bit}} \quad (1)$$

Deci frecvența cu care trebuie modificat parametrul modulat (frecvența de simbol -notat cu f_s) va fi:

$$f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{f_{bit}}{n} \quad (2)$$

Dacă pe un simbol sunt *mapați* biți, parametrul modulat poate lua una dintre cele $M=2^n$ valori distincte. Rolul funcției (blocului) de mapare este să asocieze la fiecare combinație de n biți o anumită valoare a parametrului modulat. Regula de asociere ale valorilor parametrului modulat la cuvinte binare este cunoscută și de receptor, iar *funcția de demapare* realizează operațiunea inversă a funcției de mapare, adică pe baza parametrilor recepționați generează cuvintele binare (cu lungime n) recepționate.

Modulația numerică PAM (Pulse Amplitude Modulation)

În cazul modulației digitale PAM, pe durata celei de al k -lea perioadă de simbol (când se transmite al k -lea cuvânt binar format din n biți) în canal se transmite o tensiune constantă m_k . Nivelul tensiunii transmise în canal, m_k , poate lua una dintre cele $M=2^n$ valori permise. Valorile permise sunt elemente al mulțimii \mathcal{M} . Mulțimea \mathcal{M} se mai numește și *alfabetul de intrare a canalului*. Considerând că valoarea maximă transmisă este A_M și impunând ca diferența de tensiune dintre oricare două elemente învecinate trebuie să fie constantă, elementele m_i ale mulțimii \mathcal{M} sunt definite de relația:

$$m_i = 2 \cdot A_0 \cdot i - A_M; \quad i = 0, 1, \dots, 2^n - 1 \quad (3)$$

unde $2A_0$ este distanța minimă între oricare două elemente ale mulțimii \mathcal{M} și valoarea lui A_0 pentru condițiile de mai sus este:

$$A_0 = \frac{A_M}{M-1} = \frac{A_M}{2^n - 1} \quad (4)$$

În Figura 1. este prezentată un exemplu de semnal PAM, și funcția (tabelul) de mapare utilizată, pentru situația când $n=3$ și $A_0=1V$. Alocarea multibit-nivel (maparea) se face cf. unui cod binar de tip Gray, care face ca multibiții alocați unor nivele învecinate să difere printr-un singur bit. **- se va justifica ulterior**

Dacă considerăm că nivelele modulatorie date de relația (3) apar cu aceeași probabilitate, puterea medie a semnalelor PAM este dată de relația **Error! Reference source not found.** Relația se obține utilizând valorile sumelor primelor M numere naturale și ale pătratelor acestora.

$$P_{mPAM} = \frac{A_0^2 \cdot \sum_{i=0}^{M-1} (2i+1-M)^2}{M} = \frac{A_0^2 \cdot (M^2 - 1)}{6}; \quad (5)$$

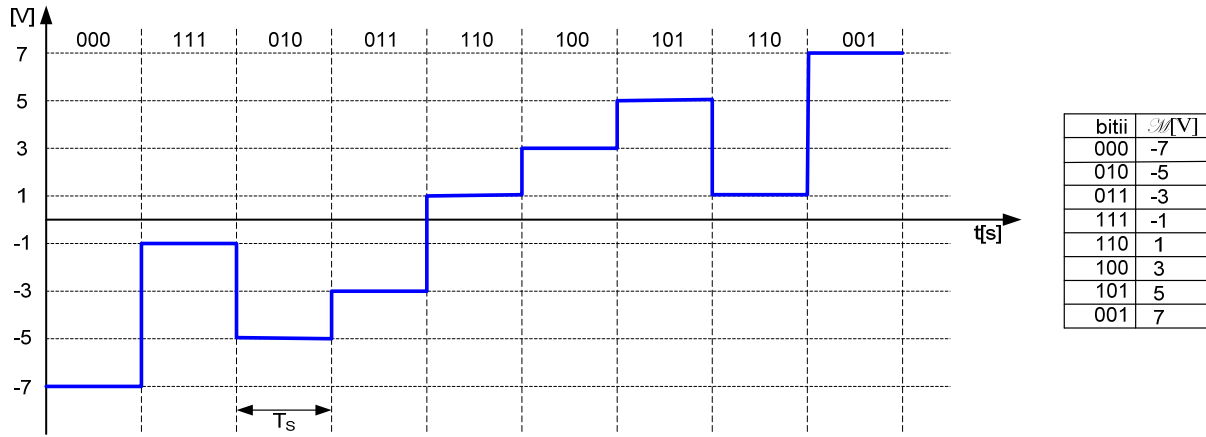


Figura 1. Exemplu de semnal PAM, și tabelul de mapare

Expresia matematică a semnalului modulat este:

$$s_{PAM}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \cdot u_T(t - kT_s) \quad (6)$$

unde $u_T(t)$ este un impuls treaptă-unitate cu durata de o perioadă de simbol, T_s , și este descrisă de (7).

$$u_T(t) = \begin{cases} 1; & t \in [0; T_s) \\ 0; & t \notin [0; T_s) \end{cases} \quad (7)$$

Dacă considerăm că semnalul modulat poate lua M nivele de tensiune, iar datele modulatorie sunt aleatoare, atunci nivelul semnalului modulat este o variabilă aleatoare de medie m_m și dispersie σ_m . În acest caz, densitatea spectrală de putere a semnalelor PAM este dată de relația, [proa], [fuqin]:

$$S_{PAM}(f) = \sigma_m^2 \cdot T \cdot \left(\frac{\sin \frac{\pi f}{f_s}}{\frac{\pi f}{f_s}} \right)^2 + m_m^2 \cdot T \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{\sin \frac{\pi(f - kf_s)}{f_s}}{\frac{\pi(f - kf_s)}{f_s}} \right)^2 \cdot \delta(f - kf_s) \right] \quad (8)$$

Dacă se impune condiția ca media nivelelor modulatorie să fie nulă, $m_m = 0$, adică nivelele modulatorie să aibă valori simetrice față de 0V, atunci densitatea spectrală de putere a semnalelor PAM este exprimată numai de primul termen al relației (8). În Figura 2 este reprezentată densitatea spectrală de putere a sumnal PAM unipolar, care are componentă medie nenulă.

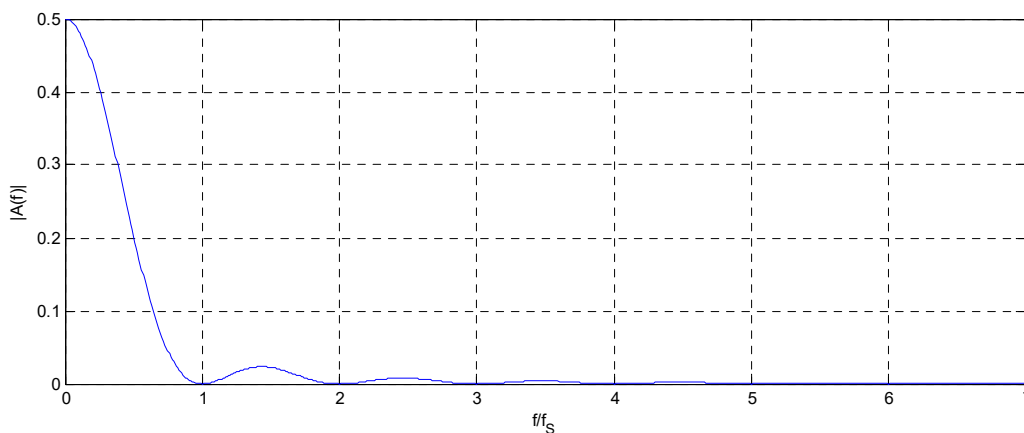


Figura 2 Densitatea spectrală a semnalului PAM

Demodularea optimă a semnalelor modulate PAM afectate de AWGN

Semnalul recepționat pe o perioadă de simbol, afectat de AWGN poate fi exprimat ca:

$$r_k(t) = m_k \cdot u_T(t - kT_s) + n(t); \quad m_k \in \mathcal{M} \quad (9)$$

Deoarece m_k este constant pe durata unei perioade de simbol și $n(t)$ este un semnal cu valoarea medie nulă, este preferabil medierea semnalului pe o perioadă de simbol așa cum este prezentat în Figura 3. **-vezi comentariu pe tablă**

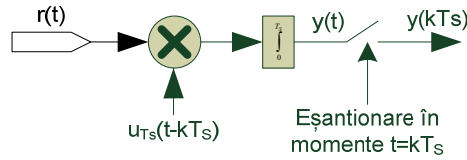


Figura 3. Demodulare PAM cu intercorelator

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_0^t r(\tau) \cdot u_{T_s}(\tau - kT_s) d\tau = \int_0^t [m_k \cdot u_{T_s}(\tau - kT_s) + n(\tau)] \cdot u_{T_s}(\tau - kT_s) d\tau = \\
 &= m_k \int_0^t [u_{T_s}(\tau - kT_s)]^2 d\tau + \int_0^t n(\tau) \cdot u_{T_s}(\tau - kT_s) d\tau
 \end{aligned} \quad (10)$$

Ecuția (10) este de fapt intercorelația dintre semnalul recepționat și impulsul unitate $u_{T_s}(t - kT_s)$. Eșantionând semnalul în momentele $t=kT_s$ obținem:

$$y(kT_s) = m_k + n_k \quad (11)$$

termenul de zgomot n este un zgomot cu distribuție Gaussiană

$$n_k = \int_0^{T_s} n(\tau) \cdot u_{T_s}(\tau - kT_s) d\tau \quad (12)$$

Considerând că densitatea spectrală de putere a zgomotului este N_0 , dispersia zgomotului n_k va fi:

$$\sigma^2 = P_n = \int_0^{T_s} (n_k)^2 dt = \int_0^{T_s} \left(\int_0^{T_s} n(\tau) \cdot u_{T_s}(\tau - kT_s) d\tau \right)^2 dt = N_0 \int_0^{T_s} (u_{T_s}(t - kT_s))^2 dt = N_0 \quad (13)$$

Probabilitatea de eroare a modulației PAM.

Se presupune că semnalul recepționat este afectat de un zgomot gaussian de medie nulă și dispersie σ . Expresia semnalului recepționat este:

$$r_{PAM}(t) = s_{PAM}(t) + n(t) \quad (14)$$

Astfel, probabilitatea condiționată ca semnalul să aibă valoarea r în momentul de sondare, dacă s-a emis nivelul m_i este:

$$p(r | m_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \exp\left(-\frac{(r - m_i)^2}{2\sigma^2}\right); \quad (15)$$

Distribuțiile densităților de probabilitate pentru cele M nivele emise și afectate de zgomot, precum și valorile celor $M-1$ praguri de decizie, sunt prezentate în Figura 4.

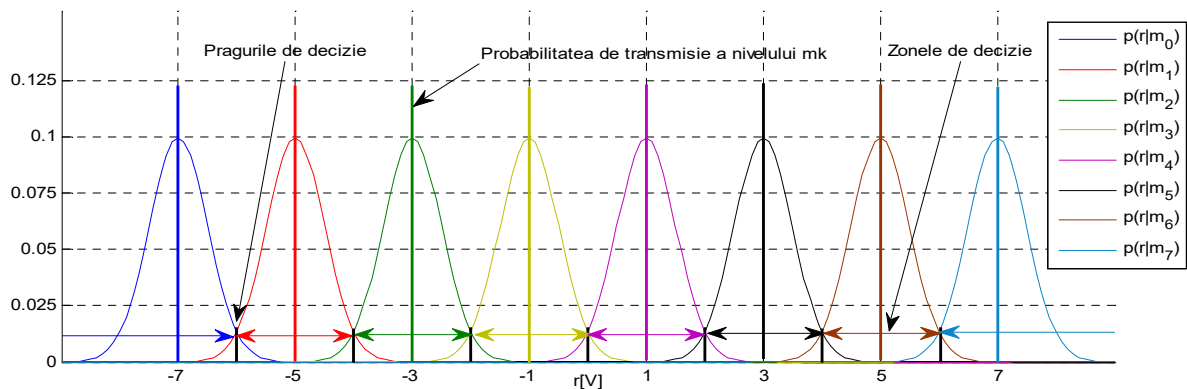


Figura 4 Distribuțiile densităților de probabilitate ale semnalului PAM recepționat, pragurile și zonele de decizie

Deoarece simbolurile decise se obțin pe baza distanței euclidiene minime dintre nivelele permise și nivelul recepționat, de aceea, probabilitatea de eroare a unui simbol este egală cu probabilitatea de apariție a unui semnal de zgomot astfel încât nivelul recepționat să fie mai aproape de un nivel permis altul decât cel transmis pe acea perioadă de simbol. Dacă pe o perioadă de simbol se transmite nivelul m_k cu probabilitatea P_{mk} , atunci probabilitatea de eroare a unui simbol este:

$$p_e = \sum_{k=1}^M (P_{mk} \cdot p(|r - m_k| > A_0) \cdot N_{k,A_0}); \quad (16)$$

unde N_{k,A_0} reprezintă numărul de nivele permise care se află la distanța euclidiană $2A_0$ față de nivelul m_k

Dacă datele modulatorie sunt aleatoare, atunci nivelele transmise sunt echiprobabile, adică $P_{mk} = \frac{1}{M}$

Dacă nivelele transmise respectă ecuația (3), atunci ecuația (16) poate fi rescrisă în felul următor:

$$p_e = \frac{1}{M} \cdot \left[p(|r - m_1| > A_0) + p(|r - m_M| > A_0) + \sum_{k=2}^{M-1} (p(|r - m_k| > A_0) \cdot 2) \right] = \frac{2(M-2)+2}{M} p(|r - m_i| > A_0); \quad (17)$$

Înlocuind (15) în (17), obținem probabilitatea medie de eroare de simbol:

$$p_e = \frac{2(M-1)}{M} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma^2} \int_{A_0}^{\infty} \exp\left(-\frac{(r - m_k)^2}{2\sigma^2}\right) d(r - m_k) = \frac{2(M-1)}{M} \cdot Q\left(\frac{A_0}{\sigma}\right); \quad (18)$$

unde

$$Q(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du; \quad (19)$$

Funcția Q() poate fi descompusă în serie Taylor

$$Q(t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \approx \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{t^2} + \frac{3}{t^4} - \dots\right); \quad (20)$$

Pentru valori relativ mari al argumentului, funcția Q poate fi aproximată cu primul termen al descompunerii în serie Taylor.

Probabilitatea de eroare de simbol poate fi exprimată și în funcție de puterea medie a semnalelor, ținând cont de relația (5):

$$p_e = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6P_{mPAM}}{(M^2-1)\sigma^2}}\right); \quad (21)$$

Probabilitatea de eroare de bit depinde și de modalitatea de mapare multibit-fazor;

Din relația (15) rezultă că probabilitatea de eronare a unui nivel într-unul dintre nivelele învecinate e mai mare decât probabilitatea de eronare a aceluși nivel în nivelele mai îndepărtate.

Datorită acestui fapt, dacă maparea multibit-nivel se face conform unui cod Gray, probabilitatea de eroare de bit se poate calcula cu (22), cu o foarte bună aproximare la valori mari și medii ale ρ ; n este numărul de biți/simbol, $n = \lg M$ sau $\log_2 M$. Această aproximare ia în considerare doar eronarea unui nivel în nivele învecinate, caz în care eronarea simbolului respectiv conduce la eronarea unui singur bit

$$BER = \frac{N_{be}}{N_{br}} \approx \frac{1 \cdot N_{se}}{n \cdot N_{sr}} = \frac{p_e}{n} \quad (22)$$

Maparea de tip Gray asigură o probabilitate de eroare de bit mai mică decât maparea în conformitate cu codul binar natural

Justificarea acestei afirmații se va face considerând modulația PAM-4, adică nivelele $\{+/-3A_0, +/-1A_0\}$.

Considerând că s-a transmis nivelul +1, eronarea sa în nivelele +3 și -1 are loc cu aceeași probabilitate p_{e1} , iar eronarea nivelului +1 în nivelul -3 are loc cu probabilitatea p_{e2} . Folosind relația (15) rezultă că:

$$d(+1; +3) = d(+1; -1) < d(+1; -3) \Rightarrow p_{e1} > p_{e2} \quad (23)$$

Pentru o mapare Gray corespondența dibit fazor este $(0 \leftrightarrow 00; 1 \leftrightarrow 01; 2 \leftrightarrow 11; 3 \leftrightarrow 10)$, iar pentru o mapare conformă cu un cod binar-natural corespondența este $(0 \leftrightarrow 00; 1 \leftrightarrow 01; 2 \leftrightarrow 10; 3 \leftrightarrow 11)$

Rezultă că la maparea Gray, probabilitatea medie de eronare a unui bit este dată de:

$$p_{bG} = 2 \cdot p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 2 \quad (24)$$

iar în cazul mapării binar-natural probabilitatea medie de eronare a unui bit este dată de:

$$p_{bn} = p_1 \cdot 1 + p_1 \cdot 2 + p_2 \cdot 1 \quad (25)$$

Pentru o alocare multibit-fazor după codul binar natural probabilitățile p_1 și p_2 au aceleași valori ca și pentru alocarea după codul Gray.

Comparând probabilitățile de eroare de bit ale celor două modalități de mapare obținem:

$$p_{bG} - p_{bn} = p_2 - p_1 < 0 \Rightarrow p_{bG} < p_{bn} \quad (26)$$

Filtrarea semnalelor de date

Necesitate

- unul din efectele limitării benzii unui impuls rectangular de perioadă T_s , datorită filtrării, este „extinderea” sa în timp, care conduce la apariția **interferenței intersimbol** (Inter-Symbol Interference - ISI).

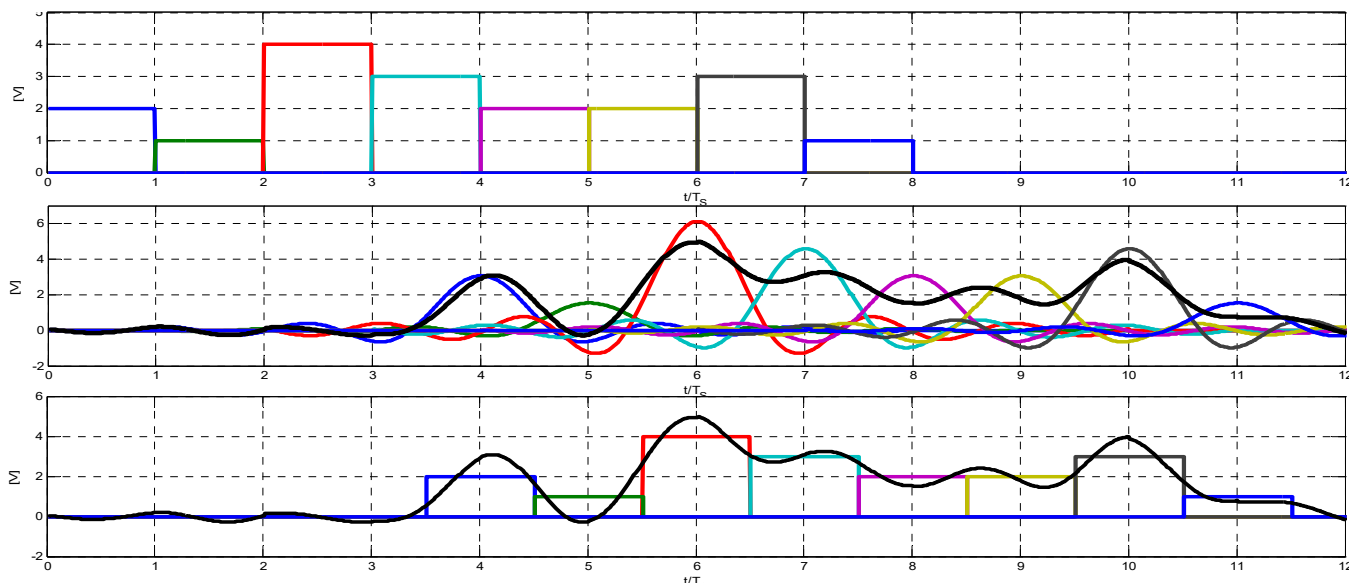


Figura 5 Filtrarea trece jos a impulsurilor. a). nivele de intrare. b). impulsurile individuale filtrate. c). Semnalul original si semnalul filtrat

- dacă a_k este impulsul ce apare în cea de a k-a perioadă de simbol, $x(t)$ este răspunsul la impuls al filtrului, iar τ este întârzierea introdusă de filtru, atunci semnalul la ieșirea filtrului este:

$$y(t) = \sum_{i=-n}^{+n} a_{k+i} \cdot x(t - kT_s - iT_s - \tau) = a_k \cdot x(t - kT_s - \tau) + \sum_{\substack{i=-n \\ i \neq 0}}^{+n} a_{k+i} \cdot x(t - kT_s - iT_s - \tau) \quad (27)$$

- din (27) rezultă că impulsul filtrat are un lob principal a_{k0} și o serie de lobi laterali a_{ki} , care apar în perioadele de simbol anterioare, $i < 0$, și în cele ulterioare, $i > 0$; acești lobi laterali afectează simbolurile transmise pe durata perioadelor de simbol respective. Amplitudinile lobului principal și cele ale lobilor laterali depind de expresia răspunsului la impuls al filtrului folosit.

Criteriile de filtrare ale lui Nyquist

- pentru a reduce efectele distorsionante ale ISI asupra semnalului filtrat, răspunsul la impuls al filtrului va trebui să fie nul la momente de timp bine definite, numite momente de sondare, cu excepția unuia, numit moment principal de sondare.

- Nyquist a arătat că, pentru a transmite simboluri cu perioadă T_s , într-o bandă de frecvență $[0, f_N]$ cu ISI = 0 în momentele de sondare (unde $f_N = 1/(2T_s) = f_s/2$), impulsurile trebuie filtrate cu un filtru ce are caracteristica de frecvență și răspunsul la impuls definite de relațiile (28) și, respectiv, (29).

$$X(\omega) = \begin{cases} 1; \omega \leq \omega_N; \\ 0; \omega > \omega_N; \end{cases} \quad (28) \quad x(t) = \frac{\sin\left(\pi \frac{t}{T_s}\right)}{\pi \frac{t}{T_s}}; \quad (29)$$

- caracteristica de frecvență și răspunsul la impuls sunt prezentate în Figura 6 și Figura 7

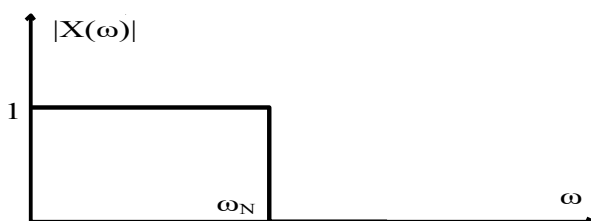


Figura 6 Caracteristica filtrului Nyquist ideal

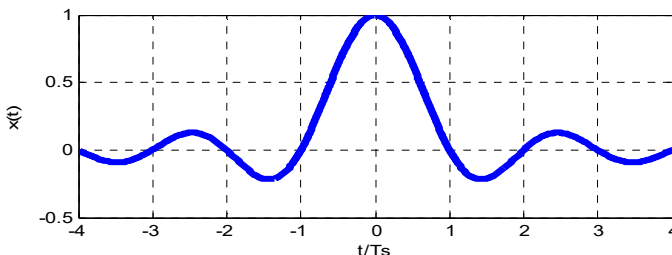


Figura 7. Răspunsul la impuls al filtrului Nyquist ideal

- această caracteristică este numită caracteristica Nyquist ideală, deoarece nu este realizabilă
- răspunsul la impuls al filtrului Nyquist ideal se anulează o dată în fiecare perioadă de simbol, la mijlocul acesteia (momente de sondare), cu excepția unei perioade de simbol, în care impulsul filtrat își atinge valoarea nominală la momentul de sondare.
- datorită acestei proprietăți, impulsul filtrat nu va afecta, în momentele de sondare, valorile impulsurilor transmise în perioadele de simbol anterioare și ulterioare, asigurând o ISI nulă în momentele de sondare.
- pentru a obține o caracteristică de filtrare realizabilă trebuie să “relaxăm” una din condițiile impuse de filtrarea Nyquist ideală;
- cele trei posibilități de “relaxare” sunt:
 - a) mărirea lărgimii de bandă (LB) a caracteristicii de filtrare Nyquist;
 - b) acceptarea unei ISI nenule, controlate;
 - c) scăderea debitului de simbol, adică a lui f_s ;
- îndeplinirea condiției a) conduce la primul criteriu de filtrare a lui Nyquist;
- îndeplinirea condiției b) conduce la al doilea criteriu de filtrare a lui Nyquist – se obțin astfel așa numitele Tehnici cu Răspuns Parțial (PR);
- îndeplinirea condiției c) nu este luată în considerare deoarece conduce la scăderea debitului binar.

Primul criteriu de filtrare al lui Nyquist. Caracteristica în cosinus ridicat (Raised-Cosine – RC)

- caracteristica de frecvență a acestui filtru este dată de (30), unde prin α s-a notat factorul de exces de bandă – “roll-off factor”;
- acesta este raportul dintre banda suplimentară de frecvență introdusă și banda minimă necesară, care e egală cu f_N .
- modulul caracteristicii este prezentat în Figura 8 pentru $\alpha = 0$ (caracteristica ideală – aproximativ), 0,5 și 1.
- deoarece expresia sa este un cosinus pătrat această caracteristică se numește “cosinus ridicat” - “raised cosine” (RC).
- caracteristica ideală $X(\omega)$ (28), care nu necesită un exces de bandă se obține făcând $\alpha \rightarrow 0$ în (30).

$$X_\alpha(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_N(1 - \alpha); \\ \frac{1 - \sin\left[\frac{T_s(\omega - \omega_N)}{2\alpha}\right]}{2} = \cos^2\left(\frac{\pi\omega}{4\alpha\omega_N} - \frac{\pi(1 - \alpha)}{4\alpha}\right); & \omega \in (\omega_N(1 - \alpha), \omega_N(1 + \alpha)); \\ 0 & \omega \geq \omega_N(1 + \alpha); \end{cases} \quad (30)$$

- expresia (30) este o caracteristică de tip trece-jos
- expresia caracteristicii RC trece-bandă, centrată pe frecvența purtătoare f_p , se obține înlocuind în (30) ω cu $(\omega - \omega_p)$.

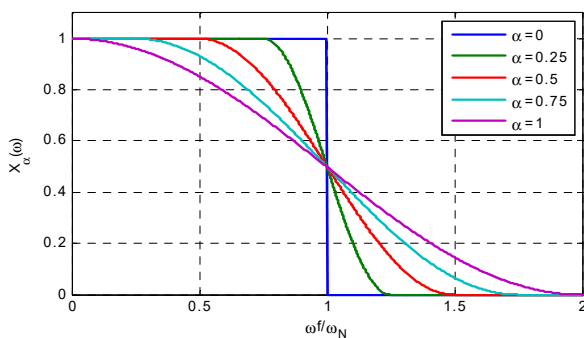


Figura 8 Caracteristicile de frecvențale filtrelor RC

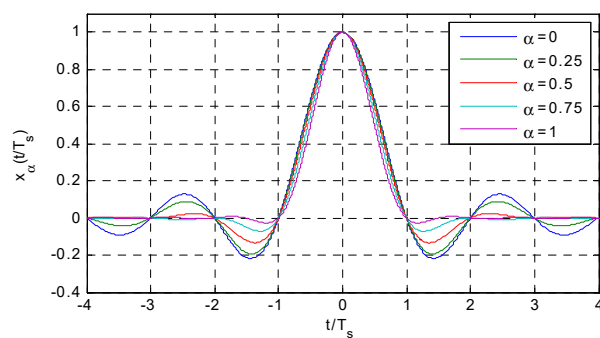


Figura 9 Răspunsul la impuls al filtrelor RC

- banda de trecere a semnalului filtrat TB este:

$$B = \left[\omega_p - \omega_N(1 + \alpha); \omega_p + \omega_N(1 + \alpha) \right] \quad (31)$$

- răspunsul la impuls al filtrului RC este definit de relația (32), și reprezentat în Figura 9 pt. $\alpha = 0.5$.

$$x_\alpha(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T_s}\right)}{\frac{\pi t}{T_s}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\alpha \pi t}{T_s}\right)}{1 - \frac{4\alpha^2 t^2}{T_s^2}}; \quad (32)$$

- comparând expresiile (29) și (32) sau Figura 7 și Figura 9, rezultă că lobii laterali ai răspunsului filtrului cu banda extinsă sunt sensibil mai mici decât cei ai răspunsului filtrului ideal; aceasta datorită celui de al doilea factor din (32), factor generat de banda de frecvență suplimentară utilizată.
- atenuarea lobilor laterali crește odată cu creșterea factorului de exces de bandă.
- dacă $t = kT_s - T_s/2$ este considerat începutul perioadei de simbol, atunci momentul de sondare este întârziat cu $T_s/2$ și apare la mijlocul perioadei de simbol; deci momentele de sondare sunt $t = kT_s$.
- Momentele de sondare au aceleași proprietăți ca și cele descrise la filtrul Nyquist ideal.

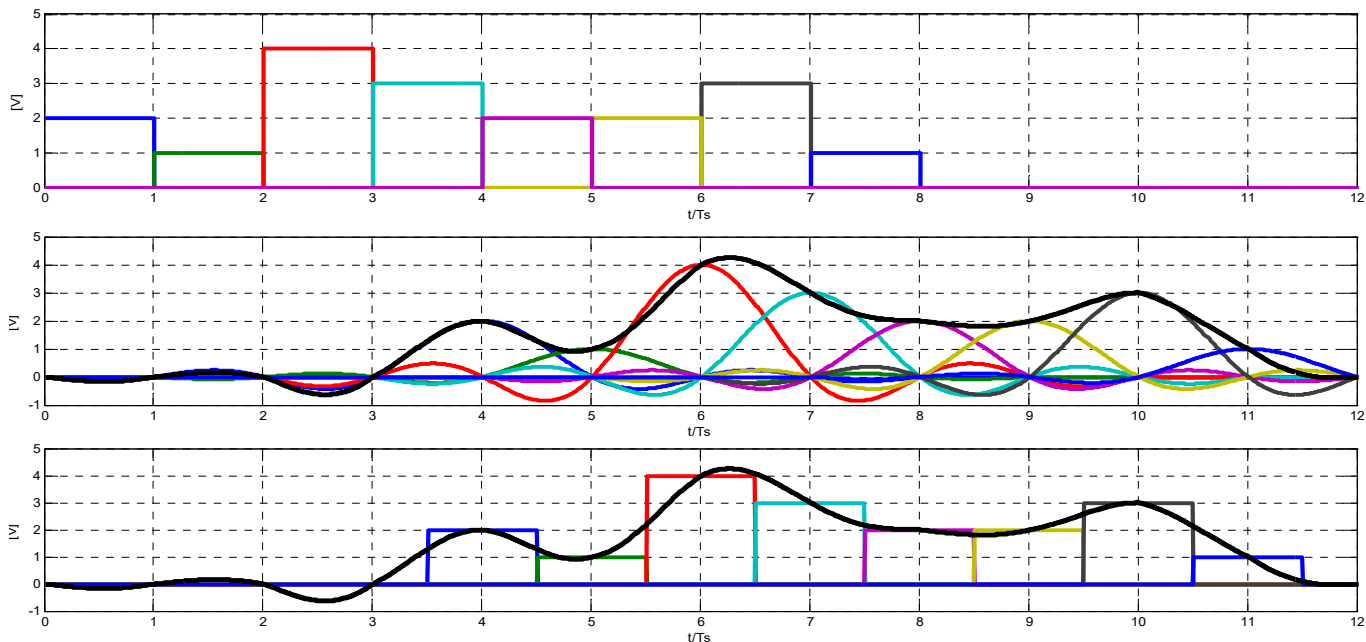


Figura 10 Filtrarea trece jos a impulsurilor cu un filtru Nyquist.
a. nivele de intrare. b. impulsurile individuale filtrate. c. Semnalul original si semnalul filtrat

Caracteristica de filtrare radical din cosinus ridicat - Root-Raised Cosine (RRC)

- pentru a asigura cele mai bune performanțe în prezența zgomotului, caracteristica de filtrare RC este repartizată în mod egal între emisie și recepție.
- aceasta implică filtrarea semnalului, atât la emisie cât și la recepție cu caracteristicile G_E și G_R , care sunt egale cu $X_\alpha^{1/2}$, vezi (33).

$$\left. \begin{aligned} X_\alpha(\omega) &= G_E(\omega) \cdot G_R(\omega) \\ G_E(\omega) &= G_R(\omega) \end{aligned} \right\} \Rightarrow G_E(\omega) = G_R(\omega) = X_\alpha^{1/2}(\omega) ; \quad (33)$$

- dacă filtrul de la recepție este plasat înaintea demodulatorului, la intrarea acestuia, semnalul este filtrat cu produsul $G_E \cdot G_R$, adică cu o caracteristică RC. **-vezi Fig. 13 mai jos**
- implementarea unei caracteristici RC este echivalentă cu implementarea a două caracteristici RRC, fie ele de tip TJ sau TB.
- expresia matematică a caracteristicii RRC este dată de (34) și reprezentată în Figura 11;

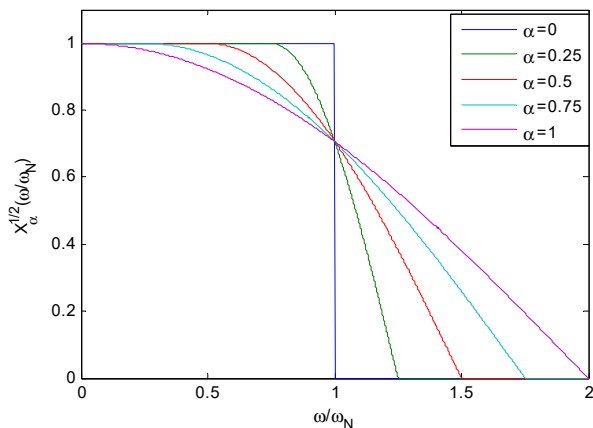


Figura 11. Caracteristicile de frecvență ale filtrelor RRC

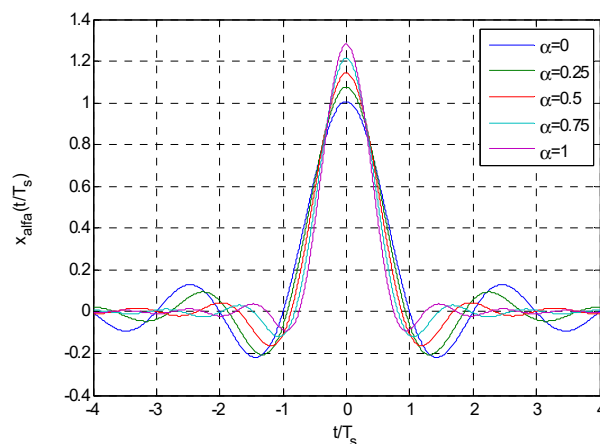


Figura 12 Răspunsurile la impuls ale filtrelor RRC

$$X_{\alpha}^{1/2}(\omega) = \begin{cases} 1; & 0 \leq \omega \leq \omega_N(1-\alpha); \\ \cos\left(\frac{\pi\omega}{4\alpha\omega_N} - \frac{\pi(1-\alpha)}{4\alpha}\right); & \omega \in [\omega_N(1-\alpha), \omega_N(1+\alpha)]; \\ 0; & \omega > \omega_N(1+\alpha) \end{cases} \quad (34)$$

- această caracteristică mai este denumită și caracteristica “în cosinus”.

- caracteristica definită în (34) este una TJ; - cea TB-RRC se obține similar cu caracteristica RC, iar banda semnalului filtrat este exprimată tot de (31)

- răspunsul la impuls al acestei caracteristici este definit de (35) și este prezentat în

Figura 12.

$$h_{R\alpha}(t) = \frac{1}{1 - \left(\frac{4\alpha t}{T_s}\right)^2} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi(1-\alpha)t}{T_s}\right)}{\frac{\pi t}{T_s}} + \frac{4\alpha}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi(1+\alpha)t}{T_s}\right) \right]; \quad (35)$$

Rețineți că:

- răspunsul la impuls al filtrului RRC, $\alpha > 0$, nu are valori nule în momentele de sondare;
- amplitudinea semnalului filtrat este mai mare decât 1 în momentul principal de sondare; amplitudinea semnalului filtrat, în acest moment, crește cu creșterea lui α .
- amplitudinile lobilor laterali scad cu creșterea lui α .
- deși semnalul filtrat transmis în canal are ISI nenulă în momentele de sondare, semnalul de la intrarea demodulatorului are ISI=0 în aceste momente, datorită filtrării RRC efectuată în receptor, adică răspunsul global la impuls este (30), asigurându-se ISI=0 în toate momentele de sondare.

Transmisia PAM în canal AWGN cu bandă de frecvență limitată

Limitarea benzii de frecvență a semnalului PAM este echivalent cu înlocuirea impulsului unitate $u_{T_s}(t-kT_s)$ cu varianta lui filtrată trece jos cu filtru formator de la emisie; de exemplu $h_{R\alpha}(t-kT_s)$ dacă se dorește filtrarea cu caracteristica RRC. expresia semnalului PAM cu banda de frecvență limitată devine:

$$s_{PAM}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \cdot h_{FFE}(t-kT_s) \quad (36)$$

Semnalul recepționat din canal cu AWGN poate fi exprimat ca:

$$r_{PAM}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \cdot h_{FFE}(t-kT_s) + n(t) \quad (37)$$

pentru a reduce puterea zgomotului la recepție semnalul trebuie filtrat cu un filtru care are banda de trecere mai mare sau egal cu banda de frecvență a semnalului util. Expresia semnalului la ieșirea acestui filtru este:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \cdot (h_{FFE}(t-kT_s) * h_{FFR}(t-kT_s)) + (n(t) * h_{FFR}(t-kT_s)) \quad (38)$$

notând cu $h(t-kT_s) = h_{FFE}(t-kT_s) * h_{FFR}(t-kT_s)$ răspunsului la impuls a filtrului echivalent obținut din concatenarea filtrului formator de la emisie cu filtrul formator de la recepție, și cu

$w(t) = n(t) * h_{FFR}(t-kT_s)$ zgomotul filtrat cu filtru formator din receptor, relația (38) poate fi rescrisă ca:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \cdot h(t-kT_s) + w(t) \quad (39)$$

semnalul filtrat este sondat (eșantionat) în momentele $t=nT_s$, - **vezi comentariu pe tablă**

$$y_n = y(nT_s) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \cdot h(nT_s - kT_s) + w(nT_s) \quad (40)$$

Dacă filtrele formatoare de la emisie respectiv de la recepție sunt alese astfel încât filtrul echivalent obținut din concatenarea lor să fie un filtru Nyquist atunci pe baza (32) putem scrie că:

$$h(nT_s - kT_s) = \begin{cases} 0 & k \neq n \\ 1 & k = n \end{cases} \quad (41)$$

și:

$$y_n = m_n + w_n \quad (42)$$

Dacă zgomotul din canal are densitatea spectrală de putere N_0 puterea zgomotului filtrat va fi:

$$\begin{aligned} \sigma^2 = P_n &= \int_{-\infty}^{\infty} (w(T))^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) \cdot h_{FFR}(\tau - kT_s) d\tau \right)^2 dt = \\ &= N_0 \int_{-\infty}^{\infty} (h_{FFR}(t - kT_s))^2 dt = N_0 \mathcal{E} \end{aligned} \quad (43)$$

În cazul filtrelor RRC coeficientul \mathcal{E} este egal cu 1, deci dispersia zgomotului va fi identică cu dispersia zgomotului nefiltrat. În aceste condiții performanțele în prezența AWGN rămân aceleași ca și în cazul transmisiei cu bandă de frecvență nelimitată.

Schema lanțului de transmisie este prezentată în Figura 13.

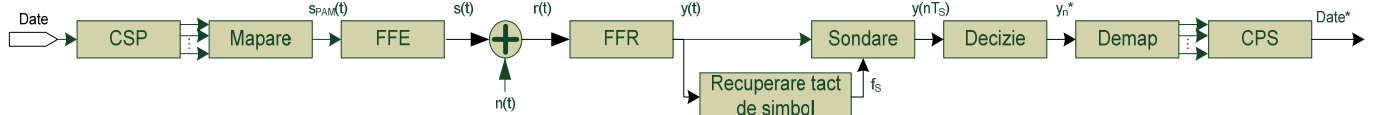


Figura 13. Schema bloc a unei transmisii PAM cu banda de frecvență limitată

Referințe:

1. John G Proakis , Masoud Salehi, "Fundamentals Of Communication Systems" Prentice Hall 2004
2. Fuqin Xiong, "Digital Modulation Techniques (Communications/Networking)" 2nd Revised edition, Artech House, 2006
3. Simon Haykin "Communication Systems" 4th edition, John Wiley & Sons, 2001
4. Bernard Sklar, "Digital Communications, fundamentals and Applications" Prentice Hall, 2001